УДК 517.537.72

# ОЦІНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДУ ДІРІХЛЕ ЗНИЗУ

О. М. Сумик

**Sumyk O. M. Estimates of the maximal term of Dirichlet series from below.** Sufficient conditions are established on the coefficients of Dirichlet series with positive increasing to $+\infty$ exponents, under which the logarithm of the maximal term is estimated from below by a pregiven convex function.

Нехай $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$, а ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$. Для $\sigma < A$ нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1). Через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій $\Phi$ таких, що похідна $\Phi'$ неперервна, додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, A)$. Нехай $\varphi$ – функція, обернена до $\Phi'$, а $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ – функція, асоційована з $\Phi$ за Ньютоном. Тоді функція $\varphi$ неперервна і зростає до $A$ на $(0, +\infty)$, а функція $\Psi$ неперервна і зростає до $A$ на $(-\infty, A)$ (див. [1]). В [1] доведено, що якщо $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 0$, то $\ln\mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma < A$. Тут ми розглянемо випадок, коли $\ln|a_n| \geqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 0$, і для $\ln\mu(\sigma, F)$ одержимо оцінки знизу. Вони залежать як від щільності показників ряду (1), так і від зростання функції $\Phi$.

Для $\Phi \in \Omega(A)$ і чисел $0 \leqslant a < +\infty$, $0 \leqslant b < +\infty$ покладемо

$$G_1(a, b; \Phi) = \frac{ab}{b-a} \int_a^b \Phi(\varphi(t)) \frac{dt}{t^2}, \quad G_2(a, b; \Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt\right).$$

Тоді [2] $G_1(a, b; \Phi) < G_2(a, b; \Phi)$, а безпосереднім наслідком теореми 3.1 з [3] є така теорема.

**Теорема A.** *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega(A)$, ряд Діріхле (1) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = A$ і $\ln|a_n| \geqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 0$. Тоді, якщо $\sigma \in [\varphi(\lambda_n), \varphi(\lambda_{n+1})]$, то*

$$\ln\mu(\sigma, F) \geqslant \Phi(\sigma) \frac{G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)}{G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)}. \tag{2}$$

Для того, щоб оцінити знизу вираз, що стоїть у правому боці (2), покладемо

$$G_{**}(x) = \frac{G_1(a, x; \Phi)}{G_2(a, x; \Phi)} \quad (x > a), \quad G^{**}(x) = \frac{G_1(x, b; \Phi)}{G_2(x, b; \Phi)} \quad (0 \leqslant x < b).$$

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

**Лема.** *Якщо функція $\Phi'$ неперервно диференційовна, то функція $G_{**}$ спадна на $(a, +\infty)$, а функція $G^{**}$ зростаюча на $[0, b)$.*

*Доведення.* Покладемо $G(x,y) = G_1(x,y;\Phi)/G_2(x,y;\Phi)$. Оскільки $G_j(a,b;\Phi) = G_j(b,a;\Phi)$ для всіх $a, b \in [0, +\infty)$ і $j = 1, 2$, то $G(x,y) = G(y,x)$ для $x, y \in [0, +\infty)$.

Елементарними перетвореннями встановлюємо, що

$$\frac{\partial G_1(y,x;\Phi)}{\partial x} = \frac{y}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)$$

і

$$\frac{\partial G_2(y,x;\Phi)}{\partial x} = \Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\frac{1}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right).$$

Тому

$$\frac{\partial G(y,x)}{\partial x} = \frac{\partial G_1(y,x;\Phi)}{\partial x}\frac{1}{G_2(y,x;\Phi)} - \frac{G_1(y,x;\Phi)}{G_2^2(y,x;\Phi)}\frac{\partial G_2(y,x;\Phi)}{\partial x} =$$
$$= \frac{1}{G_2^2(y,x;\Phi)}\left\{\frac{y}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\Phi\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) -\right.$$
$$-\frac{yx}{x-y}\int\limits_y^x \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt\,\Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\frac{1}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x) -\right.$$
$$\left.\left.-\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\right\} = \frac{1}{G_2^2(y,x;\Phi)}\frac{y}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)g(x,y),$$

де

$$g(x,y) = \Phi\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) - \frac{x}{x-y}\int\limits_y^x \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt\,\Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right),$$

а, з огляду на зростання функції $\varphi$,

$$(x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt > 0 \tag{3}$$

для всіх $x \neq y$.

Залишається дослідити функцію $g$. Оскільки функція $\Phi'$ неперервно диференційовна, то $\Phi'' \geqslant 0$ і, завдяки (3), маємо

$$g'_x(x,y) = \Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\frac{1}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) -$$
$$- \frac{1}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) -$$
$$- \frac{x}{x-y}\int\limits_y^x \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt\,\Phi''_{xx}\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\frac{1}{(x-y)^2}\,((x-y)\varphi(x) -$$
$$- \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) = -\frac{x}{(x-y)^3}\int\limits_y^x \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt\,\Phi''_{xx}\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) \times$$
$$\times \left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) < 0$$

для всіх $x \neq y$. Тому при фіксованому $y$ функція $g$ спадна на $[0, +\infty)$, і, оскільки $g(x,y) \to 0$ при $x \to y$, то $g(x,y) < 0$ для всіх $x > y$ та $g(x,y) > 0$ для всіх $0 \leqslant x < y$. Отже, $\dfrac{\partial G(y,x)}{\partial x} < 0$, якщо $y < x$ і $\dfrac{\partial G(y,x)}{\partial x} > 0$, якщо $y > x$. Звідси, і з симетричності функції $G$ отримуємо, що $G'_{**}(x) = \dfrac{\partial G(a,x)}{\partial x} < 0$ для всіх $x > a$ і тому функція $G_{**}$ спадає на $(a, +\infty)$, а $(G^{**})'(x) = \dfrac{\partial G(x,b)}{\partial x} > 0$ для всіх $0 \leqslant x < b$, тобто $G^{**}$ зростає на $[0, b)$. Лему повністю доведено.

Безпосередньо з леми випливає така теорема.

**Теорема B.** *Нехай функція $f$ додатна, неперервна, зростає до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ і $f(x) > x$. Якщо $\lambda_{n+1} \leqslant f(\lambda_n)$, то*

$$\frac{G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)}{G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)} \geqslant \frac{G_1(\lambda_n, f(\lambda_n); \Phi)}{G_2(\lambda_n, f(\lambda_n); \Phi)}$$

*і*

$$\frac{G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)}{G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)} \geqslant \frac{G_1(f^{-1}(\lambda_{n+1}), \lambda_{n+1}; \Phi)}{G_2(f^{-1}(\lambda_{n+1}), \lambda_{n+1}; \Phi)}.$$

Надалі будемо розглядати тільки випадок, коли $f(x) = Kx$, тобто $\lambda_{n+1} \leqslant K\lambda_n$ для всіх $n \geqslant 1$, де $K \equiv \text{const} > 1$. Функцію $\Phi$ виберемо так, щоб вона відповідала випадку скінченного R-порядку.

**Теорема 1.** *Якщо ряд Діріхле (1) цілий (тобто $A = +\infty$), $\lambda_{n+1} \leqslant\leqslant K\lambda_n, K > 1, (n \geqslant 1)$ і $\ln|a_n| \geqslant -\dfrac{\lambda_n}{\varrho}\ln\dfrac{\lambda_n}{eT\varrho}$, $0 < \varrho, T < +\infty$ для всіх $n \geqslant 0$, то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$*

$$\ln\mu(\sigma, F) \geqslant \frac{e\ln K}{(K-1)K^{1/(K-1)}}Te^{\varrho\sigma}. \tag{4}$$

*Доведення.* Виберемо $\Phi(\sigma) = Te^{\varrho\sigma}$. Тоді

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}, \quad \Psi(\sigma) = \sigma - \frac{1}{\varrho}, \quad x\Psi(\varphi(x)) = \frac{x}{\varrho}\ln\frac{x}{eT\varrho},$$

а

$$G_1(a,b;\Phi) = \frac{1}{\varrho}\frac{ab}{b-a}\ln\frac{b}{a}, \quad G_2(a,b;\Phi) = \frac{1}{e\varrho}\exp\left\{\frac{b\ln b - a\ln a}{b-a}\right\}.$$

Тому з нерівності (2), завдяки зростанню функції $G^{**}$, одержуємо

$$\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{Te^{\varrho\sigma}} \geqslant \frac{G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)}{G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)} \geqslant \frac{G_1(\lambda_{n+1}/K,\lambda_{n+1};\Phi)}{G_2(\lambda_{n+1}/K,\lambda_{n+1};\Phi)} =$$
$$= e\frac{\ln K}{K-1}\lambda_{n+1}\exp\left\{-\frac{K\ln\lambda_{n+1} - \ln(\lambda_{n+1}/K)}{K-1}\right\} = e\frac{\ln K}{K-1}K^{-1/(K-1)}, \tag{5}$$

тобто отримаємо (4).

**Зауваження.** Оцінка (4) неполіпшувана, бо нерівність (2) перетворюється у рівність при $\sigma = \dfrac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\varphi(t)\,dt$ (див.[3]), якщо $\ln|a_n| = -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 1$, а нерівність (5) перетворюється у рівність у випадку, коли $\lambda_{n+1} = K\lambda_n$ для всіх $n \geqslant 1$.

На завершення доведемо одну загальну теорему про оцінку максимального члена знизу.

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови теореми A, функція $\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ є незростаючою на $(-\infty, A)$ і $\lambda_{n+1} \leqslant K\lambda_n$ для всіх $n \geqslant 1$, $K \equiv const > 1$. Тоді для всіх $\sigma < A$*

$$\ln\mu(\sigma,F) \geqslant \frac{\ln K}{K-1}\Phi(\sigma). \tag{6}$$

*Доведення.* З огляду на незростання функції $\Phi(\varphi(t))/t$ маємо

$$\frac{G_1(\lambda_{n+1}/K,\lambda_{n+1};\Phi)}{G_2(\lambda_{n+1}/K,\lambda_{n+1};\Phi)} =$$
$$= \left\{\frac{\lambda_{n+1}}{K-1}\int\limits_{\lambda_{n+1}/K}^{\lambda_{n+1}}\frac{\Phi(\varphi(t))}{t}\frac{dt}{t}\right\}\Bigg/\Phi\left(\frac{K}{(K-1)\lambda_{n+1}}\int\limits_{\lambda_{n+1}/K}^{\lambda_{n+1}}\varphi(t)\,dt\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left\{\frac{\lambda_{n+1}}{K-1}\frac{\Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))}{\lambda_{n+1}}\int\limits_{\lambda_{n+1}/K}^{\lambda_{n+1}}\frac{dt}{t}\right\}\Bigg/\Phi\left(\frac{K\varphi(\lambda_{n+1})}{(K-1)\lambda_{n+1}}\int\limits_{\lambda_{n+1}/K}^{\lambda_{n+1}}dt\right) =$$
$$= \left\{\frac{\ln K}{K-1}\Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))\right\}/\Phi(\varphi(\lambda_{n+1})) = \frac{\ln K}{K-1}.$$

1. Шеремета М. Н., Федыняк С. И. *О производной ряда Дирихле* // Сиб. мат. ж. – 1998. – Т. 39, N 1. – С.206-223.

2. Заболоцький М. В., Шеремета М. М. *Узагальнення теореми Ліндельофа* // Укр. мат. ж. – 1998. – Т. 50, N 9. – С.1177-1192.

3. Шеремета М. М., Сумик О. М. *Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій* // Математичні студії. – 1999. – Т. 11, N 1. – С.41-47.

*Стаття надійшла до редколегії 24.11.98*