УДК 512.64

СИМЕТРИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ І ЇХ ФАКТОРИЗАЦІЯ

М. І. Кучма

Kuchma M. I. Symmetric equivalence of matrix polynomials and their factorization. Conditions for existence of symmetric equivalence of matrices to its Smith forms and of factorization of such matrices over polynomial rings with involution are found. The results on strict equivalence and congruence of matrices are obtained.

Задача про симетричну еквівалентність симетричних матричних многочленів і їх факторизацію вивчалась у працях [1-3].

У роботі [1] показано, що симетричну оборотню над кільцями многочленів $\mathbb{C}[x]$ чи квазімногочленів $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ матрицю $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}, \tag{1}$$

де $B(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ чи $GL_n(\mathbb{C}[x, x^{-1}])$, при певних обмеженнях на симетричну матрицю $C(x)$. Факторизації вигляду (1) застосовуються до питання про факторизацію довільних симетричних матричних многочленів.

В [2] доведено, що із строгої еквівалентності регулярних симетричних матриць $A(x)$ і $B(x)$ випливає їх конгруентність.

Мета цієї статті – одержати умови існування симетричної еквівалентності симетричних матриць своїм формам Сміта і факторизації таких матриць, а також отримати результати, які стосуються строгої еквівалентності та конгруентності матриць.

Нехай $A(x)$ – неособливий матричний многочлен вигляду

$$A(x) = \sum_{i=0}^{p} A_i x^{p-i}, \tag{2}$$

де $A_i \in M_n(\mathbb{C})$, $i = 0, 1, \ldots, p$. Матричний многочлен $A(x)$ називається регулярним (унітальним, сингулярним), якщо $|A_0| \neq 0$ ($A_0 = E$ – одинична матриця, $|A_0| = 0$).

Якщо для $A(x)$ і $B(x)$ вигляду (2) існують оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)$ і $Q(x)$ такі, що $P(x)A(x)Q(x) = B(x)$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються еквівалентними.

Нехай $\mathbb{C}[x]$ – кільце многочленів з інволюцією ∇, визначеною, наприклад, у роботі [1], і перенесеною на кільце матриць $M_n(\mathbb{C}[x])$ наступним способом:

$$A(x)^{\nabla} = ||a_{ij}(x)||^{\nabla} = ||a_{ji}(x)^{\nabla}||.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 15A24, 15A23.

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$. Факторизацією матриці $A(x)$ з кільця $M_n(\mathbb{C}[x])$ називатимемо її зображення у вигляді (1), де $B(x)$ – регулярна (унітальна, сингулярна), а $C(x) = C(x)^{\nabla}$ – неособлива, матриці.

Симетричні матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються симетрично еквівалентними, якщо існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$ така, що $R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = B(x)$.

Якщо для $A(x)$ і $B(x)$ існують такі матриці P, $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ ($T \in GL_n(\mathbb{C})$), що $PA(x)Q = B(x)$ $(TA(x)T^{\nabla} = B(x))$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються строго еквівалентними (конгруентними).

Нехай $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}$ – деякий многочлен (зокрема, $f(x)$ вигляду (2)). Тоді позначатимемо через $\widetilde{f}(x)$ зворотний до $f(x)$ многочлен $\widetilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$.

Відомо [4], що якщо для матричного многочлена $A(x)$ є розклад $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x)$ – деякий сингулярний матричний многочлен, то $\widetilde{B}(x)\widetilde{C}(x) = \widetilde{A}(x)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\deg B(x) + \deg C(x) = \deg A(x).$$

Якщо остання умова на степені многочленів не виконується, то є доцільним введення поняття узагальнено зворотного многочлена. Позначатимемо через $\widetilde{\widetilde{f}}(x)$ узагальнено зворотний до $f(x)$ многочлен стосовновідносно r степеня $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{i+r}$, де $r \in \mathbb{N}$. Якщо $\deg f(x) = m$, то, очевидно, $\widetilde{f}(x) = x^m f(\frac{1}{x})$ і $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = x^{r+m} f(\frac{1}{x})$, $r \in \mathbb{N}$.

Легко бачити, що якщо матричний многочлен $A(x)$ оборотний над $\mathbb{C}[x]$, то $\widetilde{A}(x)$ і $\widetilde{\widetilde{A}}(x)$ – зворотний і узагальнено зворотний, відповідно, до $A(x)$ є регулярними матричними многочленами.

Позначимо через S_A форму Сміта матриці $A(x)$

$$S_A = P(x)A(x)Q(x). \tag{3}$$

Оскільки $\widetilde{\widetilde{A}}(x) = Ex^r \widetilde{A}(x)$, $r \in \mathbb{N}$, то легко переконатись у справедливості такого твердження.

Твердження. *Нехай форма Сміта матричного многочлена $\widetilde{A}(x)$ зворотного до $A(x)$ має вигляд $U(x)\widetilde{A}(x)V(x) = S_{\widetilde{A}}$. Тоді $U(x)\widetilde{\widetilde{A}}(x)V(x) = S_{\widetilde{\widetilde{A}}}$.*

Теорема 1. *Для симетричної матриці $A(x)$ правильна рівність*

$$R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = S_A, \tag{4}$$

де $R(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$, тоді і тільки тоді, коли для довільних оборотних матриць $P(x)$, $Q(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що задовольняють (3), виконується

$$\widetilde{\widetilde{P}}(x)^{\nabla} = \widetilde{R}(x)^{\nabla}\widetilde{S}(x)^{\nabla}, \quad \widetilde{\widetilde{Q}}(x) = \widetilde{R}(x)^{\nabla}\widetilde{T}(x) \tag{5}$$

і

$$S(x)S_A T(x) = S_A, \tag{6}$$

де матриці $\widetilde{\widetilde{P}}(x)$, $\widetilde{\widetilde{Q}}(x)$ – узагальнено зворотні, відповідно, до матриць $P(x)$, $Q(x)$, а матриці $\widetilde{R}(x)$, $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{T}(x)$ – зворотні, відповідно, до матриць $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$.

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай для матриці $A(x)$ виконуються (3), (4). Для матриць $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ існують матриці $S(x)$, $T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$P(x)^\nabla = R(x)^\nabla S(x)^\nabla, \quad Q(x) = R(x)^\nabla T(x). \tag{7}$$

Підставляючи співвідношення (7) в (3), і, зважаючи на (4), отримаємо

$$S_A = S(x)R(x)A(x)R(x)^\nabla T(x) = S(x)S_A T(x).$$

Розглянемо до матриць $P(x)^\nabla$, $Q(x)$ узагальнено зворотні стосовно $r = \deg R(x)^\nabla + \deg S(x)^\nabla$, $m = \deg R(x)^\nabla + \deg T(x)$, відповідно. Тоді із рівності (7) одержимо (5).

Д о с т а т н і с т ь. Нехай для оборотних матриць $P(x)$, $Q(x)$ з (3) виконуються співвідношення (5) і (6). Розглянемо до матриць $\widetilde{\widetilde{P}}(x)^\nabla$ і $\widetilde{\widetilde{Q}}(x)$ зворотні матриці. Тоді з (5) одержимо оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)^\nabla$, $Q(x)$, котрі після підстановки в (3) дадуть рівність

$$S(x)R(x)A(x)R(x)^\nabla T(x) = S_A. \tag{8}$$

Домножаючи рівність (8) зліва на матрицю $S(x)^{-1}$ і справа на $T(x)^{-1}$, і враховуючи (6), отримаємо $R(x)A(x)R(x)^\nabla = S_A$.

Теорему доведено.

Таким чином, що пошук перетворюючої матриці $R(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такої, що виконується (4), зводиться до питання про виділення спільного регулярного множника $\widetilde{R}(x)^\nabla$ із регулярних матричних многочленів $\widetilde{\widetilde{P}}(x)^\nabla$ і $\widetilde{\widetilde{Q}}(x)$.

Теорема 2. *Симетричний матричний многочлен $A(x)$ конгруентний своїй формі Сміта, тобто*

$$RA(x)R^\nabla = S_A, \tag{9}$$

де $R \in GL_n(\mathbb{C})$, тоді і тільки тоді, коли для довільних матриць $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ із (3) виконуються

$$\widetilde{P}(x)^\nabla = R^\nabla \widetilde{S}(x)^\nabla, \quad \widetilde{Q}(x) = R^\nabla \widetilde{T}(x) \tag{10}$$

і

$$S(x)S_A T(x) = S_A, \tag{11}$$

де матриці $\widetilde{P}(x)$, $\widetilde{Q}(x)$, $\widetilde{S}(x)$,$\widetilde{T}(x)$ – зворотні, відповідно, до матриць $P(x)$, $Q(x)$, $S(x)$, $T(x)$.

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Оскільки для $A(x)$ виконується (9), то для матриць $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ існують матриці $S(x)$, $T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$P(x)^\nabla = R^\nabla S(x)^\nabla, \quad Q(x) = R^\nabla T(x).$$

Розглянувши зворотні матричні многочлени до $P(x)^\nabla$ і $Q(x)$, легко бачити, що виконуються (10) і (11).

Доведення достатності повторює доведення достатності теореми 1.

Теорема 3. *Якщо еквівалентні матриці $A(x) = A(x)^{\nabla}$ і $B(x) = B(x)^{\nabla}$ симетрично еквівалентні до своїх форм Сміта S_A і S_B, відповідно, то вони симетрично еквівалентні.*

Доведення. Для матричних многочленів $A(x)$ і $B(x)$ існують матриці $T(x)$, $R(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$S_A = T(x)A(x)T(x)^{\nabla}, \quad S_B = R(x)B(x)R(x)^{\nabla}. \tag{12}$$

Оскільки матриці $A(x)$ і $B(x)$ – еквівалентні, тобто $S_A = S_B$, то із співвідношення (12) маємо $B(x) = S(x)A(x)S(x)^{\nabla}$, де $S(x) = R(x)^{-1}T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$. Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай для симетричного матричного многочлена $A(x)$ і його форми Сміта S_A справджуються факторизації*

$$A(x) = B(x)CB(x)^{\nabla}, \quad S_A = \Phi(x)I\Phi(x)^{\nabla},$$

де матриця $B(x)$ лівоеквівалентна до форми Сміта $S_B = \Phi(x)$, а $C = C^{\nabla} = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ – неособлива числова матриця з формою Сміта $S_C = I$. Тоді існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$ така, що $R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = S_A$.

Доведення. Нехай для матриці $A(x)$ існує факторизація, в якій $B(x)$ лівоеквівалентна до $S_B = \Phi(x)$, тобто існує матриця $S(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ така, що $B(x) = S(x)\Phi(x)$. Тоді

$$A(x) = S(x)\Phi(x)C\Phi(x)^{\nabla}S(x)^{\nabla}.$$

Відомо [1], що для матриці C маємо факторизацію вигляду $C = GIG^{\nabla}$, де G - неособлива числова матриця. Звідси, враховуючи $\Phi(x)G = G\Phi(x)$, маємо

$$A(x) = S(x)\Phi(x)GIG^{\nabla}\Phi(x)^{\nabla}S(x)^{\nabla} == S(x)G\Phi(x)I\Phi(x)^{\nabla}G^{\nabla}S(x)^{\nabla} = R(x)S_AR(x)^{\nabla},$$

де $R(x) = S(x)G \in GL_n(\mathbb{C}[x])$. Теорему доведено.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови існування факторизації вигляду (1) матриць, симетрично еквівалентних до своїх форм Сміта.

Теорема 5. *Для симетричної матриці $A(x)$, яка симетрично еквівалентна своїй формі Сміта S_A, існує факторизація (1), в якій $B(x)$ – унітальна матриця степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C(x) = C(x)^{\nabla}$ – неособлива матриця, тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця $V(\Phi)S_AV(\Phi)^{\nabla}$ одночасно ділиться зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^{\nabla}$ при деяких допустимих значеннях параметрів у матриці $V(\Phi)$, для яких виконується умова $\det M_{V(\Phi)R(x)||E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}||}(\Phi) \not\equiv 0$, де $R(x)$ – довільна оборотна матриця із співвідношення (4), а $V(\Phi)$, $M_{V(\Phi)R(x)||E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}||}(\Phi)$ – матриці визначені в праці [5].*

Доведення випливає з теореми 1 [6] і того, що матриця $A(x)$ симетрично еквівалентна до форми Сміта S_A.

Як наслідок, із теореми 5 випливає умова допустимої факторизації [7] таких матриць.

Наступні результати стосуються строгої еквівалентності та конгруентності матриць.

Теорема 6. *Якщо сингулярні симетричні матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$, корені характеристичних многочленів котрих відмінні від нуля, строго еквівалентні, то вони конгруентні.*

Доведення випливає з теореми 3 [2] і того, що $\widetilde{A}(x)$ і $\widetilde{B}(x)$ зворотні до $A(x)$ і $B(x)$, відповідно, є регулярними матричними многочленами.

Теорема 7. *Симетричні матричні двочлени* $A(x) = Ex^m - A$ *і* $B(x) = Ex^m - B$, *де* A, $B \in M_n(\mathbb{C})$, m *– парне число, є конгруентними, тоді і тільки тоді, коли матриці* A *і* B *є подібними.*

Легко бачити, що матричний двочлен $A(x) = Ex^m - A$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, m – парне число, є симетричним, тоді і тільки тоді, коли матриця A є ермітовою при інволюції (α) [1] і симетричною (в розумінні [8]) при інволюціях (β) і (γ), визначених у роботі [1].

Доведення. Необхідність. Нехай матричні двочлени $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = E^m - B$ є конгруентними, тобто існує така матриця $R \in GL_n(\mathbb{C})$, що

$$R(Ex^m - A)R^\nabla = Ex^m - B.$$

Прирівнюючи матричні коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо $RAR^\nabla = B$ і $RR^\nabla = E$. З останньої рівності видно, що у випадку інволюції (α) матриця R є унітарною, у випадку (β) і (γ) – R є ортогональною. Це і доводить подібність матриць A і B.

Достатність. Припустимо, що $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = Ex^m - B$ – симетричні матричні двочлени, в котрих матриці A і B – подібні. Існують такі матриці $U, V \in GL_n(\mathbb{C})$ (унітарні, ортогональні), що $A = UDU^\nabla$, $B = VDV^\nabla$, де $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, λ_i – власні значення матриці A і B.

Враховуючи останні співвідношення, одержимо

$$A(x) = Ex^m - A = U(Ex^m - D)U^\nabla = UV^{-1}(Ex^m - B)[V^\nabla]^{-1}U^\nabla = RB(x)R^\nabla,$$

де $R = UV^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$.

Теорему доведено.

1. Любачевский Б. Д. *Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. I*// Сибирск. мат. журн. – 1973. – Т. 14, N 2. – С.337-356.
2. Зеліско В. Р. *Припустима факторизація і еквівалентність симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією*// Алгебра і топологія. - К., 1993. - С. 53-62.
3. Икрамов Х. Д. Матричные пучки: Теория, приложения, числовые методы. Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ. - М., 1991. – Т. 29. - С. 3-106.
4. Зеліско В. Р. *Сингулярні дільники матричного иногочлена*// Вісник Львів. ун-ту, сер. мех-мат. – 1996. – Вип. 43. – С. 13-15.
5. Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. - К., Наук. думка, 1981. - 224 с.
6. Зеліско В. Р., Кучма М. І. *Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією*// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, N 4. – С.91-95.
7. Зеліско В. Р. *Допустимі факторизації регулярних симетричних матриць над кільцями многочленів і квазімногочленів з інволюцією*// Алгебра і топологія. Л., 1996. - С.94-103.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М., Наука, 1988. – 552 с.

Стаття надійшла до редколегії 24.09.98