УДК 515.544

# РОЗВ'ЯЗНІ ПЕРІОДИЧНІ ГРУПИ З МАЙЖЕ НІЛЬПОТЕНТНИМИ ВЛАСНИМИ ФАКТОР-ГРУПАМИ

О. В. Тураш

**Turash O. V. Periodic soluble groups with nilpotent-by-finite proper quotients.** Periodic soluble groups with nilpotent-by-finite proper quotients are characterized. We describe also periodic soluble groups such that all their proper quotients are (nilpotent with class $\leqslant c$)-by-finite.

## 0. Вступ.

Нехай $\mathcal{X}$ — абстрактний клас груп. Нескінченна розв'язна група $G$ називається $JN(\mathcal{X})$-групою, якщо сама група $G$ не є $\mathcal{X}$-групою, але всі її власні фактор-групи є $\mathcal{X}$-групами.

У цій праці ми характеризуємо нескінченні розв'язні періодичні групи з майже нільпотентними власними фактор-групами (скорочено періодичні $JN(NF)$-групи), а також нескінченні розв'язні періодичні групи, всі власні фактор-групи котрих є скінченними розширеннями нільпотентних груп класу нільпотентності $\leqslant c$ (скорочено періодичні $JN(N_cF)$-групи).

Всюди нижче: $p$ — просте число,
$G'$ — комутант групи $G$;
$\zeta_i G$ — $i$-й гіперцентр групи $G$;
$Z(G)$ — центр групи $G$;
$\gamma_i G$ — $i$-й централ групи $G$;
$|H|$ — порядок скінченної групи $H$.
Позначення стандартні і їх можна знайти, наприклад, в [1].

**1.** У цій частині охарактеризовані періодичні $JN(NF)$-групи.

**Лема 1.1.** *Нехай $G$ — $JN(NF)$-група. Тоді $G$ не містить неодиничних скінченних підгруп.*

*Доведення.* Від супротивного. Припустимо, що $G$ містить неодиничну скінченну нормальну підгрупу. Тоді група $G$ також містить підгрупу скінченного індексу $N$, котра є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної. З результату Ф. Холла [1, Ч. 1, ст. 117] випливає, що фактор-група $N/\zeta_i N$ скінченна для деякого додатного цілого $i$. Отже, $G$ — майже нільпотентна група, а це неможливо. Лему доведено.

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20E15, 20F18.

**Лема 1.2.** *Нехай $G$ — $JN(NF)$-група. Тоді підгрупа Фіттінга $A$ групи $G$ абелева без скруту або елементарна абелева $p$-група для деякого простого числа $p$.*

*Доведення.* Від супротивного. Нехай $N$ — нільпотентна неабелева нормальна підгрупа групи $G$. Тоді фактор-група $G/N'$ майже нільпотентна. Тому існує така підгрупа $P$ групи $G$ скінченного індексу, що фактор-група $P/N'$ — нільпотентна, а звідси за теоремою Ф.Холла [1, Ч. 1, ст. 117] випливає, що $P$ — нільпотентна. Отже, група $G$ сама майже нільпотентна, а це неможливо за умовою. Таким чином, кожна нільпотентна нормальна підгрупа групи $G$ абелева, і тому підгрупа Фіттінга $A$ також абелева.

Припустимо, що $A$ не є групою без скруту. Нехай $S$ — нижній шар її періодичної частини. Зрозуміло, що $S$ — елементарна абелева $p$-група для деякого $p$. Нехай $aS$ — деякий елемент із $(A/S) \cap Z(B/S)$ (тут $B$ така нормальна підгрупа скінченного індексу групи $G$, що $B/S$ — нільпотентна група і $A \leqslant B$). Тоді для кожного елемента $x$ підгрупи $B$

$$[a, x] \in T,$$

а отже,

$$1 = [a, x]^p = [a^p, x].$$

Центр $Z(B)$ підгрупи $B$ одиничний, оскільки в іншому випадку фактор-група $G/Z(B)$ майже нільпотентна і, як наслідок, $G$ також майже нільпотентна, а це суперечить умові. Тому $a^p = 1$, а, отже, $a \in T$ і підгрупа $(A/S) \cap Z(B/S)$ одинична. Таким чином, $A = S$. Лему доведено.

Надалі для спрощення будемо говорити, що $JN(NF)$-група $G$ має характеристику 0 (відповідно характеристику $p$), якщо її підгрупа Фіттінга $F(G)$ є група без скруту (відповідно $p$-група).

Нагадаємо, що група $A$ діє незвідно на групі $B$, якщо в $B$ не існує неодничних $A$-інваріантних підгруп. Група $A$ діє точно на групі $B$, якщо нейтральний елемент групи $B$ є єдиним нерухомим елементом стосовно цієї дії.

Модуль $A$ над групою $G$ називається політривіальним, якщо в $A$ існує ланцюг $G$-інваріантних підгруп скінченної довжини, фактори якого є тривіальними $G$-модулями.

**Лема 1.3.** *Нехай $G$ — $JN(NF)$-група, $A$ — її підгрупа Фіттінга. Тоді кожен неодиничний елемент із $B/A$ діє регулярно на $A$, де $B$ — така нормальна підгрупа скінченного індексу групи $G$, що фактор-група $B/A$ нільпотентна.*

*Доведення.* Нехай $xA$ — неодиничний елемент фактор-групи $B/A$. Відображення

$$\tau : A \longrightarrow A,$$

визначене за правилом $\tau(a) = [a, x]$, $\quad a \in A$, буде $G$-гомоморфізмом, а тому ядро $\operatorname{Ker}\tau$ і образ $\operatorname{Im}\tau$ нормальні підгрупи групи $G$. Припустимо, що ядро $\operatorname{Ker}\tau$ неодиничне. Тоді фактор-група $G/\operatorname{Ker}\tau$ майже нільпотентна, а значить, $G$ містить нормальну підгрупу $B_1$ скінченного індексу з нільпотентною фактор-групою $B_1/\operatorname{Ker}\tau$. Отже, $\operatorname{Im}\tau \cong A/\operatorname{Ker}\tau$ — політривіальний $B$-модуль. Зрозуміло, що $\operatorname{Im}\tau$ — неодинична підгрупа, оскільки $C_G(A) = A$. Таким чином, група $B/\operatorname{Im}\tau$ майже нільпотентна. Але в групі $G$ існує нормальна підгрупа $B_2$ скінченного індексу така, що $B_2/\operatorname{Im}\tau$ — нільпотентна група, а тому $B_2$ також нільпотентна, і, як наслідок, група $G$ майже нільпотентна, що суперечить умові. Отже, підгрупа $\operatorname{Ker}\tau$ одинична і це означає, що $x$ діє регулярно на $A$. Лему доведено.

**Лема 1.4.** *Нехай $G$ — $JN(NF)$-група характеристики $p$, $B$ — нормальна підгрупа $G$ скінченного індексу. Якщо $B$ містить підгрупу Фіттінга $F(G)$ групи $G$ і фактор-група $B/F(G)$ нільпотентна, то*

*(i) $B/F(G)$ не містить елементів порядку $p$;*

*(ii) підгрупа $F(G)$ виділяється в $B$ напівпрямим множником і $F(G)$ — мінімальна нормальна підгрупа групи $G$.*

*Доведення.* (1). Нехай $xF(G)$ — який-небудь елемент із $B/F(G)$, порядок котрого є степенем числа $p$. Оскільки $F(G)$ — елементарна абелева $p$-група, то нормальна підгрупа $< F(G), x >$ групи $B$ нільпотентна за теоремою Баумслага [2]. Але $F(G) = F(B)$, а тому $< F(G), x >= F(G)$. Отже, елемент $xF(G)$ одиничний.

(2). Нехай $zF(G)$ — який-небудь елемент простого порядку $q$ із $B/F(G)$, причому, $q \neq p$. З леми 1.3 випливає, що $z$ діє регулярно на $F(G)$, а тому централізатор $C_{F(G)}(z)$ одиничний. Отже,

$$F(G) = [F(G), z] \times C_{F(G)}(z) = [F(G), z] \qquad (*)$$

(див. [3, Лема 1]. Для кожної $G$-інваріантної підгрупи $N$ із $F(G)$ фактор-група $B/N$ майже нільпотентна. Тому існує підгрупа $B_1$ така, що фактор-група $B_1/N$ нільпотентна і $|B : B_1| < \infty$. Із (*) випливає, що $F(G) = [F(G), B_1]$ і $N = F(G)$. Оскільки фактор $B/F(G)$ нільпотентний, то за наслідком 1 [4] $F(G)$ виділяється в $B$ напівпрямим множником. Лему доведено.

**Теорема 1.5.** *Нехай $G$ — періодична група. Тоді $G$ — $JN(NF)$-група тоді і тільки, коли $G = L \rtimes A$, де $A$ — нескінченна елементарна абелева $p$-група, а $L$ - нескінченна група, котра містить нільпотентну підгрупу $B$ без елеметів порядку $p$ скінченного індексу, $B$ діє регулярно і незвідно на $A$.*

*Доведення.* Необхідність випливає з лем 1.2 і 1.4.

Доведемо достатність. Оскільки $A$ — мінімальна нормальна підгрупа групи $G$ і $C_G(A) = A$, то кожна власна фактор-група $G$ майже нільпотентна. Сама $G$ не є майже нільпотентною, оскільки $[L, A] \neq 1$.

**2.** У цій частині охарактеризуємо періодичні $JN(N_cF)$-групи. Надалі $c$ — додатне ціле число.

**Теорема 2.1.** *Нехай $G$ — періодична група, котра є скінченним розширенням нільпотентної групи класу $> c$. Група $G$ — $JN(N_cF)$-група тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*

*(i) існує нормальна нільпотентна підгрупа $N$ класу $> c$ скінченного індексу, центр $Z(N)$ котрої є локально циклічною $p$-групою;*

*(ii) $|\gamma_{c+1}N| = p$;*

*(iii) група $G$ не містить нормальних підгруп, перетин котрих з $N$ одиничний.*

*Доведення.* Необхідність. Оскільки група $G$ не містить двох неодиничних нормальних підгруп з одиничним перетином, то центр $Z(N)$ — локально циклічна $p$-група.

Припустимо, що підгрупа $\gamma_{c+2}(N)$ - неодинична. Оскільки фактор-група $G/\gamma_{c+2}N$ є скінченним розширенням нільпотентної групи класу $\leqslant c$, то фактор $N/N'$ скінченний, і крім того, клас нільпотентності $a$ комутанта $N'$ на одиницю менший, ніж клас нільпотентності підгрупи $N$. Якщо $a < c + 1$, то розглянемо $\gamma_2 N$ замість $N$. Міркуючи аналогічно, покажемо, що існує нормальна підгрупа $N$ скінченного індексу така, що $\gamma_{c+2}N$ одиничний. Отже, $\gamma_{c+1}N \leqslant Z(N)$.

Нехай $P$ — підгрупа порядку $p$ із центру $Z(N)$. Оскільки $G/P$ — скінченне розширення нільпотентної підгрупи $P_1$ класу нільпотентності $\leqslant c$, то $(P_1 \cap N)/P$ — нільпотентна група класу $\leqslant c$. Отже, $\gamma_{c+1}N = P$ і тому $\gamma_{c+1}N$ має порядок $p$.

Умова (iii) випливає з теореми Ремака [5, теор. 4.3.9].

Достатність. Оскільки група $G$ не містить нормальних підгруп, перетин котрих з підгрупою $N$ одиничний і $\gamma_{c+1}N \leqslant Z(N)$ мінімальна нормальна підгрупа $G$, то кожна власна фактор-група групи $G$ є скінченним розширенням нільпотентної групи класу $\leqslant c$. Сама ж група $G$ не є такою, оскільки підгрупа $N$ має клас нільпотентності $c+1$. Теорему доведено.

**Теорема 2.2.** *Нехай $G$ — періодична група, котра не містить нільпотентних підгруп скінченного індексу. Тоді наступні умови рівносильні:*

*(1) $G$ — $JN(N_cF)$-група;*

*(2) $G = L \rightthreetimes A$, де $A$ — нескінченна елементарна абелева $p$-група, а $L$ - нескінченна група, котра містить нільпотентну підгрупу $B$ без елеметів порядку $p$ скінченного індексу, $B$ діє регулярно і незвідно на $A$;*

*(3) $G$ — $JN(NF)$-група.*

*Доведення.* Це твердження випливає з теореми 1.5.


1. Robinson D. J. S. A course in the theory of group. – Springer, New York e.a., 1982.
2. Baumslag G. *Wreath products and p-groups* // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1959. – 55. – P.224-231.
3. Franciosi S., de Giovanni F. *On torsion groups with nilpotent automorphis groups* // Commut. Algebra. – 1986. – 14. – P.1909-1935.
4. Robinson D. J. S. *Spliting theorem for infinite group* // Symposia Math. – 1976. – 17. – P.441-470.
5. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. – М., Наука, 1977. – 240 с.


*Стаття надійшла до редколегії 13.07.98*