УДК 517.53

АНАЛОГ ТЕОРЕМИ ХЕЙМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО l-ІНДЕКСУ

В. О. Кушнір

Kushnir V. O. An analogue of Hayman theorem for analytic functions of bounded l-index. Let G be an arbitrary complex domain, and l a positive continuous function in G such that

$$l(z) > \frac{\beta}{dist(z, \partial G)}, \quad z \in G, \tag{1}$$

where $\beta > 1$ is a constant. For $r \in [0, \beta]$ we define

$$\lambda_1(r) = \inf\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}$$

and

$$\lambda_2(r) = \sup\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}.$$

By $Q_\beta(G)$ we denote the class of positive continuous functions that in addition to (1) for all $r \in [0, \beta]$ satisfy the condition $0 < \lambda_1(r) \leqslant \lambda_2(r) < +\infty$. A criterion of boundedness of l-index for analytic function in an arbitrary complex domain is obtained.

Нехай G – довільна область із $\mathbb{C}$, f – аналітична в області G функція, яка має на $\partial\mathbb{G}$ принаймні одну особливу точку, а l – додатна неперервна в G функція така, що

$$l(z) > \frac{\beta}{dist(z, \partial G)}, \quad z \in G, \tag{1}$$

де $\beta > 1$ – фіксоване число. Функція f називається [1] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{2}$$

Найменше з таких чисел N називатимемо l-індексом і позначатимемо через $N(f; l)$. Якщо f – ціла функція, а l^* – довільна додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція, то для $l(z) = l^*(|z|)$ виконання умови (1) очевидне, а з (2) випливає означення цілої функції обмеженого l^*-індексу [2], звідки, в свою чергу, при $l^*(|z|) \equiv 1$ отримаємо класичне означення цілої функції обмеженого індексу [3]. У. Хейман [4] показав, що для того щоб ціла функція f

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D15.

© В. О. Кушнір, 1999

мала обмежений індекс, необхідно і досить, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$, $C > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність $|f^{(p+1)}(z)| \leqslant C \max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \leqslant k \leqslant p\}$. М. М. Шеремета [5] переніс теорему Хеймана на цілі функції обмеженого l^*-індексу.

Тут ми доведемо аналог теореми Хеймана для аналітичних в будь-якій області $G \subset \mathbb{C}$ функцій.

Для $r \in [0, \beta]$ покладемо

$$\lambda_1(r) = \inf \left\{ \frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G \right\}$$

і

$$\lambda_2(r) = \sup \left\{ \frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G \right\}.$$

Очевидно, що $\lambda_1(r) \leqslant 1 \leqslant \lambda_2(r)$. Клас додатних неперервних в G функцій l, котрі, крім (1), задовольняють умову $0 < \lambda_1(r) \leqslant \lambda_2(r) < +\infty$ для всіх $r \in [0, \beta]$, позначимо через $Q_\beta(G)$.

Зауважимо, що якщо $l \in Q_\beta(G)$ і $z_0 \in G$, то для всіх $r \in [0, \beta]$ з нерівності $|z - z_0| \leqslant \dfrac{r}{l(z_0)}$ випливають нерівності

$$\lambda_1(r) l(z_0) \leqslant l(z) \leqslant \lambda_2(r) l(z_0). \tag{3}$$

Аналогом теореми Хеймана є така теорема.

Теорема. *Нехай $\beta > 1$ і $l \in Q_\beta(G)$. Для того, щоб аналітична в G функція f мала обмежений l-індекс, необхідно і досить, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$, $C > 0$ такі, що для кожного $z \in G$ виконується нерівність*

$$\frac{|f^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}(z)} \leqslant C \max \left\{ \frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant p \right\}. \tag{4}$$

Доведення. Якщо f — аналітична в G функція обмеженого l-індексу, то з (2) при $p = N$ і $C = (N+1)!$ отримуємо (4), тобто необхідність умови (4) є очевидною.

Для доведення її достатності нам будуть потрібні дві леми.

Лема 1 [5]. *Нехай функції f_1 і f_2 аналітичні в області $G \in \mathbb{C}$, а $\gamma = (z = z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ - аналітична крива, що лежить в G. Тоді або $f_1(z(t)) \equiv f_2(z(t))$, або $f_1(z(t)) = f_2(z(t))$ тільки для скінченної кількості точок $t_k \in [0, T]$.*

Доведення наступної леми міститься в доведенні теореми 2 із [1].

Лема 2. *Нехай $\beta > 1$, $l \in Q_\beta$ і f - аналітична в області G функція. Якщо*

$$\max \left\{ |f(z)| : |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)} \right\} \leqslant$$
$$\leqslant P_1(\beta) \max \left\{ |f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{\beta l(z_0)} \right\}, \quad P_1(\beta) = \text{const},$$

то f має обмежений l-індекс.

Отже, нехай виконується (4), $z_0 \in G$ і $K = \left\{ z : |z - z_0| \leqslant \frac{\beta}{l(z_0)} \right\}$. Тоді, з огляду на умову (1), $K \subset G$, а завдяки (3), для кожного $z \in K$ виконується

$$\begin{aligned} \frac{|f^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}(z_0)} &\leqslant \lambda_2^{p+1}(\beta) \frac{|f^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}(z)} \leqslant \\ &\leqslant C\lambda_2^{p+1}(\beta) \max \left\{ \frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant p \right\} \leqslant \\ &\leqslant C\lambda_2^{p+1}(\beta) \max \left\{ \lambda_1^{-k}(\beta) \frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z_0)} : 0 \leqslant k \leqslant p \right\} \leqslant B\, g(z), \end{aligned} \tag{5}$$

де $B = C\lambda_2^{p+1}(\beta)\lambda_1^p(\beta)$ і $g(z) = \max \left\{ \frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z_0)} : 0 \leqslant k \leqslant p \right\}$. Позначимо

$$\gamma_1 = \left\{ z : |z - z_0| = \frac{1}{2\beta l(z_0)} \right\}, \quad \gamma_2 = \left\{ z : |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)} \right\}.$$

Виберемо довільним чином точки $z_1 \in \gamma_1$, $z_2 \in \gamma_2$ і з'єднаємо їх кусково аналітичною кривою $\gamma = (z = z(t), 0 \leqslant t \leqslant T)$, що лежить в K і на котрій $g(z) \neq 0$. Вибираємо γ так, щоб її довжина $|\gamma|$ не перевищувала $(2\beta^2 - 1)/(\beta l(z_0))$. Зрозуміло, що функція $g(z(t))$ неперервна на $[0, T]$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що функція $z = z(t)$ аналітична на $[0, T]$. Покажемо, що $g(z(t))$ неперервно диференційовна на $[0, T]$ за винятком, можливо, скінченної кількості точок. За лемою 1 для довільних k_1, k_2, $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant p$, або $\frac{|f^{(k_1)}(z(t))|}{l^{k_1}(z_0)} \equiv \frac{|f^{(k_2)}(z(t))|}{l^{k_2}(z_0)}$, або рівність $\frac{|f^{(k_1)}(z(t))|}{l^{k_1}(z_0)} = \frac{|f^{(k_2)}(z(t))|}{l^{k_2}(z_0)}$, можлива тільки для скінченної кількості точок $t_k \in [0, T]$. Отже, проміжок $[0, T]$ можна розбити на скінченну кількість відрізків, на кожному з котрих $g(z(t)) \equiv \frac{|f^{(k)}(z(t))|}{l^k(z_0)}$ при деякому k, $0 \leqslant k \leqslant p$. Тобто $g(z(t))$ неперервно диференційовна, за винятком скінченної кількості точок, і з огляду на (5) маємо

$$\begin{aligned} \frac{dg(z(t))}{dt} &\leqslant \max \left\{ \frac{d}{dt} |f^{(k)}(z(t))| / l^k(z_0) : 0 \leqslant k \leqslant p \right\} \leqslant \\ &\leqslant \max \left\{ \frac{|f^{(k+1)}(z(t))||z'(t)|}{l^k(z_0)} : 0 \leqslant k \leqslant p \right\} = \\ = l(z_0)|z'(t)| &\max \left\{ \frac{|f^{(k+1)}(z(t))|}{l^{k+1}(z_0)} : 0 \leqslant k \leqslant p \right\} \leqslant B\, g(z(t))|z'(t)|l(z_0). \end{aligned}$$

Тому

$$\left| \ln \frac{g(z_2)}{g(z_1)} \right| = \left| \int\limits_0^T \frac{dg(z(t))}{g(z(t))} \right| \leqslant Bl(z_0) \int\limits_0^T |z'(t)|dt = Bl(z_0)|\gamma| \leqslant B \frac{2\beta^2 - 1}{\beta}.$$

Якщо точку $z_2 \in \gamma_2$ вибрати так, щоб $|f(z_2)| = \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)}\right\}$, то звідси маємо

$$\max\left\{|f(z)| \ : \ |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)}\right\} \leqslant g(z_2) \leqslant g(z_1)\exp\{2B\frac{\beta^2 - 1}{\beta}\}. \tag{6}$$

Оскільки $z_1 \in \gamma_1$, то для всіх $j = \overline{1,p}$ згідно з нерівністю Коші маємо

$$\frac{|f^{(j)}(z_1)|}{l^j(z_0)} \leqslant j!(2\beta)^j \max\left\{|f(z)| : |z - z_1| = \frac{1}{2\beta l(z_0)}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant j!(2\beta)^j \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{\beta l(z_0)}\right\},$$

тобто

$$g(z_1) \leqslant p!(2\beta)^p \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{\beta l(z_0)}\right\}.$$

Тому з (6)

$$|f(z_2)| = \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)}\right\} \leqslant g(z_2) \leqslant$$
$$\leqslant g(z_1)\exp\{2B\frac{\beta^2 - 1}{\beta}\} \leqslant$$
$$\leqslant p!(2\beta)^p \exp\{2B\frac{\beta^2 - 1}{\beta}\} \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{\beta l(z_0)}\right\},$$

і за лемою 2 f є функцією обмеженого l - індексу. Теорему доведено.

1. Кушнір В. О., Шеремета М.М. Аналітичні функції обмеженого l-індексу // Мат. студії (в друці).
2. Кузык А. Д., Шеремета М. Н. *Целые функции ограниченного l-распределения значений* // Мат. заметки. – 1986. – 39, N 1. – С.3 - 13.
3. Lepson B. *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index*// Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math Soc., Providence. – 1968. – 11. – P.298 - 307.
4. Hayman W. K. *Differential inequalities and local valency*// Pacif. J. Math. – 1973. – Vol. 44. – P. 117-137.
5. Шеремета М. Н. *О целых функциях и рядах Дирихле ограниченного l-индекса*// Известия вузов. Матем. – 1992. – N 9. – С.81-87.

Стаття надійшла до редколегії 27.01.99