УДК 517.547.3

ІНТЕГРАЛЬНІ СЕРЕДНІ ЛОГАРИФМІВ ДОБУТКІВ БЛЯШКЕ

Я. В. Васильків, А. А. Кондратюк

Vasyl'kiv Ya. V., Kondratyuk A. A. Integral means of Blaschke product logarithms. Criteria for the boundedness of q-th integral means ($1 < q < +\infty$) of the Blaschke product logarithms with zeros concentrated on a finite system of rays are established.

Нехай $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\{a_\nu\}$ — послідовність відмінних від нуля точок з $\mathbb{D}$ таких, що

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}(1-|a_\nu|) < +\infty, \tag{1}$$

а

$$B(z) = \prod_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\bar{a}_\nu}{|a_\nu|}\frac{a_\nu - z}{1-\bar{a}_\nu z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

— добуток Бляшке з нулями в точках a_ν. Через $\mathbb{D}^*$ позначимо область $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty}[a_\nu, a_\nu/|a_\nu|)$. Розглянемо функцію

$$\log B(z) = \log B(0) + \int_0^z \frac{B'(\xi)}{B(\xi)}d\xi, \quad z \in \mathbb{D}^*,$$

де інтеграл береться по відрізку $[0, z]$,

$$\log B(0) = \log|B(0)| = \sum_{\nu=1}^{+\infty}\log|a_\nu| = \int_0^1 \log t\, dn(t, B), \tag{2}$$

$n(t, B)$ — кількість нулів функції $B(z)$ в крузі радіуса $0 < t < 1$.

З умови Бляшке (1) випливає [1, с. 51], що

$$\lim_{t\to 1}\log t\, n(t, B) = \lim_{t\to 1}(1-t)n(t, B) = 0.$$

Тоді, інтегруючи в (2) частинами, одержимо

$$\log B(0) = -\int_0^1 n(t, B)t^{-1}\, dt.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D50.

Нехай також

$$m_q(r, \log B) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|\log B\left(re^{i\theta}\right)\right|^q d\theta \right\}^{1/q}, \ 1 \leqslant q < +\infty, \ 0 < r < 1,$$

— інтегральні середні логарифма добутку Бляшке.

А. Зігмунд (див. в [2]) поставив таку задачу: описати такі послідовності нулів $\{a_\nu\}$, що функція $m_2(r, u)$, $u = \log|B|$, обмежена на $(0, 1)$.

Використовуючи метод рядів Фур'є для аналітичних функцій [3–5], цю задачу частково розв'язали в 1969 р. Г. Р. МакЛейн та Л. А. Рубел [2]. Зокрема, вони встановили, що для обмеженості функцій $m_2(r, u)$ на $(0, 1)$ досить, а у випадку, коли нулі добутку Бляшке $B(z)$ зосереджені на скінченній системі променів і необхідно, щоб $n(r, B) = O\left((1-r)^{-1/2}\right), \ r \to 1$.

Деякі результати, що характеризують поведінку q–тих інтегральних середніх ($1 \leqslant q < +\infty$) логарифма модуля добутків Бляшке та Цудзі—Джрбашяна були отримані К. Лінденом [6–8]. Недавно А. А. Кондратюк та В. В. Єйко [9,10] показали, що для довільного $q \in [1, +\infty)$ знайдеться стала $M_1(q) > 0$ така, що

$$(1-r)^{1/q'} m_q(r, u) \leqslant M_1(q) \int\limits_r^1 n(t, B) t^{-1} dt, \ \ 0 < r < 1, \ \ 1/q + 1/q' = 1, \tag{3}$$

а для добутків Бляшке $B(z)$ з додатними нулями такими, що

$$n(r, B)(1-r) \leqslant \beta \int\limits_r^1 n(t, B) dt, \ \ 0 < r < 1, \tag{4}$$

де $\beta \in (0, 1)$ — деяка додатна стала, при деякому $M_2(q) > 0$ є правильна обернена нерівність

$$m_q(r, u)(1-r)^{1/q'} \geqslant M_2(q) \int\limits_r^1 n(t, B) t^{-1} dt, \ 0 < r < 1, \ 1 < q < +\infty.$$

При цьому показано [10], що умову (4) відкинути не можна. Окрім того, вони встановили, що для обмеженості на $(0, 1)$ інтегральних середніх $m_q(r, u)$, $u = \log|B|$, $1 < q \leqslant 2$, добутків Бляшке $B(z)$ з додатними нулями необхідно і досить, щоб

$$n(r, B) = O\left((1-r)^{-1/q}\right), \ \ r \to 1.$$

Інтегральні середні логарифма добутку Бляшке характеризуються такими теоремами.

Теорема 1. *Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке. Тоді для довільного $1 < q < +\infty$ знайдеться стала $M_3(q) > 0$ така, що при $r \to 1$*

$$m_q(r, \log B) \leqslant M_3(q) \int\limits_0^1 (1-t)^{-1/q'} n(rt, B) t^{-1} dt, \ \ 1/q + 1/q' = 1. \tag{5}$$

Теорема 2. *Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке, нулі якого зосереджені на скінченній системі k променів. Тоді для довільного $1 < q < +\infty$ знайдеться стала $M_4(q) > 0$ така, що при $r \to 1$*

$$m_q(r, \log B) \geqslant M_4(q) k^{-1} \int_0^r (1-t)^{-1/q'} n(t, B) dt, \ 1/q + 1/q' = 1. \tag{6}$$

Наслідок 1. *Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке, нулі якого зосереджені на скінченній системі променів, $1 < q < +\infty$. Тоді умова*

$$\int_0^1 n(t, B)(1-t)^{-1/q'} dt < +\infty, \quad 1/q + 1/q' = 1,$$

є необхідною і достатньою для обмеженості функцій $m_q(r, \log B)$ при $r \to 1$.

Наслідок 2. *Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке.*
а) Якщо $1 < q < +\infty$,

$$n(r, B) = O\left((1-r)^{-1/q} l(r)\right), \quad r \to 1, \tag{7}$$

де $l(r)$ — деяка додатна на $(0, 1)$ функція така, що

$$\int_0^1 (1-t)^{-1} l(t) dt < +\infty, \tag{8}$$

то

$$m_q(r, \log B) = O(1), \quad r \to 1. \tag{9}$$

б) Навпаки, нехай для добутку $B(z)$ з нулями на скінченній системі променів виконується (9), $1 < q < +\infty$. Тоді знайдеться додатна функція $l(t) = l_q(t)$ така, що $\lim\limits_{t \to 1} l(t) = 0$, виконується (8) і, при цьому, є правильною (7).

Наслідок 3. *Нехай*

$$n(r, B) = O\left((1-r)^{-\alpha}\right), \ r \to 1, \ 0 < \alpha \leqslant \alpha_0. \tag{10}$$

а) Якщо $\alpha_0 < 1/q$, $1 < q < +\infty$, то виконується (9).
б) Якщо ж $\alpha_0 \geqslant 1/q$, $1 < q < +\infty$, то існують добутки Бляшке $B(z)$, для яких виконується (10) і $\lim\limits_{r \to 1} m_q(r, \log B) = +\infty$.

Для доведення теорем 1 та 2 нам будуть потрібні такі результати.

Нехай X простір з σ–скінченною мірою $\lambda \geqslant 0$. Через $L^q(\lambda)$ $(1 \leqslant q < +\infty)$ позначимо простір, інтегровних в q–ому степені числових функцій f змінної $x \in X$ стосовно міри λ. Для функції $f \in L^q(\lambda)$ $(1 \leqslant q < +\infty)$ через

$$\|f\|_{L^q(\lambda)} = \left(\int_X |f(x)|^q d\lambda\right)^{1/q}$$

позначимо її норму. Зокрема, якщо $X = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$ і $d\lambda = \frac{d\theta}{2\pi}$, то будемо вживати позначення $f \in L^q$ та

$$\|f\|_q = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^q d\theta \right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < +\infty,$$

а також

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Окрім того, для функції $f \in L^1$ через $\tilde{f}(e^{i\theta}) = (H * f)(e^{i\theta})$ позначимо згортку розподілу Гільберта

$$H = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -i \operatorname{sign} k \, e^{ik\psi}, \quad \psi \in [0, 2\pi], \quad \operatorname{sign} 0 = 0,$$

з функцією $f(e^{i\theta})$. Тобто

$$c_k(\tilde{f}) = -i \operatorname{sign} k \, c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{sign} 0 = 0. \tag{11}$$

Теорема М. Рісса *[11, с. 239]. Якщо $f \in L^q$, то $\tilde{f} \in L^q$ і*

$$\|\tilde{f}\|_q \leqslant M_5(q) \|f\|_q, \qquad 1 < q < +\infty,$$

де $M_5(q) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2q}$, якщо $1 < q \leqslant 2$ і $M_5(q) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q}$, якщо $2 \leqslant q < +\infty$.

Інтегральна нерівність Мінковського *[12, с. 24]. Якщо λ і ω — дві σ-скінченні міри, $1 \leqslant q < +\infty$ і $f(x,t)$ $\omega \times \lambda$ — вимірна, то*

$$\left\| \int\limits_X f(x,t) \, d\omega \right\|_{L^q(\lambda)} \leqslant \int\limits_X \|f(x,t)\|_{L^q(\lambda)} d\omega.$$

Ця стаття є повним викладом та уточненням результатів, анонсованих в [13].

Доведення теореми 1. Для кожного фіксованого $r \in (0,1)$ через $\tilde{u}\left(re^{i\theta}\right) = \left(H * u\right)\left(re^{i\theta}\right)$ позначимо згортку розподілу Гільберта з функцією $u\left(re^{i\theta}\right) = \log\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|$. Нехай також

$$p(z) = \int\limits_0^r \frac{dt}{t} \int\limits_{|a| \leqslant t} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta - \varphi)}\right) d\mu, \tag{12}$$

$z = re^{i\theta}$, $a = |a|e^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, де $\mathcal{P}(r,w) = \operatorname{Re}\left((r+w)(r-w)^{-1}\right)$ — ядро Пуасона, $\mu = \sum_\nu \delta(a - a_\nu)$, $\delta(\xi)$ — міра Дірака. Коефіцієнти Фур'є функцій $\log B(re^{i\theta})$ та $u(re^{i\theta})$ будемо позначати через $c_k(r, \log B)$ та $c_k(r, u)$ відповідно.

Згідно з [14]

$$\begin{aligned}
&c_0(r,\log B) = c_0(r,u),\\
&c_k(r,\log B) = \gamma_k r^k + \int_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t,B)}{t}dt, \quad k\in\mathbb{N},\\
&c_{-k}(r,\log B) = \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_{-k}(t,B)}{t}dt, \qquad k\in\mathbb{N},
\end{aligned} \tag{13}$$

де γ_k визначаються з розвинення

$$\log B(z) = \log B(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k z^k$$

в деякому околі точки $z = 0$,

$$n_k(r,B) = \int_{|a|\leqslant r} e^{-ik\varphi}d\mu, \qquad k\in\mathbb{Z}, \qquad n_0(r,B) = n(r,B).$$

Окрім того [2],

$$\begin{aligned}
&c_0(r,u) = -\int_r^1 n(t,B)\frac{dt}{t},\\
&c_k(r,u) = \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{1}{2}\int_0^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k + \left(\frac{t}{r}\right)^k\right]\frac{n_k(t,B)}{t}dt, \quad k\in\mathbb{N},\\
&c_{-k}(r,u) = \bar{c}_k(r,u), \qquad k\in\mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Враховуючи співвідношення (12), а також розвинення

$$\mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} e^{ik(\theta-\varphi)},$$

знаходимо

$$\begin{aligned}
c_k(r,p) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right)e^{-ik\theta}d\theta = \int_0^r \frac{dt}{t}\int_{|a|\leqslant t}\left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} e^{-ik\varphi}d\mu =\\
&= \int_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|}\frac{n_k(t,B)}{t}dt, \qquad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Співвідношення (11),(13) — (15) приводять нас до тотожності

$$c_k(r,\log B) \equiv c_k(r,u) + i\,c_k(r,\tilde{u}) - i\,c_k(r,\tilde{p}),$$

справедливої для всіх $k\in\mathbb{Z}$, $r\in(0,1)$, звідки

$$\log B(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) + i\,\tilde{u}(re^{i\theta}) - i\,\tilde{p}(re^{i\theta}), \tag{16}$$

для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi]$ при кожному фіксованому $r \in (0, 1)$. Тоді, застосувавши нерівність Мінковського, для довільних $q \in (1, +\infty)$, $r \in (0, 1)$, дістаємо

$$m_q(r, \log B) \leqslant m_q(r, u) + m_q(r, \tilde{u}) + m_q(r, \tilde{p}). \tag{17}$$

З огляду на теорему М. Рісса, маємо

$$m_q(r, \tilde{u}) + m_q(r, \tilde{p}) \leqslant M_5(q) \left(m_q(r, u) + m_q(r, p) \right),$$

а звідси, з урахуванням нерівностей (3) та (17), для всіх $0 < r < 1$ знаходимо

$$m_q(r, \log B) \leqslant M_6(q)(1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t, B) t^{-1} dt + M_5(q) m_q(r, p), \ 1/q + 1/q' = 1, \tag{18}$$

де $M_6(q) = M_1(q)(1 + M_5(q))$.

Для оцінки останнього доданку в правій частині нерівності (18) двічі застосуємо інтегральну нерівність Мінковського і зробимо заміну змінної $t = r\tau$, в результаті чого одержимо

$$\begin{aligned} m_q(r, p) &\leqslant \int_0^r \frac{dt}{t} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{|a| \leqslant t} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta - \varphi)}\right) d\mu \right)^q d\theta \right\}^{1/q} \\ &\leqslant \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|a| \leqslant t} d\mu \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi)}\right)\right)^q d\theta \right\}^{1/q} \\ &= \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau} \int_{|a| \leqslant r\tau} d\mu \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\mathcal{P}\left(1, \tau e^{i(\theta-\varphi)}\right)\right)^q d\theta \right\}^{1/q}, \end{aligned}$$

$1 < q < +\infty$, $a = |a|e^{i\varphi}$. Зауважимо, що внутрішній інтеграл в останній нерівності не залежить від φ. Тому, враховуючи нерівність

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\mathcal{P}\left(1, te^{ix}\right)\right)^q dx \right\}^{1/q} &\leqslant \left(\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \mathcal{P}\left(1, te^{ix}\right) \right)^{1/q'} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}\left(1, te^{ix}\right) dx \right\}^{1/q} = \\ &= (1+t)^{1/q'}(1-t)^{-1/q'} \leqslant 2^{1/q'}(1-t)^{-1/q'}, \ 1 < q < +\infty, \ 1/q + 1/q' = 1, \ 0 < t < 1, \end{aligned}$$

знаходимо

$$m_q(r, p) \leqslant 2^{1/q'} \int_0^1 (1-t)^{-1/q'} n(rt, B) t^{-1} dt, \quad 0 < r < 1,$$

що разом з нерівністю (18) та очевидним співвідношенням

$$(1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t, B) t^{-1} dt = o\left(\int_0^1 (1-t)^{-1/q'} n(rt, B) t^{-1} dt \right), \quad r \to 1,$$

дає (5).

Доведення теореми 2. Нехай $u(z) = \log|B(z)|$. Враховуючи зображення (16) та нерівність Мінковського, одержимо

$$m_q(r,\tilde{p}) \leqslant m_q(r,u+i\tilde{u}) + m_q(r,\log B),\ 1<q<+\infty,\ 0<r<1. \tag{19}$$

Згідно з теоремою М. Рісса, маємо

$$m_q(r,\tilde{u}) \leqslant M_5(q)m_q(r,u), \quad 0<r<1,$$

і тому

$$m_q(r,u+i\tilde{u}) \leqslant (1+M_5(q))m_q(r,u) \leqslant (1+M_5(q))m_q(r,\log B), \tag{20}$$

бо $m_q(r,u) \leqslant m_q(r,\log B)$. Тоді, підставивши (20) в (19), одержимо

$$m_q(r,\tilde{p}) \leqslant M_7(q)m_q(r,\log B), \quad 0<r<1, \tag{21}$$

де $M_7(q) = (2+M_5(q))$. Отже, нам залишилось дати оцінку знизу при $r \to 1$ функцій $m_q(r,\tilde{p})$, $1<q<+\infty$.

Нехай нулі добутку Бляшке $B(z)$ зосереджені на скінченній системі k променів: $\{te^{i\varphi_j}\}_{j=1}^k$, $0 \leqslant \varphi_1 < \cdots < \varphi_k < 2\pi$, $0<t<1$; $n_j(r)$ — їх кількість (з урахуванням кратності) на промені $\{te^{i\varphi_j}\}$, $0<t\leqslant r<1$. Очевидно, що $\sum_{j=1}^k n_j(r) = n(r,B)$. У цьому випадку функція $p(z)$ (див. співвідношення (12)) набуде вигляду

$$p(z) = \sum_{j=1}^k \int_0^r \frac{n_j(t)}{t}\mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi_j)}\right)dt, \quad z = re^{i\theta}.$$

Приймемо

$$g(re^{i\theta}) = \frac{\pi r}{M_5(q')k(\pi r^2+4)}\sum_{j=1}^k \int_0^r \left(\left|\frac{1+\rho re^{i(\theta-\varphi_j)}}{1-\rho re^{i(\theta-\varphi_j)}}\right|^{1/q'}\right)^{\sim} d\rho.$$

Добре відомо [12, с. 118], що функція $F(z) = (1+z)(1-z)^{-1}$, $z \in \mathbb{D}$, належить до просторів Харді $H^\alpha(\mathbb{D})$, $0<\alpha<1$, і

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|F\left(\rho re^{ix}\right)\right|^\alpha dx \leqslant M_8(\alpha)|F(0)|^\alpha = M_8(\alpha), \tag{22}$$

де $M_8(\alpha) = (\cos(\pi\alpha/2))^{-1}$. Окрім того, функція $|F(z)|^\alpha$, $0<\alpha<1$, субгармонійна. Тому [12, с. 72]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|F\left(\rho re^{ix}\right)\right|^\alpha \mathcal{P}\left(r, te^{ix}\right)dx \geqslant |F(\rho t)|^\alpha \geqslant (1-\rho t)^{-\alpha},\ 0<t<r,\ 0<\rho<r. \tag{23}$$

Застосувавши теорему М. Рісса до функції $g(z)$, а також, врахувавши нерівності Мінковського та нерівності

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1+\rho re^{ix}}{1-\rho re^{ix}}\right|dx \leqslant 1 + \frac{2}{\pi}\log\frac{2}{1-\rho r}, \qquad \int_0^r \log\frac{2}{1-\rho r}d\rho \leqslant r^{-1}\log 2e \leqslant 2r^{-1},$$

знаходимо

$$m_{q'}(r,g) \leqslant \frac{\pi r}{k(\pi r^2+4)} \sum_{j=1}^{k} \int_0^r d\rho \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1+\rho r e^{i(\theta-\varphi_j)}}{1-\rho r e^{i(\theta-\varphi_j)}} \right| d\theta \right\}^{1/q'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi r}{\pi r^2+4} \int_0^r \left(1+\frac{2}{\pi}\log\frac{2}{1-\rho r}\right)^{1/q'} d\rho \leqslant \frac{\pi r}{\pi r^2+4}\left(r+\frac{2}{\pi}\int_0^r \log\frac{2}{1-\rho r}d\rho\right) \leqslant 1.$$

Тому, з урахуванням нерівності Гельдера, для всіх $1<q<+\infty,\ 0<r<1$, одержуємо

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}\left(re^{i\theta}\right) g\left(re^{i\theta}\right) d\theta \right| \leqslant m_q(r,\tilde{p}) m_{q'}(r,g) \leqslant m_q(r,\tilde{p}). \tag{24}$$

Далі, враховуючи [11, с. 225], що

$$\left(\tilde{f}\left(e^{i\theta}\right)\right)^{\sim} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{ix}\right)dx - f\left(e^{i\theta}\right)$$

та нерівність (22), одержимо

$$-\tilde{g}\left(re^{i\theta}\right) \geqslant \frac{\pi r}{M_5(q')k(\pi r^2+4)} \left(\sum_{j=1}^{k} \int_0^r \left| \frac{1+\rho r e^{i(\theta-\varphi_j)}}{1-\rho r e^{i(\theta-\varphi_j)}} \right|^{1/q'} d\rho - krM_8(1/q') \right). \tag{25}$$

Тоді, з огляду на співвідношення дуальності [12, с. 117], зі співвідношень (24),(25) та (23) випливає, що

$$m_q(r,\tilde{p}) \geqslant -\int_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right)\tilde{g}\left(re^{i\theta}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \frac{\pi r}{M_5(q')k(\pi r^2+4)} \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k} \int_0^r \frac{n_j(t)}{t} dt \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} \left| \frac{1+\rho r e^{i(\theta-\varphi_\nu)}}{1-\rho r e^{i(\theta-\varphi_\nu)}} \right|^{1/q'} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi_j)}\right)\frac{d\theta}{2\pi} - krM_8(1/q')\int_0^r \frac{n(t,B)}{t}dt \right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi r}{M_5(q')k(\pi r^2+4)} \left(\int_0^r \frac{n(t,B)}{t}dt \int_0^r \frac{d\rho}{(1-\rho t)^{1/q'}} - krM_8(1/q')\int_0^r \frac{n(t,B)}{t}dt \right). \tag{26}$$

Зауважимо, що

$$\int_0^r \frac{d\rho}{(1-\rho t)^{1/q'}} \geqslant \int_0^t \frac{d\rho}{(1-\rho t)^{1/q'}} \geqslant \frac{t}{\left(2(1-t)\right)^{1/q'}}, \tag{27}$$

$$\int_0^r \frac{n(t,B)}{t}dt = o\left(\int_0^r \frac{n(t,B)}{(1-t)^{1/q'}}dt \right), \quad r\to 1, \tag{28}$$

і

$$\frac{\pi r}{\pi r^2+4} > 1/5 \quad \text{при} \quad 1/2 \leqslant r < 1. \tag{29}$$

Співвідношення (26) — (29) разом з (21) дають (6) зі сталою $M_4(q) = (20M_5(q') + +10)^{-1}, 1/q + 1/q' = 1$.

Доведення наслідку 1. Цей наслідок негайно випливає з нерівностей (5) та (6).

Доведення наслідку 2. Твердження пункту а) цього наслідку легко випливає зі співвідношень (5),(7),(8) та

$$(1-t)^{-1/q'} n(t,B) = O\left((1-t)^{-1} l(t)\right), \quad t \to 1.$$

Доведемо твердження пункту б) цього наслідку. Зауважимо, що

$$\int_0^1 n(t,B)dt = \sum_{\nu=1}^{+\infty} (1 - |a_\nu|) < +\infty.$$

Тому, для всіх $r \in (0,1)$ маємо

$$n(r,B)(1-r) \leqslant \int_r^1 n(t,B)dt,$$

або

$$n(r,B)(1-r)^{1/q} \leqslant (1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t,B)dt \stackrel{\text{def}}{=} l(r), \ \ 1/q + 1/q' = 1,$$

тобто

$$n(r,B) \leqslant (1-r)^{-1/q} l(r). \tag{30}$$

Враховуючи (30), необхідне твердження буде встановлено, якщо ми покажемо, що $\lim\limits_{r\to 1} l(r) = 0$ і функція $l(r)$ задовольняє умові (8). Справді, з умови

$$\int_0^1 n(t,B)(1-t)^{-1/q'} dt < +\infty \tag{31}$$

випливає, що

$$n(r,B)(1-r)^{1/q} \leqslant q^{-1} \int_r^1 n(t,B)(1-t)^{-1/q'} dt \to 0, \quad r \to 1.$$

Тоді, застосувавши правило Лопіталя, одержимо

$$\lim_{r\to 1} l(r) = \lim_{r\to 1} (1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t,B)dt = q' \lim_{r\to 1} n(r,B)(1-r)^{1/q} = 0.$$

Далі, інтегруючи частинами, дістаємо

$$\int_0^1 \frac{l(t)}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{\int_t^1 n(\tau,B)d\tau}{(1-t)^{1+1/q'}} dt = q' \left[\int_0^1 \frac{n(t,B)}{(1-t)^{1/q'}} dt - \int_0^1 n(t,B)dt \right] \leqslant$$

$$\leqslant q' \int_0^1 n(t,B)(1-t)^{-1/q'} dt,$$

що разом з (31) дає (8).

Доведення наслідку 3. Твердження пункту а) цього наслідку негайно випливає з твердження пункту а) наслідку 2 при $l(r) = (1-r)^{1/q-\alpha_0}$.

Для доведення твердження пункту б) цього наслідку досить взяти добуток Бляшке $B(z)$ з нулями, розташованими на скінченній системі променів такий, що

$$C_1(1-r)^{-1/q} \leqslant n(r,B) \leqslant C_2(1-r)^{-\alpha}, \quad 1 < q < +\infty, \quad r \to 1,$$

де C_1, C_2 — деякі додатні сталі, та врахувати співвідношення (6).

1. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. – М., Мир, 1971. – 312 с.
2. MacLane G. R., Rubel L. A. *On the growth of the Blaschke products* // Canadian J. Math. – 1969. – 21. – P. 595–600.
3. Rubel L. A., Taylor B. A. *A Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – 96. – P. 53–96.
4. Rubel L. A. Entire and meromorphic functions. – Springer, 1996. – 187 p.
5. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов, Вища школа, 1988. – 195 с.
6. Linden C. N. *Integral means and zeros distributions of Blaschke products* // Canadian J. Math. – 1972. – 24. – P. 755–760.
7. Linden C. N. *Integral logarithmic means for regular functions* // Pacific J. Math. – 1989. – 138. – P. 119–127.
8. Linden C. N. *The characterization of orders for regular functions* // Math. Proc. Camb. Soc. – 1992. – 11. – P. 299–307.
9. Yeyko V., Kondratyuk A. *Growth of integral logarithmic means for Blaschke products.* // Міжнародна математична конференція присв'ячена пам'яті Ганса Гана (10–15 жовтня 1994 р., Чернівці)/ Чернівці: Рута, 1994. – с. 168.
10. Ейко В. В., Кондратюк А. А. *Об интегральных логарифмических средних произведений Бляшке* // Матем. заметки. – 1998. – т. 64, вып. 2. – С. 199–206.
11. Дынькин Е. М. *Методы теории сингулярных интегралов (Преобразование Гильберта и теория Кальдерона-Зигмунда)* // Итоги наук и техн. Соврем. проблемы мат. Фундам. напр. / ВИНИТИ., 1987. – Т. 15. – С. 197–295.
12. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. – М., Мир, 1984. – 469 с.
13. Васильків Я. В., Кондратюк А. А. *Інтегральні середні логарифмів добутків Бляшке* // В зб.: Сучасні проблеми математики. В 4–ох частинах./ Чернівці–Київ. – 1998. – Ч. 1. – С. 96–98.
14. Калинець Р. З., Кондратюк А. А. *Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0,2\pi]$-метриці* // Укр. мат. журн. – 1998. – т. 50, N 7. – С. 889–896.

Стаття надійшла до редколегії 10.07.98