УДК 517.535

# АНАЛОГИ ТЕОРЕМИ БОРЕЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ДОДАТНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

О. М. Трусевич

**Trusevych O. M. Analogues of Borel's theorem for a class of positive functional series.** We obtain conditions for a regular convergent functional series $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n\}$ under which Borel's type relation

$$\ln F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad \sigma \to +\infty,$$

holds outside of a set, here $\mu(\sigma) = \max\{a_n \exp\{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n\} : n \geqslant 0\}$.

Відомо [1–3], що задача отримання оцінок зверху для досить широкого спектра функціональних рядів зводиться до подібної задачі для додатних збіжних при $\sigma \geqslant 0$ рядів вигляду

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n}, \tag{1}$$

де $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant n \to +\infty)$, $\beta_n \in \mathbb{R}_+$, $h(\sigma)$ — додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція. Власне, в [1] за виконання більш жорстких умов, ніж описувані в [2,3] умови, (котрі можна трактувати, як умови на $h(\sigma)$), узагальнюється поняття порядку росту рядів подібних до (1), а також встановлюються формули обчислення порядку через коефіцієнти $a_n$ і показники $\lambda_n$ і $\beta_n$ ряду. У [2,3] встановлюються умови справедливості при $\sigma \to +\infty$ зовні виняткових множин співвідношення

$$F(\sigma) = (1 + o(1))\mu(\sigma), \tag{2}$$

де $\mu(\sigma) = \max\{a_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n} : n \geqslant 0\}$ — максимальний член ряду (1).

При цьому в [2] вперше виявлено, що умови, достатні для того, щоб справджувалось співвідношення (2), можуть містити обмеження на швидкість зростання лише послідовності $(\lambda_n)$.

У цій замітці встановлено подібний з якісної точки зору факт, який стосується співвідношення типу Бореля

$$\ln F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma). \tag{3}$$

Справедлива така теорема.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

**Теорема.** *Нехай $h(\sigma)$ — неспадна, додатна, опукла, двічі неперервно диференційовна на $[0, +\infty)$ функція, а послідовності $(\lambda_n)$ і $(\beta_n)$ такі, як і вище. Якщо виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty, \tag{4}$$

*то співвідношення (3) справджується при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$), де $E$ — деяка множина скінченної міри.*

*Зауваження 1.* При $\beta_n = 0$ ($n \geqslant 0$) з теореми отримуємо основний результат із статті [4], встановлений для цілих рядів Діріхле.

*Доведення теореми.* Наслідуючи П. Розенблума [5], при фіксованому $\sigma \geqslant 0$ визначимо дискретну випадкову величину $X$ з розподілом ймовірностей

$$P\{X = \lambda_n + h'(\sigma)\beta_n\} = \frac{a_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n}}{F(\sigma)}.$$

Безпосередньо перевіряємо, що математичне сподівання $MX = g'(\sigma)$, а дисперсія $DX = g''(\sigma) - g_0(\sigma)$, де $g(\sigma) = \ln F(\sigma)$, а

$$g_0(\sigma) = \frac{h''(\sigma)}{F(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n}.$$

При фіксованому $\sigma \geqslant 0$ введемо $n_\sigma(t) \stackrel{def}{=} \sum_{\lambda_n + h'(\sigma)\beta_n \leqslant t} 1$. Зауважимо, що $n_\sigma(t) \leqslant n(t) \stackrel{def}{=} \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Застосовуючи нерівність Чебишова $P\{|X - MX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \dfrac{DX}{\varepsilon^2}$ з $\varepsilon = \sqrt{CDX}$, $C = C(\sigma) > 1$, отримуємо

$$F(\sigma) \leqslant \frac{C}{C-1} \sum_{|\lambda_n + \beta_n h'(\sigma) - g'(\sigma)| < p(\sigma)} a_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n},$$

де $p(\sigma) = \sqrt{C(g''(\sigma) - g_0(\sigma))}$. Звідси

$$F(\sigma) \leqslant \frac{C}{C-1}\mu(\sigma) n_\sigma(g'(\sigma) + p(\sigma)) \leqslant \frac{C}{C-1}\mu(\sigma) n(g'(\sigma) + p(\sigma)). \tag{5}$$

Відзначимо, що за умовою $h''(\sigma) \geqslant 0$, тому $g_0(\sigma) \geqslant 0$ і, отже,

$$p(\sigma) \leqslant \sqrt{Cg''(\sigma)}. \tag{6}$$

Зауважимо, що для довільної диференційовної, додатної, зростаючої на $[0, +\infty)$ функції $\tau(\sigma)$ множина

$$E(\tau) \stackrel{def}{=} \{\sigma \geqslant 0 : \tau'(\sigma) \geqslant \psi(\tau(\sigma))\}$$

має скінченну міру у випадку, якщо додатна функція $\psi(t)$ така, що

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty. \tag{7}$$

Справді,

$$\operatorname{meas} E(\tau) = \int_{E(\tau)} d\sigma \leqslant \int_{E(\tau)} \frac{\tau'(\sigma)}{\psi(\tau(\sigma))} d\sigma \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty.$$

Тому, при $\sigma \notin E \overset{def}{=} E(g) \cup E(g')$ одночасно виконуються нерівності

$$g'(\sigma) \leqslant \psi_1(g(\sigma)), \quad g''(\sigma) \leqslant \psi_2(g'(\sigma)) \tag{8}$$

для деяких функцій $\psi_j$, що задовольняють умову (7).

Зауважимо тепер (див. [4]), що умова (4) рівносильна збіжності інтегралу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt < +\infty,$$

звідки негайно отримуємо, що знайдеться зростаюча неперервна функція $\psi(t)$, для котрої одночасно виконується (7) та

$$\ln n(t) = o(\psi^{-1}(t)) \quad (t \to +\infty). \tag{9}$$

Оскільки, при $\psi_2(t) = t^{3/2} + 1$ і $C(\sigma) \leqslant (g'(\sigma))^{1/4}$ з (6) і (8) при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E)$ випливає

$$g'(\sigma) + p(\sigma) \leqslant (1 + o(1))g'(\sigma),$$

то з (5) і (9) за умови $C(\sigma) \to +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$ при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E)$ отримаємо

$$\ln F(\sigma) \leqslant \ln \frac{C}{C-1} + \ln \mu(\sigma) + \ln n(2g'(\sigma)) = \ln \mu(\sigma) + o\Big(\psi^{-1}(2g'(\sigma))\Big).$$

Вибираючи в (8) $\psi_1(x) = \frac{1}{2}\psi(x)$, негайно отримуємо справедливість твердження теореми.

Теорему доведено.


1. Осколков В. А. *О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами* // Матем. сб.– 1976.– Т.100, №2.– С.312–334.
2. Величко С. Д., Скасків О. Б. *Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів* // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.– 1989.– Вип. 32.– С.50–51.
3. Скасків О. Б., Трусевич О. М. *Максимальний член і сума регулярно збіжного функціонального ряду* // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.– 1998.– Вип. 49.– С.75–79.
4. Скаскив О. Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Матем. заметки.– 1985.– Т.37, №1.– С.41–47.
5. Rosenbloom P. C. *Probability and entire functions* // Stud. Math. Anal. Related Topics, Stanford: Calif. Univ. Press, 1962.– P.325–332.


*Стаття надійшла до редколегії 03.11.98*