УДК 519.48

РАДИКАЛЬНІ ФІЛЬТРИ В ДУО-КІЛЬЦЯХ НОРМУВАННЯ

І. Я. Тушницький

Tushnytskyi I. Ya. The radical filters in the rings of valuations. In this paper the results analogous to those obtained by W.Brandal and E.Barbut are obtained. Let R be a primary value duo-ring. For any primary ideal P of R we define $\mathfrak{F}(P) = \{I \text{ is an ideal of } R \ / \ I \not\subseteq P\}$. Then for any radical filter $\mathfrak{F}$ of R only two possibilities exist:
1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P)$ for some primary ideal P of R;
2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$ for some primary ideal P of R such that $P^2 = P$.
Similar results are obtained for all duo-ring of valuations.

У статті [1] описано всі радикальні фільтри в комутативних областях нормування. У даній праці досліджено радикальні фільтри в дуо-кільцях нормування, зокрема в первинних дуо-кільцях.

Всюди в праці R буде означати дуо-кільце з $1 \neq 0$. Нагадаємо, що дуо-кільцем називається асоціативне кільце, в якого кожний односторонній ідеал є двостороннім. Дуо-кільця досліджувались багатьма авторами і при цьому для означення даних кілець вживались різні терміни, наприклад, "під-комутативне", інваріантне тощо (див. [4]-[7]).

Кільце R називається кільцем нормування, коли для будь-яких двох ідеалів I і J кільця R є тільки дві можливості: $I \subseteq J$ або $J \subseteq I$.

Нехай X – довільна множина кільця R, а r – довільний елемент кільця R. Тоді через $X : r$ позначатимемо множину $\{t \in R \ / \ rt \in X\}$. Через $\mathrm{Id}(R)$ позначатимемо сім'ю всіх ідеалів кільця R, а через $\mathrm{spec}(R)$ – сім'ю всіх первинних ідеалів кільця R.

Радикальним фільтром кільця R називається непорожня сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів кільця R, котра задовольняє таким умовам:

$T1$. Якщо $I \in \mathfrak{F}$, J – ідеал кільця R і $I \subseteq J$, то $J \in \mathfrak{F}$.

$T2$. Якщо $I \in \mathfrak{F}$ і $J \in \mathfrak{F}$, то $I \cap J \in \mathfrak{F}$.

$T3$. Якщо $I \in \mathfrak{F}$ і $r \in R$, то $I : r \in \mathfrak{F}$.

$T4$. Якщо I – ідеал кільця R і $J \in \mathfrak{F}$, причому $I : j \in \mathfrak{F}$ для будь-якого $j \in J$, то $I \in \mathfrak{F}$, [2].

Через $\mathfrak{F}_J$ позначатимемо сім'ю ідеалів $\{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ I \supseteq J\}$. Нехай P – первинний ідеал кільця R. Тоді через $\mathfrak{F}(P)$ позначатимемо радикальний фільтр $\{I \ / \ I$ – ідеал кільця R і $I \not\subseteq$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18E40.

$P\}$. Нехай $\mathcal{P}$ – деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді $\mathfrak{F}(\mathcal{P})$ – радикальний фільтр $\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$, (див. [3]).

Для зручності посилань деякі добре відомі факти формулюємо у вигляді лем.

Лема 1. *Нехай R – кільце. Якщо $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R, то правильне твердження:*

$T2'$. З того, що $I \in \mathfrak{F}$, $J \in \mathfrak{F}$ випливає, що $IJ \in \mathfrak{F}$.

Лема 2. *Нехай R – кільце і J – ідеал кільця R. Якщо $\mathfrak{F}_J$ є радикальним фільтром кільця R, то виконується рівність $J^2 = J$.*

Доведення цих лем можна знайти в [3].

Лема 3. *Нехай R – кільце нормування і P – первинний ідеал кільця R. Тоді виконується рівність*

$$\mathfrak{F}(P) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P \subsetneqq I\}.$$

Доведення. Спочатку покажемо включення $\mathfrak{F}(P) \subseteq \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P \subsetneqq I\}$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(P)$. З співвідношення $J \not\subseteq P$ і з того, що кільце R є кільцем нормування, випливає включення $P \subseteq J$. Оскільки $J \not\subseteq P$, то $J \neq P$. Отже, з двох останніх співвідношень маємо, що $P \subsetneqq J$. Звідси, $J \in \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P \subsetneqq I\}$.

Тепер покажемо включення $\{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P \subsetneqq I\} \subseteq \mathfrak{F}(P)$. Якщо $J \in \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P \subsetneqq I\}$, то $P \subsetneqq J$. Таким чином, маємо, що $P \subseteq J$ і $P \neq J$. Треба показати, що $J \in \mathfrak{F}(P)$. Доведення будемо проводити від супротивного. Припустимо, що $J \notin \mathfrak{F}(P)$. Оскільки за означенням $\mathfrak{F}(P) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ I \subsetneqq P\}$ і $J \notin \mathfrak{F}(P)$, то маємо включення $J \subseteq P$, а, отже, і рівність $J = P$. Отримана суперечність показує, що $\{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P \subsetneqq I\} \subseteq \mathfrak{F}(P)$.

Лему доведено.

Лема 4. *Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді $\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$ – первинний ідеал кільця R.*

Доведення. Нехай $\mathcal{P}$ – деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Те, що $\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$ є ідеалом, очевидно. Покажемо, що він є первинним ідеалом кільця R. Нехай a і b – довільні елементи кільця R такі, що $aRb \subseteq \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$. Треба показати, що або $a \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, або $b \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$. Оскільки $aRb \subseteq \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то $aRb \subseteq P$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Ми повинні довести, що елемент a або елемент b належить кожному з ідеалів P з сім'ї $\mathcal{P}$. Доведення будемо проводити від супротивного. Припустимо, що жоден з елементів a і b не належить всім ідеалам із сім'ї $\mathcal{P}$. Нехай P_1 – ідеал, який належить $\mathcal{P}$, що не містить елемента a, а P_2 – ідеал, який належить $\mathcal{P}$, що не містить елемента b. Оскільки $aRb \in P_1$ і $a \notin P_1$, то згідно з первинністю ідеалу P_1 маємо, що $b \in P_1$. Оскільки $aRb \in P_2$ і $b \notin P_1$, то на підставі первинності ідеалу P_2 маємо, що $a \in P_1$. Оскільки кільце R є кільцем нормування, то для ідеалів P_1 і P_2 отримуємо, що або $P_1 \subseteq P_2$, або $P_2 \subseteq P_1$. Нехай $P_1 \subseteq P_2$. Тоді, оскільки $b \in P_1$, то $b \in P_2$. Це суперечить тому, що $b \notin P_2$. Аналогічно одержимо суперечність, коли $P_2 \subseteq P_1$. Таким чином, $a \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$ або $b \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, тобто ідеал $\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$ є первинним.

Лему доведено.

Нехай $\mathcal{P}$ – деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді через $N(\mathcal{P})$ позначимо множину $\bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$.

Лема 5. *Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – будь-яка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді множина $N(\mathcal{P})$ є первинним ідеалом кільця R.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – будь-яка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Покажемо, що множина $N(\mathcal{P})$ є первинним ідеалом кільця R.

Спочатку доведемо, що $N(\mathcal{P})$ є ідеалом кільця R. Нехай $x_1 \in N(\mathcal{P})$ і $x_2 \in N(\mathcal{P})$. Оскільки $x_1 \in N(\mathcal{P})$, то існує ідеал P_1 з сім'ї $\mathcal{P}$ такий, що $x_1 \in P_1$. Оскільки $x_2 \in N(\mathcal{P})$, то існує ідеал P_2 з сім'ї $\mathcal{P}$ такий, що $x_2 \in P_2$. З того, що кільце R є кільцем нормування випливає, що або $P_1 \subseteq P_2$, або $P_2 \subseteq P_1$ (для визначеності нехай $P_2 \subseteq P_1$). Тоді, оскільки $x_2 \in P_2$, то $x_2 \in P_1$. З того, що $x_1 \in P_1$ і $x_2 \in P_1$ випливає $x_1 + x_2 \in P_1$. Оскільки $P_1 \in \mathcal{P}$ і $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то $x_1 + x_2 \in N(\mathcal{P})$.

Далі, нехай маємо $x \in N(\mathcal{P})$ і $r \in R$. Оскільки $x \in N(\mathcal{P})$ і $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то існує ідеал P з сім'ї $\mathcal{P}$ такий, що $x \in P$. З умов $x \in P$ і $r \in R$ випливає, що $xr \in P$. Оскільки $P \in \mathcal{P}$, то отримуємо, що $xr \in N(\mathcal{P})$. Аналогічно доводиться, що множина $N(\mathcal{P})$ є замкненою відносно множення на елементи кільця R зліва.

Залишилось довести, що ідеал $N(\mathcal{P})$ є первинним. Нехай a і b – елементи кільця R такі, що $aRb \subseteq N(\mathcal{P})$. Покажемо, що або $a \in N(\mathcal{P})$, або $b \in N(\mathcal{P})$. Оскільки $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то існує такий ідеал P з сім'ї $\mathcal{P}$, що $aRb \subseteq P$. З того, що ідеал P – первинний, випливає $a \in P$ або $b \in P$. Оскільки $P \in \mathcal{P}$, то або $a \in N(\mathcal{P})$, або $b \in N(\mathcal{P})$.

Лему доведено.

Лема 6. *Нехай R – кільце нормування і P_1, P_2 – первинні ідеали кільця R. Тоді виконується така імплікація:*

$$P_1 \supseteq P_2. \Longrightarrow \mathfrak{F}(P_1) \subseteq \mathfrak{F}(P_2)$$

Доведення. Нехай R – кільце нормування і P_1, P_2 – первинні ідеали кільця R такі, що $P_1 \supseteq P_2$. Доведемо, що $\mathfrak{F}(P_1) \subseteq \mathfrak{F}(P_2)$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(P_1)$. Покажемо, що $J \in \mathfrak{F}(P_2)$. Оскільки, за лемою 3, $\mathfrak{F}(P_1) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P_1 \subsetneqq I\}$ і $J \in \mathfrak{F}(P_1)$, то маємо $P_1 \subsetneqq J$. З включень $P_2 \subseteq P_1$ і $P_1 \subsetneqq J$ випливає включення $P_2 \subsetneqq J$. За лемою 3 маємо, що $\mathfrak{F}(P_2) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P_2 \subsetneqq I\}$. Таким чином, $J \in \mathfrak{F}(P_2)$, що і потрібно було довести.

Лема 7. *Нехай R – кільце нормування, $\mathcal{P}$ – довільна підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R така, що $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$. Тоді виконується включення $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування, $\mathcal{P}$ – довільна підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Припустимо, що $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$. Тоді, оскільки $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то $N(\mathcal{P}) \supseteq P$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. За лемою 6 маємо включення $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(P)$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Звідси, отримаємо $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$. Оскільки $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$, то маємо включення $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Лему доведено.

Лема 8. *Нехай $\mathcal{P}$ – деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R така, що є включення $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$ і J – довільний ідеал кільця R. Тоді з того, що $P \subsetneqq J$ для будь-якого первинного ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$, випливає, що $N(\mathcal{P}) \subsetneqq J$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{P}$ – довільна підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R, причому $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$ і J – довільний ідеал кільця R такий, що виконується включення $P \subsetneqq J$ для будь-якого первинного ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Тоді з строгого включення $P \subsetneqq J$ для будь-якого $P \in \mathcal{P}$ випливає просте включення $P \subseteq J$ для будь-якого $P \in \mathcal{P}$. Оскільки $P \subseteq J$ для будь-якого $P \in \mathcal{P}$, то за означенням об'єднання маємо включення $\bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P \subseteq J$. Це означає, що маємо включення $N(\mathcal{P}) \subseteq J$. Тепер покажемо, що з нерівностей $P \neq J$ для будь-якого первинного ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$ випливає нерівність $N(\mathcal{P}) \neq J$. Доведення будемо проводити від супротивного. Нехай $P \neq J$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$ і $N(\mathcal{P}) = J$. Оскільки $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$, то отримуємо суперечність з тим, що $P \neq J$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Таким чином, маємо, що $N(\mathcal{P}) \neq J$. Оскільки $N(\mathcal{P}) \subseteq J$ і $N(\mathcal{P}) \neq J$, то отримуємо $N(\mathcal{P}) \subsetneqq J$. Лему доведено.

Лема 9. *Нехай R – первинне дуо-кільце і x – довільний необоротний ненульовий елемент кільця R. Тоді є включення*
$$x^{n+1}R \subsetneqq x^nR$$
для будь-якого натурального числа n.

Доведення. Нехай R – первинне кільце, x – довільний необоротній ненульовий елемент кільця R і n – будь-яке натуральне число. Покажемо спочатку включення $x^{n+1}R \subseteq x^nR$. Нехай $p \in x^{n+1}R$. Оскільки $p \in x^{n+1}R$, то існує елемент $u \in R$ такий, що $p = x^{n+1}u$. Тоді елемент p можна записати у вигляді $p = x^nu'$, де $u' = xu$. Оскільки $u' \in R$, то $p \in x^nR$.

Тепер доведемо, що $x^{n+1}R \neq x^nR$. Доведення будемо вести від супротивного. Нехай $x^{n+1}R = x^nR$. Тоді існує $t \in R$ таке, що виконується рівність $x^n = x^{n+1}t$, тобто $x^n - x^{n+1}t = 0$. Звідси, отримуємо рівність $x^n(1 - xt) = 0$. Оскільки елемент x – ненульовий і кільце R – первинне, то $x^n \neq 0$. Елемент x кільця R – необоротний, тому $1 - xt \neq 0$. Ми отримали, що $x^n \neq 0$ і $1 - xt \neq 0$, але $x^n(1 - xt) = 0$. Таким чином, в кільці R є дільники нуля. Оскільки R є дуо-кільцем, то ми отримуємор суперечність, що кільце R є первинним. Отже, припущення $x^{n+1}R = x^nR$ неправильне.

З того, що $x^{n+1}R \subseteq x^nR$ і $x^{n+1}R \neq x^nR$ випливає включення $x^{n+1}R \subsetneqq x^nR$, а це завершує доведення.

Лема 10. *Нехай R – первинне кільце і x – довільний необоротний елемент кільця R. Тоді множина $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$ – первинний ідеал кільця R.*

Доведення. Оскільки множини x^nR є ідеалами для довільного натурального числа n, то множина $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$ є ідеалом кільця R. Тепер доведемо, що ідеал $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$ – первинний. Нехай a і b – елементи кільця R такі, що $aRb \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$. Покажемо, що або $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$, або $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$. Оскільки $aRb \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$, то $ab \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$. Тому існує таке $r \in R$, що $ab = x^nr$. З цієї рівності випливає існування натуральних чисел m_n, l_n і елементів кільця R r_1, r_2 таких, що виконуються рівності: $m_n + l_n = n$, $a = x^{m_n}r_1$ і $b = x^{l_n}r_2$. Справді, $ab = x^{m_n}r_1x^{l_n}r_2$. Оскільки кільце R є дуо-кільцем, то існує такий елемент $r_1{}'$ кільця R, що правильна рівність $r_1x^{l_n} = x^{l_n}r_1{}'$. Звідси, $ab = x^{m_n}x^{l_n}r_1{}'r_2 = x^{m_n+l_n}r_1{}'r_2 = x^nr$, де $r = r_1{}'r_2$. Припустимо, що $a \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$. Тоді існує натуральне число s таке, що $m_n \leqslant s$

для будь-якого натурального числа n. За лемою 9 маємо, що

$$x^{n+1}R \subsetneqq x^n R$$

для будь-якого натурального числа n. Таким чином, ми довели імплікацію $n \to \infty \Rightarrow l_n \to \infty$. Це означає, що $b \in x^{l_n}R$, де l_n пробігає множину всіх натуральних чисел. Звідси маємо $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^{l_n}R$. Оскільки $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^{l_n}R = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^n R$, то $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^n R$. Лему доведено.

Лема 11. *Нехай R – кільце нормування, J – довільний ідеал кільця R, $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots \supseteq J_n \supseteq \ldots$ – спадна послідовність ідеалів кільця R така, що виконується включення $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subsetneqq J$. Тоді існує таке натуральне число n, що $J_n \subsetneqq J$.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування, J – довільний ідеал кільця R, $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots \supseteq J_n \supseteq \ldots$ – спадна послідовність ідеалів кільця R така, що виконується включення $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subsetneqq J$. Спочатку покажемо, що якщо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subseteq J$, то існує таке натуральне n_1, що $J_{n_1} \subseteq J$. Доведення будемо проводити від супротивного. Нехай $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subseteq J$ і для будь-якого натурального числа n маємо $J_n \nsubseteq J$. Тоді, оскільки R – кільце нормування то отримуємо, що для будь-якого натурального числа n: $J \subsetneqq J_n$. Звідси випливає $J \subsetneqq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$. Таким чином, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \nsubseteq J$. Отримали суперечність з тим, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subseteq J$.

Тепер покажемо, що якщо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \neq J$, то існує таке натуральне число n_2, що $J_{n_2} \neq J$. Доведення знову будемо проводити від супротивного. Нехай для будь-якого натурального n виконується рівність $J_n = J$. Тоді $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n = J$, що суперечить умові $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \neq J$.

Для завершення доведення леми за шукане натуральне число n достатньо взяти максимальне з чисел n_1 і n_2. Для такого n отримуємо $J_n \subsetneqq J$. Лему доведено.

Лема 12. *Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – будь-яка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді для радикального фільтру $\mathfrak{F}(\mathcal{P})$ або, якщо $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$, то $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$, або, якщо $N(\mathcal{P}) \notin \mathcal{P}$, то $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – будь-яка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Припустимо, що $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$. Тоді з леми 7 випливає включення $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Покажемо обернене включення $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Оскільки $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$, то $J \in \mathfrak{F}(P)$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Оскільки, за лемою 3, $\mathfrak{F}(P) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P \subsetneqq I\}$, то маємо включення $P \subsetneqq J$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Крім того, $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$, тому можна застосувати лему 8. З цієї леми випливає включення $N(\mathcal{P}) \subsetneqq J$. Оскільки, за лемою 3, $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ N(\mathcal{P}) \subsetneqq I\}$, то $J \in \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$. Таким чином, включення $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$ виконується. З включень $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$ і $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$ випливає рівність $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$.

Нехай тепер маємо $N(\mathcal{P}) \notin \mathcal{P}$. Тоді, оскільки є рівність $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P \in \mathcal{P}} P$, то отримуємо включення $P \subsetneqq N(\mathcal{P})$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Звідси, і з означення радикального фільтру $\mathfrak{F}(P)$, маємо $N(\mathcal{P}) \in \mathfrak{F}(P)$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Це означає, що є включення $N(\mathcal{P}) \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$. Оскільки $\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P) = \mathfrak{F}(\mathcal{P})$, то $N(\mathcal{P}) \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. За лемою 7, $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Звідси, отримуємо $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Тепер покажемо включення $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Тоді, оскільки $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$, то $J \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$. Звідси, маємо включення $J \in \mathfrak{F}(P)$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. За лемою 3, отримуємо строге включення $P \subsetneqq J$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї простих ідеалів $\mathcal{P}$. Тоді $\bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P \subseteq J$. Оскільки $\bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P = N(\mathcal{P})$, то з попереднього включення $N(\mathcal{P}) \subseteq J$. Можливі два випадки:

1) $N(\mathcal{P}) \subsetneqq J$;
2) $N(\mathcal{P}) = J$.

В першому випадку за лемою 3 маємо, що $J \in \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$; в другому маємо рівність $J = N(\mathcal{P})$. Звідси, отримуємо $J \in \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$. Таким чином, включення $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$ доведене. З включень $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$ і $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$ отримуємо рівність $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$. Лему доведено.

Наступна теорема узагальнює твердження 3.2 роботи [1].

Теорема 1. *Нехай R – первинне дуо-кільце нормування. Тоді сім'я ідеалів $\mathfrak{F}$ є радикальним фільтром кільця R тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з двох умов:*

1) існує первинний ідеал P кільця R такий, що виконується рівність $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P)$;

2) існує первинний ідеал P кільця R такий, що виконуються рівності $P^2 = P$ і $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$.

Доведення. Необхідність. Нехай сім'я ідеалів $\mathfrak{F}$ є радикальним фільтром кільця R. Покажемо, що він може бути лише одним з двох видів, виділених в теоремі. Визначимо $P = \bigcup\{P' \in \operatorname{spec}(R) \ / \ P' \subseteq \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I\}$. Таким чином, $P = N(\mathcal{P})$, де $\mathcal{P} = \{P' \in \operatorname{spec}(R) \ / \ P' \subseteq \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I\}$. За лемою 5, P є первинним ідеалом кільця R. Покажемо, що $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$. Нехай $J \in \mathfrak{F}$. Тоді з означення ідеалу P випливає включення $P \subseteq \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I$. Оскільки $J \in \mathfrak{F}$, то маємо $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \subseteq J$. З двох останніх включень випливає $P \subseteq J$. Це означає, що $J \in \mathfrak{F}(P)$ або $J = P$.

Тепер покажемо включення $\mathfrak{F}(P) \subseteq \mathfrak{F}$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(P)$. Треба довести, що $J \in \mathfrak{F}$. Оскільки, за лемою 3, $\mathfrak{F}(P) = \{I \in \operatorname{Id}(R) \ / \ P \subsetneqq I\}$, то $J \supsetneqq P$. Визначимо $P_1 = \bigcap\{P' \in \operatorname{spec}(R) \ / \ P' \supseteq J\}$. Якщо покласти $\mathcal{P} = \{P' \in \operatorname{spec}(R) \ / \ P' \supseteq J\}$, то, за лемою 4, маємо, що ідеал P_1 є первинним, оскільки $P_1 = \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$. Легко бачити, що $P_1 \supseteq J$. Оскільки $J \supsetneqq P$, то $P_1 \supsetneqq P$. Звідси випливає, що $P_1 \not\subseteq \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I$. Отже, існує такий ідеал $L \in \mathfrak{F}$, що $P_1 \not\subseteq L$. Оскільки R – кільце нормування, то з того, що $P_1 \not\subseteq L$ випливає $L \subsetneqq P_1$. Виберемо $x \in P_1 \backslash L$. Тоді $x \notin L$, тобто $xR \not\subseteq L$. Оскільки R – кільце нормування, то $L \subsetneqq xR$. З того, що $L \in \mathfrak{F}$ за аксіомою $T1$ з означення радикального фільтру $\mathfrak{F}$ випливає, що $xR \in \mathfrak{F}$. Нехай $P_2 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^n R$. Тоді, за лемою 10, P_2 є первинним ідеалом кільця R. З того, що $x \in P_1$ маємо $x^n \in P_1$, тобто $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^n R \subseteq P_1$. Звідси, $P_2 \subseteq P_1$. Оскільки $x \in P_1 \backslash L$, то включення є строге: $P_2 \subsetneqq P_1$. З того, що $P_1 = \bigcap\{P' \in \mathrm{spec}(R) \ / \ P' \supseteq J\}$ і $P_2 \subsetneqq P_1$, випливає $J \not\subseteq P_2$. Оскільки кільце R є кільцем нормування, то $P_2 \subsetneqq J$. Звідси, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^n R \subseteq J$. Послідовність ідеалів $xR \supseteq x^2 R \supseteq \cdots \supseteq x^n R \supseteq \ldots$ утворює спадний ланцюг. Звідси, за лемою 11, отримуємо існування такого натурального число n, що $x^n R \subsetneqq J$. Оскільки $xR \in \mathfrak{F}$ і $\mathfrak{F}$ є радикальним фільтром кільця R, то, за лемою 1, маємо $\underbrace{xR \cdot xR \cdot \ldots \cdot xR}_{n \text{ разів}} = x^n R \in \mathfrak{F}$. Зауважимо, що рівність $\underbrace{xR \cdot xR \cdot \ldots \cdot xR}_{n \text{ разів}} = x^n R$ випливає з того факту, що R є дуо-кільцем. Скористаємося знову тим, що $\mathfrak{F}$ є радикальним фільтром. Тоді з того, що $x^n R \subsetneqq J$, за аксіомою $T1$ для радикального фільтру $\mathfrak{F}$, маємо $J \in \mathfrak{F}$, що і потрібно було довести.

Ми довели, що $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$. Це означає, що для для радикального фільтру $\mathfrak{F}$ є тільки дві можливості: 1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P)$ або 2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$. У другому випадку, оскільки F є радикальним фільтром і $\mathfrak{F} = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P \subseteq I\}$, то за лемою 2 отримуємо $P^2 = P$.

Достатність. Те, що сім'я ідеалів $\mathfrak{F}(P)$ є радикальним фільтром для будь-якого первинного ідеалу P кільця R є очевидним. Сім'я ідеалів $\mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$ також є радикальним фільтром для кожного такого первинного ідеалу P кільця R, що $P^2 = P$. Це випливає з того, що $\mathfrak{F}(P) \cup \{P\} = \mathfrak{F}_P$, а сім'я ідеалів $\mathfrak{F}_J$ є радикальним фільтром кільця R для кожного такого ідеалу J кільця R, для котрого виконується рівність $J^2 = J$. Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай R – первинне кільце нормування. Тоді сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів кільця R є радикальним фільтром кільця R тоді і тільки тоді, коли існує деяка підсім'я $\mathcal{P}$ сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R така, що виконується рівність $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathcal{P})$.*

Доведення. Доведення цього твердження випливає з теореми 1 і леми 12.

Лема 13. *Нехай R – кільце нормування, $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R і J – ідеал кільця R такий, що є строге включення $J \supsetneqq \bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$. Тоді виконується включення $J \in \mathfrak{F}$.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування, $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R, J – ідеал кільця R і є включення $J \supsetneqq \bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$. З включення $J \supsetneqq \bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$ випливає, що $J \not\subseteq \bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$. Це підтверджує існування такого ідеалу $I \in \mathfrak{F}$, що $J \not\subseteq I$. Оскільки кільце R є кільцем нормування, то є включення $I \subsetneqq J$. З того, що $I \subsetneqq J$ і $I \in \mathfrak{F}$, за аксіомою $T1$ для радикального фільтру $\mathfrak{F}$ випливає $J \in \mathfrak{F}$. Лему доведено.

Наступна теорема описує будову радикальних фільтрів над довільним дуо-кільцем нормування.

Теорема 2. *Нехай R – дуо-кільце нормування. Тоді сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів кільця R є радикальним фільтром кільця R тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з двох умов:*

1) існує первинний ідеал P кільця R такий, що виконується рівність $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P)$;

2) існує ідеал J кільця R такий, що виконуються рівності $J^2 = J$ і $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_J$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R. Покажемо спочатку, що якщо $\bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I \notin \mathfrak{F}$, то $\bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$ є первинним ідеалом кільця R. Доведення будемо вести від супротивного. Припустимо, що $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I$ не є первинним ідеалом кільця R. Тоді існують ідеали J_1 і J_2 кільця R такі, що виконуються умови: $J_1 \supsetneqq \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I$, $J_2 \supsetneqq \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I$ і $J_1 J_2 = \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I$. Оскільки $J_1 \supsetneqq \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I$ і $J_2 \supsetneqq \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I$, то, за лемою 13, $J_1, J_2 \in \mathfrak{F}$. Тоді за лемою 1 $J_1 J_2 \in \mathfrak{F}$, а, отже, $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \in \mathfrak{F}$. Це суперечить умові, що $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \notin \mathfrak{F}$. Тепер покажемо, що $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I)$. Нехай $L \in \mathfrak{F}$. Тоді $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \subsetneqq L$. Справді, включення $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \subseteq L$ випливає з того, що $L \in \mathfrak{F}$. Нерівність $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \neq L$ випливає з того, що $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \notin \mathfrak{F}$. Нехай тепер $L \in \mathfrak{F}(\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I)$. Тоді, за лемою 3, $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \subsetneqq L$. Звідси за лемою 13 $L \in \mathfrak{F}$.

Якщо $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \in \mathfrak{F}$, то покладемо $J = \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I$. Покажемо, що $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_J$. Нехай $L \in \mathfrak{F}$. Тоді $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \subseteq L$, тобто $J \subseteq L$. Це означає, що $L \in \mathfrak{F}_J$. Нехай тепер $L \in \mathfrak{F}_J$. Тоді маємо включення $J \subseteq L$. Оскільки $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \in \mathfrak{F}$, то $J \in \mathfrak{F}$. Звідси і з того, що $J \subseteq L$, за аксіомою $T1$ для радикального фільтру $\mathfrak{F}$, випливає $L \in \mathfrak{F}$. Таким чином, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_J$. Оскільки $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R, то $\mathfrak{F}_J$ – радикальний фільтр кільця R. Звідси, за лемою 2, $J^2 = J$.

Достатність доводиться як і в теоремі 1.

Теорему доведено.

1. Brandal W., Barbut E. *Localizations of torsion theoris* // Pacific J. Math. – 1983. – Vol.107, N 1.– P.27–37.
2. Stenström B. Rings and modules of quotients. – Berlin - New York, Springer-Verlag, 1975.
3. Stenström B. *Rings of Quotients* // Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. – Berlin, Springer-Verlag. – 1975. – Vol. 217.
4. Brungs H.H., Törner G. *Chain Rings and Prime Ideals* // Arch. Math. – 1976. – Vol. 27, N 3. – P.253-260.
5. Thierrin G. *On duo rings* // Can. Math. Bull. - 1960. – Vol.3, N 2. – P.167-172.
6. Rooyen G. *On Subcommutative Rings* // Proc. Japan Acad. – Ser. A. – 1987. – Vol. 63, N 7. – P.268-271.
7. Latsis D., Garnier R. *Localization dans les anneaux duos* // C. R. Acad. Sc. – Ser. A. – 1976. – Vol. 282, N 24. – P.1403-1406.

Стаття надійшла до редколегії 08.05.98