УДК 513.6

ДВОЇСТІСТЬ В ЕТАЛЬНИХ КОГОМОЛОГІЯХ КРИВИХ НАД ПСЕВДОСКІНЧЕННИМ ПОЛЕМ

В. І. Андрійчук

Andriychuk V. I. Duality in the etale cohomology of curves over pseudofinite fields. Let X be a smooth complete curve over a pseudofinite field k. If $\mathcal{F}$ is any locally constant constructible sheaf of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$–modules on X, $(n, \operatorname{char} k) = 1$, $\widetilde{\mathcal{F}} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, then there is a nondegenerate pairing $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F}) \times \mathrm{H}^{3-r}(X, \widetilde{\mathcal{F}}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ of finite groups. This extends the well-known duality for curves over finite fields to the case of curves over pseudofinite fields.

Нехай X — проективна, гладка, незвідна крива над полем k, $\overline{k}$ — алгебраїчне замикання поля k, $\overline{X} = X \otimes_k \overline{k}$ — крива X над $\overline{k}$, $G_k = \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ — група Галуа поля k.

Позначимо через $\mathbb{G}_m$ пучок мультиплікативних груп, а через μ_n — пучок коренів n-го степеня з 1. Будемо вважати, що n взаємно просте з характеристикою поля k.

Через $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F})$ та $\mathrm{H}^r(\overline{X}, \mathcal{F})$ (відповідно $\mathrm{H}^r(k, M)$) позначаються етальні когомології кривих X та $\overline{X}$ з коефіцієнтами в пучку $\mathcal{F}$ (відповідно когомології Галуа групи G_k з коефіцієнтами в G_k-модулі M), $M_n = \operatorname{Ker}(M \xrightarrow{n} M)$. Етальні когомології $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ алгебраїчного многовиду X над довільним полем k відображають важливі геометричні та алгебраїчні властивості цього многовиду. Зокрема $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Pic} X$, $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Pic} \overline{X}$, де $\operatorname{Pic} X$ та $\operatorname{Pic} \overline{X}$ — групи класів ізоморфних оборотних пучків на X та $\overline{X}$ [2]. Групу $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Br} X$ називають *когомологічною групою Брауера* кривої X, а група $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mu_n)$ ізоморфна групі n–кручення в якобіані многовиду $\overline{X}$.

Важливою проблемою є вивчення взаємозв'язків між групами когомологій $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ різних розмірностей. У випадку, коли X — крива над скінченним полем k, $\mathcal{F}$ — локально постійний конструктивний пучок $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$–модулів, $\widetilde{\mathcal{F}} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, О. Гротендік і Д. Вердьє [1] довели, що $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F})$ та $\mathrm{H}^{3-r}(X, \widetilde{\mathcal{F}})$ двоїсті одна одній (див. також [2], ст. 226).

Мета цієї статті — довести, що згаданий результат залишається правильним і у випадку кривих, визначених над псевдоскінченними [3] полями.

Теорема. *Нехай X - проективна, гладка, незвідна крива над псевдоскінченним полем k, $\mathcal{F}$ - локально сталий конструктивний пучок $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модулів, $\widetilde{\mathcal{F}} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Тоді:*

а) Групи $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F})$ скінченні для $0 \leqslant r \leqslant 3$ і тривіальні для $i > 3$.

б) Існує природний невироджений добуток

$$\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F}) \times \mathrm{H}^{3-r}(X, \widetilde{\mathcal{F}}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 12G99, 14H05.

отже, групи $\mathrm{H}^r(X,\mathcal{F})$ *та* $\mathrm{H}^{3-r}(X,\widetilde{\mathcal{F}})$ *двоїсті одна одній.*

Спочатку ми доведемо цю теорему у випадку коли $\mathcal{F}=\mu_n$. Загальний випадок випливає звідси за допомогою застосування "відкручування" [2, Розділ V].

Лема 1. *Нехай* X *— проективний, гладкий, абсолютно незвідний многовид над псевдоскінченним полем* k, $\mathrm{Pic}^\circ\overline{X}$ *— підгрупа в* $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$, *що складається з оборотних пучків алгебраїчно еквівалентних нулю. Тоді* $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{Pic}^\circ\overline{X})=0$.

Доведення. Група $\mathrm{Pic}^\circ\overline{X}$ ізоморфна як G_k-модуль абелевому многовиду $\widehat{A}$, двоїстому до многовиду Альбанезе A многовиду X (див. [4], лема 4). Тому $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{Pic}^\circ\overline{X})\simeq\mathrm{H}^1(k,\widehat{A}(\overline{k}))$. Група $\mathrm{H}^1(k,\widehat{A}(\overline{k}))$ інтерпретується як група головних однорідних просторів для $\widehat{A}$ над k. Оскільки кожний многовид над k має k-раціональну точку (це частина означення псевдоскінченного поля), то $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{Pic}^\circ\overline{X})=0$.

Лема 2. *Нехай* X *— проективна, гладка, абсолютно незвідна крива над* k. *Тоді*
а) $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{G}_m)=\mathrm{Br}\,X=0$,
б) $\mathrm{H}^3(X,\mathbb{G}_m)=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
в) $\mathrm{H}^r(X,\mathbb{G}_m)=0$ *для* $r>3$.

Доведення. *а*). Запишемо для пучка $\mathbb{G}_m$ спектральну послідовність Хохшільда-Серра стосовно морфізму $\overline{X}\to X$:

$$\begin{aligned}0\to\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\mathrm{H}^1(X,\mathbb{G}_m)\to\mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\\ \to\mathrm{H}^2(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\mathrm{Ker}(\mathrm{H}^2(X,\mathbb{G}_m))\to\mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^2(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\\ \to\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\mathrm{H}^3(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mathbb{G}_m))=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Відомо, що $\mathrm{H}^i(\overline{X},\mathbb{G}_m)=0$ для $i>1$ (див.[2], с.138). За теоремою Гільберта-90 маємо $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mathbb{G}_m))=\mathrm{H}^1(k,\overline{k}^*)=0$. Когомологічна розмірність поля k дорівнює 1, отже, $\mathrm{H}^2(k,\overline{k}^*)=0$. Тому з (1) ми одержуємо ізоморфізми

$$\mathrm{H}^1(X,\mathbb{G}_m)\simeq\mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mathbb{G}_m))=\mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{Pic}\,\overline{X}),$$
$$\mathrm{H}^2(X,\mathbb{G}_m)\simeq\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mathbb{G}_m))=\mathrm{H}^1(k,\mathrm{Pic}\,\overline{X}).$$

Точна послідовність когомологій Галуа, відповідна точній послідовності G_k-модулів. Послідовність

$$0\to\mathrm{Pic}^\circ\overline{X}\to\mathrm{Pic}\,\overline{X}\to\mathbb{Z}\to0\tag{2}$$

показує, що $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{Pic}\,\overline{X})=\mathrm{H}^1(k,\mathbb{Z})=0$, бо $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{Pic}^\circ\overline{X})=0$ за лемою 1 і $\mathrm{H}^2(k,\mathrm{Pic}^\circ\overline{X})=0$. Отже, $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{G}_m)=\mathrm{Pic}\,\overline{X}^{G_k}=\mathrm{Pic}\,X$ і $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{G}_m)=0$.

б). $\mathrm{H}^3(X,\mathbb{G}_m)\simeq\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ навіть у більш загальному випадку кривої X над квазіскінченним полем k (див. [5], твердж.1.1).

в). Використаємо точну послідовність ([2], с.137.)

$$\cdots\to\bigoplus_v\mathrm{H}^{r-2}(k(v),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to\mathrm{H}^r(X,\mathbb{G}_m)\to\mathrm{H}^r(X,\mathbb{G}_{m,K})\to\dots,\tag{3}$$

де K — поле функцій на кривій X, v пробігає всі замкнені точки кривої X, а $k(v)$ означає поле лишків точки v. $\mathrm{H}^{r-2}(k(v),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=0$ для $r-2>1$, а $\mathrm{H}^r(K,\mathbb{G}_{m,K})=0$ для $r\geqslant 3$, оскільки когомологічна розмірність поля k (відповідно K) дорівнює 1 (відповідно 2). Отже, послідовність (3) показує, що $\mathrm{H}^r(X,\mathbb{G}_{m,K})=0$ для $r>3$.

Лема 3. *Групи* $\mathrm{H}^1(X,\mu_n)$ *та* $\mathrm{H}^2(X,\mu_n)$ *є скінченними. Крім того, існують точні послідовності*

$$1 \to k^*/k^{*n} \to \mathrm{H}^1(X,\mu_n) \to \mathcal{J}(k)_n \to 0, \tag{4}$$

$$0 \to \mathcal{J}(k)/n\mathcal{J}(k) \to \mathrm{H}^2(X,\mu_n) \to \mu_n(k) \to 1, \tag{5}$$

що дуальні одна одній. Тут $\mathcal{J}(k)$ *означає групу* k*-раціональних точок якобіана* $\mathcal{J}$ *кривої* X.

Доведення. Запишемо спектральну послідовність Хохшільда-Серра стосовно морфізму $2\ \overline{X} \to X$ для пучка μ_n:

$$\begin{gathered}0 \to \mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mu_n)) \to \mathrm{H}^1(X,\mu_n) \to \mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mu_n)) \to \\ \to \mathrm{H}^2(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mu_n)) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^2(X,\mu_n) \to \mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^2(\overline{X},\mu_n)) \to \\ \to \mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mu_n)) \to \mathrm{H}^3(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mu_n)) = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Відомо, що $\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mu_n) = \mu_n(\overline{k})$, $\mathrm{H}^1(\overline{X},\mu_n) = (\mathrm{Pic}\,\overline{X})_n$ — підгрупа елементів порядку, що ділить n в $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$, $\mathrm{H}^2(\overline{X},\mu_n) = \mathrm{Pic}\,\overline{X}/n\,\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ (див.,наприклад [2], с.157). Оскільки множення на n в $\mathrm{Pic}^\circ\,\overline{X}$ є сюр'єктивним, то з точної послідовності (2) випливає, що $\mathrm{Pic}\,\overline{X}/n\,\mathrm{Pic}\,\overline{X} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n(\overline{k})$.

Тепер з точної послідовності когомологій Галуа, відповідної послідовності

$$1 \to \mu_n(\overline{k}) \to \overline{k}^* \xrightarrow{n} \overline{k}^* \to 1,$$

випливає, що $\mathrm{H}^1(k,\mu_n(\overline{k})) \simeq k^*/k^{*n}$.

Враховуючи ці факти, одержуємо з (6)

$$1 \to k^*/k^{*n} \to \mathrm{H}^1(X,\mu_n) \to (\mathrm{Pic}\,\overline{X})_n^{G_k} \to 0, \tag{7}$$

$$0 \to \mathrm{H}^1(k,(\mathrm{Pic}\,\overline{X})_n) \to \mathrm{H}^2(X,\mu_n) \to \mu_n(\overline{k})^{G_k} \to 1. \tag{8}$$

Тут $(\mathrm{Pic}\,\overline{X})_n \simeq (\mathrm{Pic}^\circ\,\overline{X})_n = \mathcal{J}(\overline{k})_n \simeq \widehat{\mathcal{J}}(\overline{k})_n$, де $\widehat{\mathcal{J}}$ — якобіан, двоїстий до $\mathcal{J}$.

З невиродженості добутку Вейля ([6], §15)

$$\mathcal{J}(\overline{k})_n \times \widehat{\mathcal{J}}(\overline{k})_n \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

випливає двоїстість груп $\mathrm{H}^1(k,\mathcal{J}(\overline{k})_n)$ та $\mathrm{H}^\circ(k,\widehat{\mathcal{J}}(\overline{k})_n)$, а з теорії Куммера – двоїстість груп $\mathrm{H}^1(k,\mu_n(\overline{k}))$ і $\mathrm{H}^\circ(k,\mu_n(\overline{k})) \simeq \mu_n(k)$. Тому послідовності (7) і (8) двоїсті одна одній. Але, з іншого боку, в точній послідовності когомологій Галуа, відповідній точній послідовності G_k-модулів,

$$0 \to \mathcal{J}(\overline{k})_n \to \mathcal{J}(\overline{k}) \xrightarrow{n} \mathcal{J}(\overline{k}) \to 0,$$

$\mathrm{H}^1(k,\mathcal{J}(\overline{k})) = 0$ за лемою 1, отже, $\mathrm{H}^1(k,\mathcal{J}(\overline{k})_n) \simeq \mathcal{J}(k)/n\mathcal{J}(k)$. Тому точні послідовності (7) і (8) є послідовностями з формулювання леми.

Лема 4. *Групи* $\mathrm{H}^r(X, \mu_n)$ *тривіальні для* $r > 3$.

Доведення. Розглянемо точну послідовність когомологій

$$\cdots \to \mathrm{H}^{r-1}(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{n} \mathrm{H}^{r-1}(X, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^r(X, \mu_n) \to \mathrm{H}^r(X, \mathbb{G}_m), \tag{9}$$

відповідну точній послідовності пучків

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0.$$

Послідовність (9) показує, з врахуванням леми 2 *в*), що

$$\mathrm{H}^r(X, \mu_n) = \mathrm{H}^{r-1}(X, \mathbb{G}_m) = 0$$

для $r > 4$, а група $\mathrm{H}^4(X, \mu_n)$ ізоморфна коядру множення на n в $\mathrm{H}^3(X, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, і тому теж тривіальна.

Тепер легко довести теорему. З лем 3 і 4 випливає твердження *a*) теореми для пучка μ_n і твердження *б*) для пучка μ_n для $r = 1$ і $r = 2$. У випадку $r = 0$, $\mathrm{H}^\circ(X, \mu_n) \simeq \mathrm{H}^3(X, \mu_n) \simeq \mu_n(k)$ і твердження *б*) очевидне.

Далі, кожна скінченна абелева група є прямою сумою циклічних груп і когомології комутують з прямими сумами. Отже, групи $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F})$ скінченні для всіх сталих скінченних пучків $\mathcal{F}$ порядку взаємно простого з характеристикою поля k, і для таких пучків твердження *б*) теореми теж виконується. Звідси, використовуючи "відкручування", випливає твердження теореми у загальному випадку.

1. Verdier J. A duality theorem in the etale cohomology of schemes. – Proceedings of a conference on local fields. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.
2. Милн Дж. Этальные когомологии. – М., Мир, 1983.
3. Ax J. *The elementary theory of finite fields*// Ann. Math. – 1968. – Vol. 88. – N 2. – P. 239–272.
4. Manin Ju. *Le groupe de Brauer-Grothendieck en Geometrie diophantienne*// In Actes Congres International de Mathematicians (Nice, 1970). Paris: Gauthier-Villars. – 1971. – 1. – P. 401–411.
5. Douai J.-C. *Le theoreme de Tate-Poitou pour les corps de fouctions des courbes definies sur les corps de series formelles en une variable sur un corps algebriquement clos*// Comm. Alg. – 1987. – 15 (11). – P. 2379–2390.
6. Мамфорд Д. Абелевы многообразия. – М., Мир, 1971.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.97