УДК 517.524

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ЗАЛИШКІВ ПАРНОЇ ЧАСТИНИ РОЗВИНЕННЯ У ГІЛЛЯСТИЙ ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ ВІДНОШЕННЯ ЛАУРІЧЕЛЛИ

Н. П. Гоєнко

Goyenko N. P. On convergence of tails of even part of branched continued fraction expansion for ratio of Lauricella functions. In this paper we construct the even part of branched continued fraction expansion for ratio of the Lauricella functions $F_D^{(N)}(a,b_1,b_2,\dots,b_N)/F_D^{(N)}(a+1,b_1+1,b_2,\dots,b_N;c+1;z)$ with parameter $a\neq 0$. Using Slezynski–Pringsheim type convergence criterion of branched continued fractions, convergence of tails of even part in the polydisk $\{z\in\mathbb{C}^N: |z_j|<r,\ j=\overline{1,N}\}$ and the ray $\{z\in\mathbb{C}^N: z_1=z_2=\dots=z_N\}$ is investigated.

Розглянемо гіпергеометричну функцію Лаурічелли

$$F_D^{(N)}(a,b_1,\dots,b_N;\,c;\,z)=\sum_{k_1,\dots,k_N=0}^{\infty}\frac{(a)_{k_1+\dots+k_N}(b_1)_{k_1}\cdots(b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+\dots+k_N}}\frac{z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}}{k_1!\cdots k_N!},$$

де a, $b_1,\dots,b_N$, c — комплексні сталі, причому $c\neq 0,-1,-2,\dots$; $z=(z_1,\dots,z_N)\in\mathbb{C}^N$, $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ — символ Похгаммера, $(\alpha)_0=1$.

У праці [1] побудовано розвинення відношення гіпергеометричних функцій

$$\frac{F_D^{(N)}(a,b_1,\dots,b_N;\,c;\,z)}{F_D^{(N)}(a+1,b_1+1,b_2,\dots,b_N;\,c+1;\,z)} \tag{1}$$

з параметром $a\neq 0$ у гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$s_0(z)+\cfrac{t_0(z)}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\cfrac{s_{i(1)}(z)}{1+\ddots+\cfrac{t_{i(n-1)}(z)}{1+\sum\limits_{i_n=1}^{N}\cfrac{s_{i(n)}(z)}{1+\ddots}}}}, \tag{2}$$

де

$$s_0(z)=\frac{a}{c}(1-z_1),\quad t_0(z)=1-\frac{a}{c},\quad t_{i(n)}(z)=\frac{c-a+n}{a(1-z_{i_n})},\quad s_{i(n)}(z)=\frac{(b_{i_n}+p_{i(n)})z_{i_n}}{a(1-z_{i_n})}, \tag{3}$$

$i(n)=i_1i_2\dots i_n$ — мультиіндекс, $i_k=\overline{1,N}$, $k=\overline{1,n}$, $n=\overline{1,\infty}$, $p_{i(n)}=\alpha_{i(n)}+\delta_{i_n}^1$, $\alpha_{i(1)}=0$, $\alpha_{i(n)}$ — кількість чисел i_n в мультиіндексі $i(n-1)$, якщо $n\geqslant 2$, δ_i^j — символ Кронекера.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 33C65.

Побудуємо парну частину ГЛД (2). Для цього розглянемо гіллястий ланцюговий дріб

$$b_0(z) + c_0(z)\left(d_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{c_{i(n)}(z)}{d_{i(n)}(z)}\right)^{-1} \tag{4}$$

і визначимо його підхідні дроби:

$$g_1 = b_0(z) + c_0(z)/d_0(z),$$

$$g_k = b_0(z) + c_0(z)\left(d_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{k-1} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{c_{i(n)}(z)}{d_{i(n)}(z)}\right)^{-1}, \quad k = \overline{2, \infty}.$$

Нехай

$$F_n(\zeta) = s_0(z) + \cfrac{t_0(z)}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{s_{i(1)}(z)}{1 + \ddots + \cfrac{t_{i(n-1)}(z)}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{s_{i(n)}(z)}{1+\zeta}}}}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Тоді підхідні дроби ГЛД (2) мають вигляд:

$$f_1 = s_0(z) + t_0(z), \quad f_{2n} = F_n(0), \quad f_{2n+1} = F_n(t_{i(n)}(z)), \quad n = \overline{1, \infty}.$$

ГЛД (4) називається парною частиною дробу (2), якщо $g_k = f_{2k}$, $k = \overline{1, \infty}$.

Твердження 1. *Нехай ГЛД (2) є розвиненням відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли (1) з параметром $a \neq 0$. Тоді парною частиною гіллястого ланцюгового дробу (2) є ГЛД (4), елементи котрого обчислюються за формулами:*

$$\begin{aligned} b_0(z) &= \frac{a}{c}(1 - z_1), \quad c_0(z) = 1 - \frac{a}{c}, \quad d_0(z) = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{b_{i_1} + 1}{a(1 - z_{i_1})} z_{i_1}, \\ c_{i(n)}(z) &= -\frac{(c - a + n)(b_{i_n} + p_{i(n)}) z_{i_n}}{a^2 (1 - z_{i_n})^2}, \\ d_{i(n)}(z) &= 1 + \frac{c - a + n}{a(1 - z_{i_n})} + \sum_{i_{n+1}=1}^{N} \frac{(b_{i_{n+1}} + p_{i(n+1)}) z_{i_{n+1}}}{a(1 - z_{i_{n+1}})}. \end{aligned} \tag{5}$$

Доведення. У праці [2] доведено, що парною частиною ГЛД (2) є гіллястий ланцюговий дріб

$$s_0(z) + \cfrac{t_0(z)}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} s_{i(1)}(z) + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(z)}{v_{i(1)}(z) + \ddots + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{u_{i(n)}(z)}{v_{i(n)}(z) + \ddots}}}, \tag{6}$$

де

$$u_{i(n)}(z) = -s_{i(n)}(z) t_{i(n)}(z), \quad v_{i(n)}(z) = 1 + t_{i(n)}(z) + \sum_{i_{n+1}=1}^{N} s_{i(n+1)}(z).$$

Гіллясті ланцюгові дроби (6) і (4) мають однакову структуру. Враховуючи вирази (3) для $t_{i(n)}(z)$ і $s_{i(n)}(z)$, шляхом елементарних обчислень одержимо формули (5) для елементів $c_{i(n)}(z)$, $d_{i(n)}(z)$ парноі частини ГЛД (2). Твердження доведено.

Дослідимо збіжність нескінченних залишків ГЛД (4):

$$Q_{i(n)}(z) = d_{i(n)}(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(z)}{d_{i(k)}(z)}, \quad n = \overline{1,\infty}, \quad i_p = \overline{1,N}, \quad p = \overline{1,n}.$$

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти ГЛД (4) визначаються за формулами (5) і r_0 – найменший додатний корінь рівняння $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$.*

Тоді для будь-якого дійсного додатного числа r, $0 < r < r_0^2$, існує таке натуральне число $n_0 = n_0(r)$, що для кожного $n > n_0$ і довільного мультиіндексу $i(n)$ нескінченний залишок ГЛД (4) $Q_{i(n)}(z)$ збігається абсолютно в області

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C}^N : |z_j| < r, \ j = \overline{1,N} \right\}. \tag{7}$$

Доведення. Зауважимо, що для найменшого додатного кореня r_0 рівняння четвертого степеня, яке фігурує у формулюванні теореми, справедлива оцінка: $\dfrac{1}{3} < r_0^2 < \dfrac{1}{2}$.

Із ознаки збіжності інтегральних ланцюгових дробів, встановленої Т. М. Антоновою [3, с.18], випливає, що гіллястий ланцюговий дріб

$$d_{i(n)}(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(z)}{d_{i(k)}(z)},$$

збігається абсолютно, якщо існують додатні функції $g_{i(k)}(z)$, $k = \overline{n,\infty}, i_p = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,k}$, для котрих виконуються нерівності

$$|d_{i(k)}(z)| \geqslant g_{i(k)}(z) + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|c_{i(k+1)}(z)|}{g_{i(k+1)}(z)}, \quad k = \overline{n,\infty}, \quad i_p = \overline{1,N}, \quad p = \overline{1,k}. \tag{8}$$

Враховуючи формули (5) для $c_{i(k)}(z)$, $d_{i(k)}(z)$ і покладаючи

$$g_{i(k)}(z) := \frac{|c - a + k|\sqrt{|z_{i_k}|}}{|a||1 - z_{i_k}|}, \quad k = \overline{n,\infty}, \quad i_p = \overline{1,N}, \quad p = \overline{1,k},$$

нерівності (8) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} &\left| 1 + \frac{c - a + k}{a(1 - z_{i_k})} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{(b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)})z_{i_{k+1}}}{a(1 - z_{i_{k+1}})} \right| \geqslant \\ &\geqslant \frac{|c - a + k|\sqrt{|z_{i_k}|}}{|a||1 - z_{i_k}|} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}|\sqrt{|z_{i_{k+1}}|}}{|a||1 - z_{i_{k+1}}|}. \end{aligned} \tag{9}$$

Оцінимо зверху праву частину нерівності (9) у припущенні, що $z \in D$. Враховуючи, що

$0 < r < 1$ і $\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} p_{i(k+1)} = k+1$, маємо

$$\frac{|c-a+k|\sqrt{|z_{i_k}|}}{|a||1-z_{i_k}|} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}|\sqrt{|z_{i_{k+1}}|}}{|a||1-z_{i_{k+1}}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|c-a|+k)\sqrt{r}}{|a|(1-r)} + \frac{\sqrt{r}}{|a|(1-r)}\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j| + k + 1\right) \leqslant \frac{2\sqrt{r}}{|a|(1-r)}k + \psi,$$

де

$$\psi := \frac{\sqrt{r}}{|a|(1-r)}\left(1 + |c-a| + \sum_{j=1}^{N}|b_j|\right).$$

В цій же області для лівої частини нерівності (9) виконується така оцінка знизу

$$\left|1 + \frac{c-a+k}{a(1-z_{i_k})} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{(b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)})z_{i_{k+1}}}{a(1-z_{i_{k+1}})}\right| \geqslant \left|1 + \frac{c-a+k}{a(1-z_{i_k})}\right| -$$

$$- \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}||z_{i_{k+1}}|}{|a||1-z_{i_{k+1}}|} \geqslant \frac{k-|c|}{|a|(1+r)} - \frac{r}{1-r} - \frac{r}{|a|(1-r)}\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j| + k + 1\right) =$$

$$= \frac{1-2r-r^2}{|a|(1-r^2)}k - \varphi,$$

де

$$\varphi := \frac{|c|}{|a|(1+r)} + \frac{r}{|a|(1-r)}\left(1 + |a| + \sum_{j=1}^{N}|b_j|\right).$$

Умови (9) виконуються, якщо

$$\frac{1-2r-r^2}{|a|(1-r^2)}k - \varphi \geqslant \frac{2\sqrt{r}}{|a|(1-r)}k + \psi.$$

Нехай

$$n_0 := \left[\frac{|c|(1-r) + (1+r)\sqrt{r}\left(1 + |c-a| + \sum\limits_{j=1}^{N}|b_j| + \sqrt{r}\left(1 + |a| + \sum\limits_{j=1}^{N}|b_j|\right)\right)}{1 - 2\sqrt{r} - 2r - 2r\sqrt{r} - r^2}\right] + 1.$$

Тоді для елементів $c_{i(k)}(z)$ і $d_{i(k)}(z)$ ГЛД (4), де $k > n_0$, в області (7) справджуються нерівності (8).

Отже, для кожного $n > n_0$ і довільного мультиіндексу $i(n)$ нескінченний залишок ГЛД (4) $Q_{i(n)}(z)$ збігається абсолютно в області (7).

Дослідимо збіжність залишків ГЛД (4) на промені $\left\{z \in \mathbb{C}^N : z_1 = z_2 = \cdots = z_N\right\}$.

Теорема 2. *Для кожної точки* $z^0 = (\xi, \dots, \xi) \in \mathbb{C}^N, \xi \in G, G = \left\{ w \in \mathbb{C} : |1+w| > 2\sqrt{|w|} \right\}$, *існує таке натуральне число* $n_1 = n_1(\xi)$, *що всі нескінченні залишки ГЛД (4)* $Q_{i(n)}(z^0)$, $n > n_1$, *збігаються абсолютно.*

Доведення. Враховуючи, що $z_1 = z_2 = \dots = z_N = \xi$, ліву частину нерівностей (7) оцінимо знизу

$$\left|1 + \frac{c-a+k}{a(1-\xi)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{(b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)})\xi}{a(1-\xi)}\right| =$$

$$= \left|\frac{1+\xi}{a(1-\xi)}k + 1 + \frac{1}{a(1-\xi)}\left(c - a + \xi\left(1 + \sum_{j=1}^{N} b_j\right)\right)\right| \geqslant \frac{|1+\xi|}{|a||1-\xi|}k - u,$$

де

$$u := \left|1 + \frac{1}{a(1-\xi)} + \left(c - a + \xi\left(1 + \sum_{j=1}^{N} b_j\right)\right)\right|.$$

Для правої частини нерівностей (9) справедлива оцінка зверху

$$\frac{|c-a+k|\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}|\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|} \leqslant \frac{(k+|c-a|)\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|} +$$

$$+ \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} b_j + k + 1\right)\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|} = \frac{2\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}k + v,$$

де $v = \frac{\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}\left(|c-a| + \sum_{j=1}^{N} |b_j| + 1\right)$. Якщо виконується нерівність $\frac{|1+\xi|}{|a||1-\xi|}k - u \geqslant \frac{2\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}k + v$, то для $k > n_1$, де

$$n_1 := \left[\frac{\left|c + \xi(1 + \sum_{j=1}^{N} b_j - a)\right| + \sqrt{|\xi|}(|c-a| + \sum_{j=1}^{N} |b_j| + 1)}{|1+\xi| - 2\sqrt{|\xi|}}\right] + 1,$$

елементи $c_{i(k)}(z^0)$, $d_{i(k)}(z^0)$ ГЛД (4) задовольняють умови (8). Отже, залишки $Q_{i(n)}(z)$, $n > n_1$, ГЛД (4) збігаються абсолютно для кожного $z^0 = (\xi, \dots, \xi)$, $\xi \in G$.

1. Молнар Н. П., Манзій О. С. *Розвинення гіпергеометричних функцій Аппеля F_1 та Лаурічелли $F_D^{(N)}$ у гіллясті ланцюгові дроби*// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем. – 1997. – Вип. 48. – С. 17-26.
2. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. *Оцінки похибок апроксимацій багатовимірних g-дробів* // Вісн. ДУ "Львівська політехніка" – 1998. – N 321. – С. 6-9.
3. Антонова Т. М. Достатні ознаки збіжності і стійкості інтегральних ланцюгових дробів. – Дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Львів, 1996. – 141 с.

Стаття надійшла до редколегії 08.09.98