УДК 517.53

ДО АПРОКСИМАЦІЇ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Л. Я. Микитюк, М. М. Шеремета

Mykytyuk L. Ya., Sheremeta M. M. On the approximation of Dirichlet series by exponential polinomials. Approximation on vertical lines of absolutely convergent in the half-plane $\{s: \operatorname{Re} s < 0\}$ Dirichlet series with positive exponents is investigated.

1^0. Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, $D_0(\lambda)$ – клас рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

що мають абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$, а $\overline{D}_\beta(\lambda)$ – клас рядів Діріхле (1), для яких абсциса збіжності $\sigma_з = \alpha$ для деякого $\alpha > \beta$. Якщо в ряді (1) $a_n = 0$ при $n \geqslant k+1$ і $a_k \neq 0$, то функцію F називатимемо експоненціальним многочленом степеня k, а клас усіх експоненціальних многочленів, степінь яких не перевищує k, позначимо через $\Pi_k(\lambda)$.

Для $F \in \overline{D}_\beta(\lambda)$, як і в [1], покладемо $E_n(F,\beta) = \inf\{||F-P||_\beta : P \in \Pi_n(\lambda)\}$, де $||F-P||_\beta = \sup\{|F(\beta+it) - P(\beta+it)| : -\infty < t < +\infty\}$. В [1] доведено, що якщо послідовність λ має додатний крок, тобто $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$ для всіх $n \geqslant 1$, а $F \in \overline{D}_\beta(\lambda)$ при деякому $\beta < 0$, то для того, щоб $F \in D_0(\lambda)$, необхідно і досить, щоб

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{E_n(F,\beta)} = |\beta|. \tag{2}$$

Тут ми покажемо, що в наведеному вище твердженні умову додатності кроку послідовності показників можна замінити умовою $\ln n = o(\lambda_n), \quad n \to \infty$.

Теорема 1. *Нехай $\ln n = o(\lambda_n), \quad n \to \infty$, а $F \in \overline{D}_\beta(\lambda)$ при деякому $\beta < 0$. Тоді для того, щоб $F \in D_0(\lambda)$, необхідно і досить, щоб справджувалась рівність (2).*

В [1] для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності у термінах порядку вказаний також зв'язок між спаданням $E_n(F,\beta)$ та зростанням $M(\sigma,F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : -\infty < t < +\infty\}$. Ми дослідимо цей зв'язок в будь-якій шкалі зростання і в термінах максимального члена $\mu(\sigma,F) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 0\}$.

Через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty,0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty,0)$. Для $\Phi \in \Omega$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [2] функція Ψ є неперервною і зростаючою до 0 на $(-\infty,0)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Теорема 2. *Нехай $\beta < 0$, $\Phi \in \Omega(0)$, $\ln n = o(\lambda_n|\Psi(\varphi(\lambda_n))|)$, $n \to \infty$ і ряд Діріхле (1) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Тоді для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))\Phi((1 + o(1))\sigma), \quad \sigma \uparrow 0, \tag{3}$$

необхідно і досить, щоб

$$\ln \left(E_n(F, \beta)\, e^{|\beta|\lambda_{n+1}}\right) \leqslant (1 + o(1))\lambda_n|\Psi(\varphi((1 + o(1))\lambda_n))|, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

Наші доведення значно простіші, ніж наведені в [1].

2^0. Для доведення теорем будуть потрібні дві леми.

Лема 1. *Нехай $\sigma_p > -\infty$ – абсциса рівномірної збіжності ряду Діріхле (1) і $\beta < \sigma_p$. Тоді для всіх $n \geqslant 0$*

$$|a_{n+1}| \exp\{\beta\lambda_{n+1}\} \leqslant E_n(F, \beta), \quad n \to \infty, \tag{5}$$

Доведення. Оскільки для довільного $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp\{it\}dt = 0,$$

то для кожного експоненціального многочлена $P \in \Pi_k(\lambda)$ і довільних $\beta \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} P(\beta + it) \exp\{it\lambda_{n+1}\}dt = 0.$$

Покладемо

$$S_m(s) = \sum_{k=1}^{m} a_k \exp\{s\lambda_k\}.$$

Тоді для будь-яких натуральних чисел $n < m$ і довільного $P \in \Pi_k(\lambda)$ виконується рівність

$$a_{n+1} \exp\{\beta\lambda_{n+1}\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (S_m(\beta + it) - P(\beta + it)) \exp\{-it\lambda_{n+1}\}dt$$

і, отже,

$$|a_{n+1}| \exp\{\beta\lambda_{n+1}\} \leqslant ||S_m - P||_\beta.$$

Оскільки $\beta < \sigma_p$, то (S_m) рівномірно збігається до F у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s \leqslant \beta\}$. Тому $||S_m - P||_\beta \to ||F - P||_\beta$, $m \to \infty$, і отже, завдяки довільності m,

$$|a_{n+1}| \exp\{\beta\lambda_{n+1}\} \leqslant ||F - P||_\beta$$

для кожного експоненціального многочлена $P \in \Pi_k(\lambda)$. Звідси легко випливає потрібна нерівність.

Лема 2. *Якщо $\beta < \sigma_a$, то*

$$E_n(F, \beta) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\beta\lambda_k\}.$$

Доведення. Нехай $P = S_n$ – часткова сума ряду (1). Тоді

$$E_n(F,\beta) \leqslant ||F - S_n||_\beta \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\beta\lambda_k\}.$$

3^0. Справедливість теореми 1 ми отримаємо з дещо загальнішої теореми. Покладемо

$$R_*(F,\beta) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{E_n(F,\beta)}, \quad R^*(F,\beta) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{E_n(F,\beta)}$$

і

$$\sigma_*(F) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}, \quad \sigma^*(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}.$$

Теорема 3. *Нехай $\sigma_a > -\infty$. Тоді для кожного $\beta < \sigma_a$ виконуються нерівності $\sigma_a \leqslant R_*(F,\beta) + \beta \leqslant \sigma_*(F)$ і $\sigma_a \leqslant R^*(F,\beta) + \beta \leqslant \sigma^*(F)$.*

Доведення. Нехай $\sigma \in (\beta, \sigma_a)$. Тоді за лемою 2

$$E_n(F,\beta) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\beta\lambda_k\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} \exp\{(\beta-\sigma)\lambda_k\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{(\beta-\sigma)\lambda_{n+1}\} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} = M(\sigma)\exp\{(\beta-\sigma)\lambda_{n+1}\},$$

де, завдяки нерівності $\sigma < \sigma_a$,

$$M(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} < +\infty.$$

Звідси

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{E_n(F,\beta)} \leqslant \sigma - \beta + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{M(\sigma)},$$

тобто, завдяки довільності σ, легко отримуємо нерівності $\sigma_a - \beta \leqslant R_*(F,\beta) \leqslant R^*(F,\beta)$. Якщо ж використаємо лему 1, то дістанемо нерівності $R_*(F,\beta) \leqslant \sigma_*(F) - \beta$ і $R^*(F,\beta) \leqslant \sigma^*(F) - \beta$, що і завершує доведення теорема 3.

Якщо $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$, то [3, стор. 10] $\sigma_a = \sigma_*(F)$ і за теоремою 3, $R_*(F,\beta) = \sigma_a - \beta$, звідки легко випливає твердження теореми 1.

4^0. Для доведення теореми 2 припустимо, що

$$\ln \left(E_n(F,\beta)\, e^{|\beta|\lambda_{n+1}}\right) \leqslant -\lambda_{n+1}\Psi(\varphi(\lambda_{n+1})),\ n \geqslant n_0.$$

Тоді за лемою 1 $\ln |a_{n+1}| \leqslant -\lambda_{n+1}\Psi(\varphi(\lambda_{n+1})), n \geqslant n_0$. З іншого боку, якщо $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$, $n \geqslant n_0$, то, оскільки $(t\Psi(\varphi(t))' = \varphi(t)$, за лемою 2 для всіх досить великих

n маємо

$$E_n(F,\beta) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\{-\lambda_k \Psi(\varphi(\lambda_k)) + \beta\lambda_k\} = \int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \exp\{-t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t\} dn(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty} n(t) \exp\{-t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t\}(|\beta| + \varphi(t)) dt \leqslant$$

$$\leqslant |\beta| \int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \exp\{-t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t + \ln n(t)\} dt \leqslant |\beta| \int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t\} dt.$$

Але за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\beta| \int_x^{\infty} \exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t\} dt}{\exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(x)) - |\beta|x\}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-|\beta| \exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(x)) - |\beta|x\}}{\exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(x)) - |\beta|x\}(-|\beta| + \varphi(t))} = 1.$$

Тому

$$E_n(F,\beta) \leqslant (1+o(1)) \exp\{-(1+\varepsilon)\lambda_{n+1}\Psi(\varphi(\lambda_{n+1})) - |\beta| l_{n+1}\}, \quad n\to\infty.$$

Отже, ми, фактично, показали, що для того, щоб

$$\ln\left(E_n(F,\beta)\, e^{|\beta|\lambda_{n+1}}\right) \leqslant -(1+o(1))\lambda_{n+1}\Psi(\varphi((1+o(1))\lambda_{n+1})),\ n\to\infty,$$

необхідно і досить, щоб

$$\ln|a_n| \leqslant -(1+o(1))\lambda_n \Psi(\varphi((1+o(1))\lambda_n)),\ n\to\infty.$$

З іншого боку, відомо [2], що для того, щоб $\ln\mu(\sigma,F) \leqslant \Phi(\sigma)$, $\sigma \geqslant \sigma_0$, необхідно і досить, щоб $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$, $n\to\infty$.

З останніх двох тверджень легко отримуємо твердження теореми 2.

1. Nautiyal A., Shukla D. P. *On the approximation of an analytic function by exponential polynomials* // Indian J. pure appl. Math. – 1983. – Vol. 14, N 6. – P. 722-727.
2. Шеремета М. Н., Федыняк С. И. *О производной ряда Дирихле* // Сиб. мат. ж. – 1998. – Т 39, N 1.– С.206-223.
3. Леонтьев А. Ф. Ряды експонент. – М., Наука, 1976. – 536 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.98