УДК 512.553

ПРО КІЛЬЦЯ ЕНДОМОРФІЗМІВ УЛЬТРАДОБУТКІВ ВІЛЬНИХ КІЛЕЦЬ

Г. В. Зеліско

Zelisko H. V. On endomorphism rings of the ultraproducts of free modules. Necessary and sufficient conditions for existence of isomorphism between the endomorphism ring of the ultraproduct of modules and the ultraproduct of endomorphism rings of these modules are found. It is proved that the ring $(\prod_{i\in I} End_{R_i}(M_i))/\mathfrak{D}$ is a dense subring (in the sence of Jacobson) in the ring $End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$.

1. Вступні зауваження і позначення

Дослідження кілець ендоморфізмів модулів привертало увагу багатьох авторів. У даному повідомленні розпочинається вивчення поведінки кілець ендоморфізмів при переході до ультрадобутків модулів. Ми встановлюємо, що ультрадобуток кілець ендоморфізмів сім'ї модулів вкладається в кільце ендоморфізмів ультрадобутку цих модулів, а також вияснюємо, коли це вкладення є ізоморфізмом. Цікавим фактом є те, що знайдене вкладення є щільним в розумінні Джекобсона. У кінці повідомлення доведено, що ультрадобуток сім'ї локальних модулів є локальним. Цей результат узагальнює твердження Ф.Тахи з [4] про локальність ультрадобутку сім'ї комутативних локальних кілець.

Надалі всі розглядувані кільця вважатимуться асоціативними з $1 \neq 0$, а всі модулі лівими і унітарними. Основні використані твердження і позначення з теорії кілець можна знайти в [1]. Потрібний матеріал з теорії моделей взято з монографії [2]. Ідейно стаття близька до праці [3].

Нехай $\{R_i\}_{i\in I}$ – сім'я кілець, $\mathfrak{D}$ – ультрафільтр над I, $R = (\prod_{i\in I} R_i)/\mathfrak{D}$ – ультрадобуток сім'ї кілець $\{R_i\}_{i\in I}$ за ультрафільтром $\mathfrak{D}$, M_i – лівий R_i-модуль для кожного $i \in I$. Тоді $M = (\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D}$ є лівим R-модулем стосовно природно визначених операцій. Нехай N_i – підмодуль в M_i для довільного $i \in I$. Тоді одержуємо R-підмодуль $N = (\prod_{i\in I} N_i)/\mathfrak{D}$ в M і фактор-модуль M/N. Оскільки M_i/N_i є лівим R_i-модулем, то можна розглянути модуль $M' = (\prod_{i\in I}(M_i/N_i))/\mathfrak{D}$, котрий також має природну структуру лівого R-модуля. Виникає запитання, як зв'язані модулі M' і M/N? Відповідь сформулюємо у вигляді леми.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 03C20, 03G10, 16B70, 16D15, 16D50, 18G05.

Лема. *Модулі M' і M/N є ізоморфними.*

Доведення. Побудуємо гомоморфізм лівих R-модулів $\varphi : M \longrightarrow M'$, котрий задається правилом

$$m = \overline{(m_i)_{i\in I}} \longmapsto \overline{(\overline{m_i})_{i\in I}}.$$

Цей гомоморфізм коректно визначений, у чому легко переконатись прямою перевіркою. Обчислимо ядро цього гомоморфізму. З одного боку, якщо $n = \overline{(n_i)_{i\in I}} \in N$, то

$$\varphi(n) = \varphi(\overline{(n_i)_{i\in I}}) = \overline{(\overline{n_i})_{i\in I}} = \overline{(\overline{0})_{i\in I}} = 0_{M'}.$$

Тому $N \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.

З іншого боку, якщо $k = \overline{(k_i)_{i\in I}} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(\overline{(k_i)_{i\in I}}) = 0_{M'}$. Це означає, що $\overline{(\overline{k_i})_{i\in I}} = \overline{(\overline{0})_{i\in I}}$. Тоді $\overline{k_i} = \overline{0}$ для кожного $i \in U$, де $U \in \mathfrak{D}$. Тому, $k_i \in N_i$ для довільного $i \in U$. Нехай $k' = \overline{(k'_i)_{i\in I}}$ таке, що $k'_i = k_i$, якщо $i \in U$ і $k'_i = 0$ в усіх інших випадках. Тоді $\overline{(k'_i)_{i\in I}} = \overline{(k_i)_{i\in I}}$. Оскільки $\overline{(k'_i)_{i\in I}} \in N$, то $k \in N$. Тому $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq N$. Отже, одержуємо рівність $\operatorname{Ker}\varphi = N$.

Встановимо, що $\operatorname{Im}\varphi = M'$. Включення $\operatorname{Im}\varphi \subseteq M'$ виконується очевидним чином. Встановимо обернене включення. Для перевірки оберненого включення нехай $m' \in M'$ і існує $m \in M$ таке, що $\varphi(m) = m'$. Якщо $m' = \overline{(\overline{m_i})_{i\in I}}$, то за m можна взяти $\overline{(m_i)_{i\in I}}$. Отже, $M' \subseteq \operatorname{Im}\varphi$. За теоремою про гомоморфізми $\operatorname{Im}\varphi \simeq M/\operatorname{Ker}\varphi$. Оскільки $\operatorname{Im}\varphi = M'$, $\operatorname{Ker}\varphi = N$, то $M' \simeq M/N$, що і потрібно довести.

Нехай M_i – лівий R_i-модуль для кожного $i \in I$. Розглянемо кільця $End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$ і $End_{R_i}(M_i)$, $i \in I$.

Можна ввести в розгляд кільце

$$\left(\prod_{i\in I} End(M_i)\right)/\mathfrak{D}$$

– ультрадобуток сім'ї кілець ендоморфізмів $\{End(M_i)\}_{i\in I}$ за ультрафільтром $\mathfrak{D}$. Неважко бачити, що існує вкладення

$$\left(\prod_{i\in I} End(M_i)\right)/\mathfrak{D} \subset End_R\left(\left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D}\right).$$

Справді, існує відображення

$$\theta : \left(\prod_{i\in I} End(M_i)\right)/\mathfrak{D} \to End\left(\left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D}\right),$$

котре задається правилом: $\theta(\overline{(f_i)_{i\in I}}) = \varphi_{\overline{f}}$, де

$$\varphi_{\overline{f}} : \left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D} \to \left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D}$$

ендоморфізм, визначений рівністю

$$\varphi_{\overline{f}}(\overline{(m_i)_{i\in I}}) = \overline{(f_i(m_i))_{i\in I}}. \qquad (*)$$

Безпосередня перевірка показує, що $\varphi_{\overline{f}}$ справді є гомоморфізмом R-модулів.

Переконаємося, що θ – гомоморфізм. Для цього треба показати, що виконуються наступні рівності: $\theta(\overline{f}+\overline{g})=\theta(\overline{f})+\theta(\overline{g})$, $\theta(\overline{r}\cdot\overline{f})=\overline{r}\cdot\theta(\overline{f})$. Справді,

$$\theta(\overline{f}+\overline{g})=\theta(\overline{f+g})=\varphi_{\overline{f+g}},\quad \varphi_{\overline{f+g}}(\overline{(m_i)_{i\in I}})=\overline{((f_i+g_i)(m_i))_{i\in I}},\quad \theta(\overline{f})+\theta(\overline{g})=\varphi_{\overline{f}}+\varphi_{\overline{g}},$$

$$(\varphi_{\overline{f}}+\varphi_{\overline{g}})(\overline{(m_i)_{i\in I}})=\varphi_{\overline{f}}(\overline{(m_i)_{i\in I}})+\varphi_{\overline{g}}(\overline{(m_i)_{i\in I}})\overline{(f_i(m_i))_{i\in I}}+\overline{(g_i(m_i))_{i\in I}}=\overline{((f_i+g_i)(m_i))_{i\in I}}.$$

Покажемо, що θ – ін'єктивне. Справді, якщо $\overline{(f_i)_{i\in I}}\neq\overline{(g_i)_{i\in I}}$, то існує $i_0\in U$, де $U\in\mathfrak{D}$, таке, що $f_{i_0}\neq g_{i_0}$, тобто існує m_{i_0} таке, що $f_{i_0}(m_{i_0})\neq g_{i_0}(m_{i_0})$. Тому $\overline{(f_i(m_i))_{i\in I}}\neq\overline{(g_i(m_i))_{i\in I}}$ і $\varphi_{\overline{f}}\neq\varphi_{\overline{g}}$. Отже, кільце $(\prod_{i\in I}End(M_i))/\mathfrak{D}$ є підкільцем в $End_R((\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D})$.

2. Кільця ендоморфізмів ультрадобутків вільних модулів

Розглянемо сім'ю $\{M_i\}_{i\in I}$, де M_i є лівим R_i-модулем для кожного $i\in I$.

Теорема 1. *Вкладення $(\prod_{i\in I}End_{R_i}(M_i))/\mathfrak{D}\to End_R((\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D})$ є ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли існує така множина $U\in\mathfrak{D}$, що для кожного $i\in U$ модуль M_i є не більш, ніж n-породженим, де n – фіксоване натуральне число.*

Доведення. Для доведення достатності нехай M_i – не більш, ніж n-породжений для кожного $i\in I$, де n – фіксоване натуральне число. Покажемо, що

$$\theta:\left(\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i))\right)/\mathfrak{D}\to End_R\left(\left(\prod_{i\in I}M_i\right)/\mathfrak{D}\right)$$

є сюр'єктивним відображенням. Для цього введемо нові позначення. Якщо $M_i=\sum\limits_{j=1}^{n}R_im_i^j$, то сім'я елементів $\{\overline{(m_i^j)_{i\in I}}\}_{j=1}^{n}$ є системою твірних для ультрадобутку $(\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D}$. Справді, для довільного $\overline{(n_i)_{i\in I}}\in(\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D}$

$$\overline{(n_i)_{i\in I}}=\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}r_i^jm_i^j\right)_{i\in I}}=\overline{\sum_{j=1}^{n}(r_i^j)_{i\in I}\cdot(m_i^j)_{i\in I}}=\sum_{j=1}^{n}\overline{(r_i^j)_{i\in I}}\cdot\overline{(m_i^j)_{i\in I}}.$$

Нехай $\eta\in End_R((\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D})$ таке, що $\eta(\overline{(m_i^j)_{i\in I}})=\overline{(\sum\limits_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k)_{i\in I}}$. Для кожного $i\in I$ побудуємо ендоморфізм $f_i:M_i\to M_i$, який задається правилом:

$$f_i\left(\sum_{j=1}^{n}r_i^jm_i^j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(r_i^j\cdot\sum_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k\right).$$

Тоді $\overline{(f_i)_{i\in I}}\in(\prod_{i\in I}End(M_i))/\mathfrak{D}$ і йому можна поставити у відповідність елемент $\varphi_{\overline{f}}$ з $End_R((\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D})$ (див.(*)).

Для доведення сюр'єктивності θ досить встановити рівність $\varphi_{\overline{f}}=\eta$. Для довільного $\overline{(n_i)_{i\in I}}\in(\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D}$

$$\eta(\overline{(n_i)_{i\in I}})=\eta\left(\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}r_i^jm_i^j\right)_{i\in I}}\right)=\sum_{j=1}^{n}\overline{(r_i^j)_{i\in I}}\cdot\eta(\overline{(m_i^j)_{i\in I}})=\sum_{j=1}^{n}(\overline{(r_i^j)_{i\in I}}\cdot\overline{\left(\sum_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k)_{i\in I}\right)}.$$

$$\varphi_{\overline{f}}(\overline{(n_i)_{i\in I}})=\overline{(f_i(n_i))_{i\in I}}=\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(r_i^j\cdot\sum_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k\right)\right)_{i\in I}}=\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{(r_i^j)_{i\in I}}\cdot\overline{\left(\sum_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k\right)_{i\in I}}\right).$$

З метою доведення необхідності припустимо, що

$$M_1 = \sum_{j=1}^{n_1} R_1 e_1^j, \quad M_2 = \sum_{j=1}^{n_2} R_2 e_2^j, \quad \dots, \quad M_k = \sum_{j=1}^{n_k} R_k e_k^j \dots .$$

Введемо такі позначення: $d_1 = \overline{(e_1^1, e_2^1, ..., e_k^1, ...)}$, $d_2 = \overline{(e_1^2, e_2^2, ..., e_k^2, ...)}$, ... (це елементи з $(\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D}$). Міркуваннями від супротивного встановимо, що

$$End_R\Big(\Big(\prod_{i\in I} M_i\Big)/\mathfrak{D}\Big) \ncong \Big(\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i))\Big)/\mathfrak{D}.$$

Нехай для кожного $\varphi \in End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$ існує таке $\psi = \overline{(f_i)_{i\in I}}$, де $f_i \in End_{R_i} M_i$, що $\varphi = \psi$. Визначимо відображення

$$\varphi : \Big(\prod_{i\in I} M_i\Big)/\mathfrak{D} \to \Big(\prod_{i\in I} M_i\Big)/\mathfrak{D},$$

котре задається рівностями $\varphi(d_i) = d_i$ і $\varphi(e) = 0$ для кожного $e \in (\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D}$ такого, що $e \neq d_i$. Легко переконатись, що φ є гомоморфізмом R-модулів. Далі, за припущенням для кожного $i = 1, 2, \dots$ виконується $\psi(d_i) = \varphi(d_i) = d_i$. Враховуючи дію f_i, маємо $\psi(d_i) = \overline{(f_j(e_j^i))_{j\in I}} = d_i = \overline{(e_j^i)_{j\in I}}$. Тому для кожного $t = 1, 2, \dots$ існує така множина $U_t \in \mathfrak{D}$, що для довільного $j \in U_t$ виконується $f_j(e_j^t) = e_j^t$. Звідси випливає існуванняє такого $j_1 \in U_1$, що $f_{j_1}(e_{j_1}^1) = e_{j_1}^1$, існування такого $j_2 \in U_2 \backslash U_1$, що $f_{j_2}(e_{j_2}^2) = e_{j_2}^2$, ..., існування такого $j_k \in U_k \backslash U_{k-1}$, що $f_{j_k}(e_{j_k}^k) = e_{j_k}^k$, ...

Розглянемо елемент

$$e = \overline{(e_{j_1}^1, e_{j_2}^2, ..., e_{j_k}^k, ...)} \in \Big(\prod_{i\in I} M_i\Big)/\mathfrak{D}.$$

З одного боку, оскільки $\varphi = \psi$, то

$$\varphi(e) = \psi(e) = \overline{(f_{j_1}(e_{j_1}^1), f_{j_2}(e_{j_2}^2), ..., f_{j_k}(e_{j_k}^k), ...)} = \overline{(e_{j_1}^1, e_{j_2}^2, ... e_{j_k}^k, ...)} = e.$$

З іншого боку $e \neq d_i$ для кожного i. Таким чином, $\varphi(e) = 0$, тобто $e = 0$. Отримана суперечність доводить теорему.

3. Аналог теореми щільності Джекобсона

Теорема 2. *Якщо $\{M_i\}_{i\in I}$ – сім'я вільних скінченнопороджених R_i-модулів, то кільце $(\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i)))/\mathfrak{D}$ є щільним підкільцем (в розумінні Джекобсона) в кільці $End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$.*

Доведення. Покажемо, що кільце $(\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i)))/\mathfrak{D}$ щільне в кільці ендоморфізмів $End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$. Нехай $e_1, e_2, ..., e_n$ – лінійно незалежні елементи з $(\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D}$, і нехай $e_j = \overline{(a_i^j)_{i\in I}}$ для кожного $j \in \{1, 2, ..., n\}$, де $a_i^j \in M_i$. Потрібно довести, що для довільного $\varphi \in End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$ існує $f \in (\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i)))/\mathfrak{D}$ таке, що $\varphi(e_j) = f \cdot e_j$ для кожного $j \in \{1, ..., n\}$.

Нехай $\varphi(e_j) = \varphi(\overline{(a_i^j)_{i\in I}}) = \overline{(b_i^j)_{i\in I}}$, де $b_i^j \in M_i$. Оскільки елементи $e_1, e_2, ..., e_n$ – лінійно незалежні, то для кожного фіксованого i існує така множина $U_i \in \{1, ..., n\}$, що елементи

a_i^j є лінійно незалежними в M, якщо $j \in U_i$ і множина $V_i \in \{1, ..., n\}$ така, що елементи b_i^j лінійно незалежні, якщо $j \in V_i$. Нехай $W_i = U_i \cap V_i$.

Побудуємо $f \in (\prod_{i \in I}(End_{R_i} M_i))/\mathfrak{D}$, $f = \overline{(f_i)_{i \in I}}$ і покладемо

$$f \cdot e_j = f(e_j) = \overline{(f_i(a_i^j))_{i \in I}}.$$

Тут гомоморфізм $f_i : M_i \to M_i$ задається правилом $f_i(a_i^j) = b_i^j$, де $j \in W_i$ для кожного i. Тоді $f \cdot e_j = f(e_j) = \overline{(f_i(a_i^j))_{i \in I}} = \overline{(b_i^j)_{i \in I}} = \varphi(e_j)$, що і потрібно було довести.

4. Ультрадобутки локальних модулів

Твердження. *Якщо $\{M_i\}_{i \in I}$ – сім'я локальних модулів, то модуль $M = (\prod_{i \in I} M_i)/\mathfrak{D}$ теж локальний.*

Доведення. Оскільки модуль M_i – локальний для кожного $i \in I$, то в ньому існує єдиний максимальний підмодуль N_i. Розглянемо $N = (\prod_{i \in I} N_i)/\mathfrak{D}$. Покажемо, що N є максимальним підмодулем в M. Якщо припустити, що це не так, тобто, що існує підмодуль $K = (\prod_{i \in I} K_i)/\mathfrak{D}$ модуля M такий, що $N \subset K, K \neq M, K \neq N$, то знайдеться така множина $U_1 \in \mathfrak{D}$, що $N_i \subset M_i$ для кожного $i \in U_1$, існує множина $U_2 \in \mathfrak{D}$ така, що $K_i \neq M_i$ для всіх $i \in U_2$ і знайдеться така множина $U_3 \in \mathfrak{D}$, що $K_i \neq N_i$ для кожного $i \in U_3$. Тоді для кожного $i \in U$, де $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, N_i не буде максимальним підмодулем модуля M_i, а це суперечить локальності M_i.

Покажемо тепер, що N – єдиний максимальний підмодуль модуля M. Якщо припустити, що $S = (\prod_{i \in I} S_i)/\mathfrak{D}$ – інший максимальний підмодуль в M, то знайдеться така множина $V \in \mathfrak{D}$, що S_i для всіх $i \in V$, як і N_i, буде максимальним підмодулем модуля M_i, а це суперечить локальності M_i. Отже, в M існує єдиний максимальний підмодуль N, що і потрібно було довести.

1. Ламбек И. Кольца и модули. – М., Мир, 1971. - 281с.
2. Комарницкий Н. Я. *Ультрапроизведения областей Безу и проблема Коззенса-Фейса о "счетной" ультрастепени V - области главных идеалов* // Препринт. Львов. – 1996. – С.1-81.
3. Bell J. L., Slomson A. B. Models and ultraproducts, an introduction. – Amsterdam, North-Holland, 1969. – 319p.
4. Taha F. *Algebres simples centrales sur les corps ultraproduit de corps p-adiques* // Lect. Notes Math. – 1982. – N 924. – P.89-128.

Стаття надійшла до редколегії 19.10.98