УДК 517.956.25

ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОКОЛІ РЕБРА

М. І. Плеша

Plesha M. I. On the behaviour of solutions of Dirichlet problem for second order quasilinear elliptic equation in neighbourhood of edge. We consider the Dirichlet problem for the quasilinear elliptic nondivergence equations of second order in a domain with edges. Barrier functions are constructed for the problem and, by comparison principle, the bound of solution near edges is obtained. Using Kondratjev's method of rings we find bounds for the derivatives of solution in a neighborhood of edges. Moreover, we obtain a priori estimates of the second generalized derivatives (in terms of the Sobolev weighted norm) of solutions.

У даній праці досліджено поведінку розв'язків задачі

$$a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j} + a(x,u,u_x) = 0, \quad x \in G, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial G \tag{2}$$

в околі ребра межі області $G \subset \mathbb{R}^n$. Тут і далі вважається, що за індексами, котрі повторюються, ведеться сумування від 1 до n. В. О. Кондратьєв у праці [1] дослідив питання регулярності узагальненого розв'язку задачі Діріхле для еліптичних *лінійних* рівнянь другого порядку в областях з ребром на межі. Метою даної праці є виведення за допомогою методики, розробленої в [1]–[4], апріорної оцінки (у ваговій соболєвській нормі) для узагальнених похідних другого порядку розв'язку задачі (1), (2) в околі ребра. Користуючись нагодою, хочу висловити свою подяку доктору фізико-математичних наук М. В. Борсуку за постійну увагу до моєї роботи.

Зробимо такі припущення. Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, — обмежена область, межа якої $\partial G = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, де Γ_1, Γ_2 — достатньо гладкі $(n-1)$-вимірні поверхні, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2 = \ell$. Припустимо, що початок координат P перебуває на ребрі ℓ і поверхні Γ_1 і Γ_2 в деякому околі $U(P)$ точки P є частинами двох гіперплощин, що перетинаються під кутом $\omega_0 \in (0,\pi)$, причому Γ_1 і Γ_2 в цьому околі є симетричні щодо гіперплощини $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_1 = 0\}$. Це припущення не є обтяжливим, бо в протилежному випадку можна здійснити відповідне дифеоморфне перетворення околу області G. Введемо такі позначення: $x = (y,z)$, де $y = (y_1,y_2) \stackrel{def}{=} (x_1,x_2)$, $z = (z_1,z_2,\ldots,z_{n-2}) \stackrel{def}{=} (x_3,\ldots,x_n)$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35J25.

$r=|y|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$; $G_a^{b,c}=\{x\in G: 0\leqslant a<r<b; |x_i|<c, i>2\}$; $G_a^b\equiv G_a^{b,b}$; $v_x^2=\sum\limits_{i=1}^n v_{x_i}^2$; $v_{xx}^2=\sum\limits_{i,j=1}^n v_{x_ix_j}^2$; $C^s(\overline{G})$ — банахів простір функцій, котрі мають неперервні похідні на $\overline{G}$ до порядку $s\geqslant 0$ включно, якщо s – ціле, і до порядку $[s]$ включно, якщо s – неціле, та похідні порядку $[s]$ задовольняють умову Гельдера з показником $s-[s]$, $|v|_{k,G}$ — норма елемента $v\in C^k(\overline{G})$; $W^{k,p}(G)$ — соболєвський простір функцій, що складається з тих елементів $L_p(G)$, котрі мають усі узагальнені похідні до порядку k включно, інтегровні по G зі степенем p, $||v||_{k,p;G}$ — норма елемента $v\in W^{k,p}(G)$; $W^{k,p}_{\rm loc}(\overline{G}\setminus\ell)$ — простір функцій, котрі належать до $W^{k,p}(G')$ для всіх підобластей G' таких, що $\overline{G'}\subset\overline{G}\setminus\ell$; $V^k_{p,\alpha}(G)$ — ваговий соболєвський простір функцій v, для котрих скінченна норма

$$||v||_{V^k_{p,\alpha}(G)}=\left(\iint\limits_G\sum_{|\beta|=0}^k|r_x|^{p(|\beta|-k+\alpha/p)}|D^\beta v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\alpha\in\mathbb{R}$, $k\geqslant 0$ — ціле, $p\geqslant 1$, r_x — відстань від точки x до ℓ; $W^k_\alpha(G)\overset{def}{=}V^k_{2,\alpha}(G)$.

Означення. *Розв'язком задачі (1), (2) називається функція $u\in C^0(\overline{G})\cap W^{2,q}_{\rm loc}(\overline{G}\setminus\ell)$, $q\geqslant n$, котра задовольняє рівняння (1) майже всюди в G та граничну умову (2).*

Позначимо $\mathfrak{M}=\{(x,v,w)\colon\ x\in\overline{G},\ u\in\mathbb{R},\ w\in\mathbb{R}^n\}$. Додатково вимагатимемо виконання таких умов:

(A) *$a_{ij}\in C^0(\mathfrak{M})$ $(i,j=1,\ldots,n)$; функція $a(x,v,w)$, $x\in G$, $v\in\mathbb{R}$, $w\in\mathbb{R}^n$ є каратеодорівською, тобто вимірною по $x\in G$ для всіх $(v,w)\in\mathbb{R}^{1+n}$ і неперервною по (v,w) для майже всіх $x\in G$;*

(B) *$a_{ij}(0,0,0)=\delta_i^j$ $(i,j=1,\ldots,n)$, де δ_i^j — символ Кронекера;*

(C) *існують числа $\mu>0$, $\nu>0$ такі, що виконується нерівність*

$$\nu\xi^2\leqslant a_{ij}(x,v,w)\xi_i\xi_j\leqslant\mu\xi^2\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^n,\quad\forall(x,v,w)\in\mathfrak{M}$$

(умова рівномірної еліптичності);

(D) *існують числа $\beta>-1$, $\mu_1\geqslant 0$, $k_1\geqslant 0$ та функції $f\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ такі, що*

$$|a(x,v,w)|\leqslant\mu_1|w|^2+b(x)|w|+f(x),\quad(x,v,w)\in\mathfrak{M},\tag{3}$$

причому b^2, $f\in W^0_\alpha(G)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant 2)$, $b(x)+f(x)\leqslant k_1|x|^\beta$ для всіх $x\in G$;

(E) *коефіцієнти рівняння (1) задовольняють ще такі умови (див. [5]-[8]), котрі разом з умовами (A)-(D) забезпечують апріорну оцінку розв'язку*

$$|u|_{1+\gamma_0,G'}\leqslant M_1(G')\tag{4}$$

для довільної гладкої підобласті G' такої, що $\overline{G'}\subset\overline{G}\setminus\ell$, зі сталими $\gamma_0\in(0,1)$ і $M_1(G')>0$, котрі залежать від величин ν, μ, μ_1, k_1, $M_0\overset{def}{=}|u|_{0,G}$, β, n, q, $||b^2||_{0,2;G'}$, $||f||_{0,2;G'}$ і відстані від G' до ℓ.

Теорема 1. *Нехай u — розв'язок задачі (1), (2) і виконуються умови (A)-(E). Тоді справедливі оцінки*

$$|u(x)|\leqslant C_0r^{1+\gamma},\qquad x\in G_0^{2d},\tag{5}$$

$$|\nabla u(x)|\leqslant C_0r^\gamma,\qquad x\in G_0^{2d},\tag{6}$$

де C_0, d, γ — додатні числа, котрі визначаються величинами n, ω_0, ν, μ, μ_1, β, q, k_1, M_0 і областю G.

Доведення. Спочатку (аналогічно, як в [4]) побудуємо бар'єрну функцію. Згідно з умовою на область, існує число $d > 0$ (без обмеження загальності можна вважати, що $2d < 1$) таке, що

$$G_0^{2d} \subset \{x = (y, z) \colon y_2 > h|y_1|\}, \tag{7}$$

де h — довільне число таке, що $0 < h < \operatorname{ctg}\dfrac{\omega_0}{2}$. Розглянемо тепер таку функцію

$$w(x) \equiv w(y, z) = (y_2^2 - h^2 y_1^2) y_2^{\gamma - 1} + \sum_{i=1}^{n-2} |z_i|^{\gamma+2}, \qquad \gamma \in [0, 1].$$

Зазначимо кілька її властивостей:

$$w(x) \in C^1(\overline{G_0^{2d}}) \cap C^2(G_0^{2d});$$

$$0 \leqslant w(x) \leqslant (n-1)|x|^{\gamma+1}, \quad x \in G_0^{2d}; \tag{8}$$

$$|\nabla w(x)| \leqslant \left(4(1+h^2) + (n-2)(\gamma+2)^2\right)^{1/2} |x|^\gamma, \quad x \in G_0^{2d}. \tag{9}$$

Крім того, для довільного диференціального оператора

$$L_0 \equiv a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad x \in G_0^{2d},$$

коефіцієнти якого задовольняють умову

$$\nu\xi^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2 \qquad \forall x \in G_0^{2d}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

справджується оцінка

$$L_0 w(x) \leqslant -\frac{\nu h^2}{2} |x|^{\gamma-1}, \qquad x \in G_0^{2d}, \quad \forall \gamma \in (0, \gamma_1], \tag{10}$$

де значення $\gamma_1 \in (0, 1)$ визначається величинами ν, μ, h. Справді, властивості (8) і (9) випливають безпосередньо з означення функції w і (7). Для доведення (10) знайдемо значення оператора L_0 на функції w

$$L_0 w(x) = -h^2 y_2^{\gamma-1} \varphi(\gamma) + (\gamma+2)(\gamma+1) \sum_{i=1}^{n-2} a^{(i+2)(i+2)} |z_i|^\gamma,$$

де $\varphi(\gamma) \equiv 2(a^{11} - 2a^{12}t + a^{22}t^2) - (3a^{22} - 4a^{12}t + a^{22}h^{-2})\gamma - a^{22}(h^{-2} - t^2)\gamma^2$, $t \equiv \dfrac{y_1}{y_2}$, $|t| < \dfrac{1}{h}$. Оскільки $\varphi(0) = 2(a^{11}(x) - 2a^{12}(x)t + a^{22}(x)t^2) \geqslant 2\nu$, а функція $\varphi(\gamma)$ — квадратична, то знайдеться число $\gamma_1 > 0$, що залежить лише від ν, μ, h і таке, що $\varphi(\gamma) > \nu$ для всіх $\gamma \in (0, \gamma_1]$. Отже, для $\gamma \in (0, \gamma_1]$ маємо

$$L_0 w(x) \leqslant -\nu h^2 |x|^{\gamma-1} + (\gamma+2)(\gamma+1) \sum_{i=1}^{n-2} a^{(i+2)(i+2)} |z_i|^\gamma \leqslant$$

$$\leqslant -\nu h^2 |x|^{\gamma-1} + 2d\mu(\gamma_1+2)(\gamma_1+1)(n-2)|x|^{\gamma-1},$$

звідки випливає (10) при умові, що число d задовольняє нерівність

$$d < \frac{\nu h^2}{4\mu(\gamma_1+2)(\gamma_1+1)(n-2)}. \tag{11}$$

З доведених властивостей функції w випливає, що її можна взяти за бар'єрну функцію.

Перейдемо до доведення нерівностей (5) і (6). Розглянемо лінійний еліптичний оператор

$$L_1 \equiv a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad x \in G_0^{2d},$$

$$\text{де } a^{ij}(x) \equiv a_{ij}(x, u(x), u_x(x)), \qquad a^i(x) \equiv \frac{b(x)u_{x_i}(x)}{|\nabla u(x)|},$$

$b(x)$ — функція з умови (D), вважаючи, що $a^i(x) = 0$ в точках x, для котрих $|\nabla u(x)| = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Введемо допоміжну функцію

$$v(x) = -1 + \exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x)), \qquad x \in G$$

і знайдемо значення оператора L_1 на цій функції

$$L_1 v(x) = \nu^{-1}\mu_1(a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \nu^{-1}\mu_1 a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + b(x)|\nabla u(x)|)\exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x)) =$$
$$= \nu^{-1}\mu_1(-a(x,u,u_x) + \nu^{-1}\mu_1 a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + b(x)|\nabla u(x)|)\exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x)).$$

Звідси, враховуючи умову (C) і нерівність (3), $L_1 v(x) \geqslant -\nu^{-1}\mu_1 f(x)\exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x))$. Тому одержимо

$$L_1 v(x) \geqslant -\nu^{-1}\mu_1 k_1 |x|^\beta \exp(\nu^{-1}\mu_1 M_0), \qquad x \in G_0^{2d}. \tag{12}$$

Оцінимо зверху значення $L_1 w$, враховуючи (7)–(10) і умови на f, таким чином

$$L_1 w(x) \leqslant -\frac{\nu h^2}{2}|x|^{\gamma-1} + \frac{b(x)}{|\nabla u(x)|}\big[(h^2(1-\gamma)y_1^2 y_2^{\gamma-2} + (1+\gamma)y_2^\gamma)u_{y_2} - 2h^2 y_1 y_2^{\gamma-1}u_{y_1} +$$
$$+(\gamma+2)\sum_{i=1}^{n-2}|z_i|^{\gamma+1}u_{z_i}\big] \leqslant -\frac{\nu h^2}{2}|x|^{\gamma-1} + b(x)(2(1+h) + (\gamma_1+2)(n-2)2d)|x|^\gamma \leqslant$$
$$\leqslant \left(-\frac{\nu h^2}{2} + (2(1+h) + (\gamma_1+2)(n-2))k_1(2d)^{\beta+1}\right)|x|^{\gamma-1}, \qquad x \in G_0^{2d}, \quad \gamma \in (0, \gamma_1].$$

Нехай тепер число d задовольняє нерівність

$$(2d)^{\beta+1} < \frac{\nu h^2}{4(2(1+h) + (\gamma_1+2)(n-2))k_1}. \tag{13}$$

Тоді

$$L_1 w(x) \leqslant -\frac{1}{4}\nu h^2 |x|^{\gamma-1}, \qquad x \in G_0^{2d}. \tag{14}$$

Виберемо число $\mathcal{A}$ таке, що виконується нерівність

$$\mathcal{A} \geqslant 4k_1\mu_1\nu^{-2}h^{-2}d^{\beta+1-\gamma}\exp(\nu^{-1}\mu_1 M_0), \tag{15}$$

вважаючи при цьому, що $0 < \gamma \leqslant \min(\gamma_1, \beta+1)$. Тоді з (12) та (14) дістаємо

$$L_1(\mathcal{A}w(x)) \leqslant L_1 v(x), \qquad x \in G_0^{2d}.$$

Порівняємо тепер функції v та w на ∂G_0^{2d}. Перш за все

$$\mathcal{A}w(x) \geqslant 0 = v(x), \qquad x \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \partial G_0^{2d}.$$

Водночас, як доведено в [7] (див. наслідок 2.2), u неперервна за Гельдером та $|u(x)| \leqslant M_2|x|^{\gamma_0}$, $x \in \overline{G}$, де $\gamma_0 \in (0,1)$ визначається величинами n, ν^{-1}, μ та областю G, а M_2 — тими самими величинами, а також M_0, k_1, μ_1, β. Отже, скориставшись відомою нерівністю $e^t - 1 \leqslant t/(1-t)$ при $t<1$ маємо

$$v(x) \leqslant -1 + \exp(\nu^{-1}\mu_1 M_2 (2d)^{\gamma_0}) \leqslant 2\nu^{-1}\mu_1 M_2(2d)^{\gamma_0}, \qquad x \in G_0^{2d}, \tag{16}$$

якщо число d виберемо настільки малим, що виконується нерівність

$$d < \frac{(2\nu^{-1}\mu_1 M_2)^{-1/\gamma_0}}{2}. \tag{17}$$

Далі, оцінюємо наші функції на бічній поверхні циліндричної частини межі області G_0^{2d}, тобто на $\Omega_{2d} \equiv \{x \in G_0^{2d} : r = 2d\}$. Для цього перейдемо до циліндричної системи координат

$$y_1 = r\cos\omega, \quad y_2 = r\sin\omega, \quad z = z; \qquad 0 \leqslant \omega < 2\pi;$$

тоді $w(x) = r^{\gamma+1}(\sin\omega)^{\gamma-1}(\sin^2\omega - h^2\cos^2\omega) + \sum\limits_{i=1}^{n-2}|z_i|^{\gamma+2}$. Крім того, для $x \in \overline{G_0^{2d}}$ справджується $0 < \dfrac{\pi-\omega_0}{2} \leqslant \omega \leqslant \dfrac{\pi+\omega_0}{2}$ і $\sin^2\omega > h^2\cos^2\omega$, тому

$$\begin{gathered} w(x) \geqslant (2d)^{1+\gamma}(\sin\omega)^{\gamma-1}(\sin^2\omega - h^2\cos^2\omega) \geqslant \\ \geqslant (2d)^{1+\gamma}\sin^\gamma\left(\frac{\pi-\omega_0}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{\pi-\omega_0}{2}\right) - h^2\cos^2\left(\frac{\pi-\omega_0}{2}\right)\right) = \\ = (2d)^{1+\gamma}\cos^\gamma(\omega_0/2)\big(\cos^2(\omega_0/2) - h^2\sin^2(\omega_0/2)\big) \geqslant \\ \geqslant (2d)^{1+\gamma_1}\cos^{\gamma_1}(\omega_0/2)\big(\cos^2(\omega_0/2) - h^2\sin^2(\omega_0/2)\big) > 0, \qquad x \in \Omega_{2d}. \end{gathered} \tag{18}$$

Беручи число $\mathcal{A}$ настільки великим, щоб виконувалася нерівність

$$\mathcal{A} \geqslant 2\mu_1\nu^{-1}M_2(2d)^{\gamma_0-\gamma_1-1}\cos^{-\gamma_1}(\omega_0/2)\big(\cos^2(\omega_0/2) - h^2\sin^2(\omega_0/2)\big)^{-1}, \tag{19}$$

з (16) і (18) одержимо

$$\mathcal{A}w(x) \geqslant v(x), \qquad x \in \Omega_{2d}.$$

Залишилося порівняти функції $w(x)$ і $v(x)$ на поверхнях $K_i^\pm \equiv \{x \in \partial G_0^{2d} : z_i = \pm 2d\}$, $(i = 1, \dots, n-2)$. Для них маємо

$$w(x) = r^{\gamma+1}(\sin\omega)^{\gamma-1}(\sin^2\omega - h^2\cos^2\omega) + \sum_{i=1}^{n-2} z_i^{\gamma+2} \geqslant (2d)^{\gamma+2} \geqslant (2d)^{\gamma_1+2}, \qquad x \in K_i^\pm$$

$(i = 1, \dots, n-2)$. Тому, якщо $\mathcal{A}$, задовольняє ще умові

$$\mathcal{A} \geqslant 2\nu^{-1}\mu_1 M_2(2d)^{\gamma_0-\gamma_1-2}, \tag{20}$$

то

$$\mathcal{A}w(x) \geqslant v(x), \qquad x \in K_i^{\pm} \quad (i = 1, \dots, n-2).$$

Таким чином, якщо число d вибране згідно з (7), (11), (13), (17), число $\mathcal{A}$ згідно з (15), (19), (20), то маємо

$$L_1 v(x) \geqslant L_1(\mathcal{A}w(x)), \quad x \in G_0^{2d}; \quad v(x) \leqslant \mathcal{A}w(x), \quad x \in \partial G_0^{2d}$$

і можна застосувати принцип порівняння [9] (§3.1, 9.1), з якого випливає, що $v(x) \leqslant \mathcal{A}w(x)$, $x \in \overline{G_0^{2d}}$. Повертаючись до функції $u(x)$, одержимо

$$u(x) = \nu\mu^{-1} \ln(1 + v(x)) \leqslant \nu\mu_1 \ln(1 + \mathcal{A}w(x)) \leqslant \mathcal{A}\nu\mu^{-1} w(x), \qquad x \in \overline{G_0^{2d}}.$$

Так само доводиться оцінка знизу $u(x) \geqslant -\mathcal{A}\nu\mu^{-1}w(x)$, $x \in \overline{G_0^{2d}}$, якщо за допоміжну взяти функцію $v(x) = 1 - \exp(-\nu^{-1}\mu_1 u(x))$. Звідси випливає оцінка

$$|u(x)| \leqslant C_0 |x|^{\gamma+1}, \qquad x \in G_0^{2d}.$$

Тепер доведемо (5) і (6) методом кілець Кондратєва, спираючись на результати [7] для гладких областей. Нехай $x^0 \in \overline{G_0^d}$ — довільна точка ребра, тобто $x^0 = (0, z^0)$, $|z_i^0| \leqslant d$ $(i = 1, \dots, n-2)$. Нехай $\rho \in (0, d)$ і розглянемо множини $G_\rho^{2\rho}(z_0) \equiv \{x \in \overline{G_0^{2d}}: \rho \leqslant r \leqslant 2\rho; |z_i - z_i^0| \leqslant 2\rho, i = 1, \dots, n-2\}$. Зробимо у рівнянні (1) заміну змінних

$$y = \rho y', \quad z - z^0 = \rho(z' - z^0).$$

Функція $v(x') = \rho^{-1-\gamma} u(\rho y', \rho z' + (1-\rho)z^0)$ в шарі $G_1^2(z^0)$ задовольняє рівняння

$$a^{ij}(x') v_{x_i', x_j'} = F(x'), \qquad x' \in G_1^2(z^0),$$

де

$$a^{ij}(x') \equiv a_{ij}(\rho y', \rho z' + (1-\rho)z^0, \rho^{1+\gamma} v(x'), \rho^\gamma v_{x'}(x'));$$
$$F(x') \equiv -\rho^{1-\gamma}(a(\rho y', \rho z' + (1-\rho)z^0, \rho^{1+\gamma} v(x'), \rho^{1+\gamma} v_{x'}(x')).$$

На підставі припущення (C)

$$\operatorname{vrai}\max_{G_1^2(z^0)} |v| + \operatorname{vrai}\max_{G_1^2(z^0)} |\nabla' v| \leqslant M_1.$$

При цьому M_1 визначається лише величинами ν, μ, μ_1, k_1, M_0, β, n, q, $\|b^2\|_{0,2;G_1^2(z^0)}$, $\|f\|_{0,2;G_1^2(z^0)}$, G. Оскільки M_1 залежить від своїх аргументів неперервно (див. [7], стор. 67) то існує C, котре визначається лише величинами ν, μ, μ_1, k_1, M_0, β, γ, n, q, $\|b^2\|_{0,2;G}$, $\|f\|_{0,2;G}$, G, що $M_1 < C$ для всіх z^0. Повертаючись до попередніх змінних одержимо $|u(x)| \leqslant C\rho^{\gamma+1}$ і $|\nabla u(x)| \leqslant C\rho^\gamma$, $x \in G_\rho^{2\rho}(z^0)$, $\rho \in (0, d)$. Покладаючи $r = \frac{3}{2}\rho$, одержимо $|u(x)| \leqslant C_0 r^{\gamma+1}$ і $|\nabla u(x)| \leqslant C_0 r^\gamma$, $x \in \tilde{G}(z^0)$, де $\tilde{G}(z^0) \equiv \{x \in \overline{G_0^{2d}}: 0 \leqslant |z_i - z_i^0| \leqslant r \leqslant 2d, i = 1, \dots, n-2\}$. Оскільки C_0 не залежать від z^0 одержимо (5) і (6) у всій області G_0^{2d}. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай u — розв'язок задачі (1), (2) і виконуються умови теореми 1. Тоді $u \in W_\alpha^2(G_0^d)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ для деякого $d > 0$ та справедлива оцінка*

$$\iint\limits_{G_0^d} \left(r^\alpha u_{xx}^2 + r^{\alpha-2} u_x^2 + r^{\alpha-4} u^2\right) dx \leqslant C \iint\limits_{G_0^{2d}} \left(u^2(x) + u_x^2 + r^\alpha(b^2(x) + f^2(x))\right) dx, \tag{21}$$

де $C > 0$ — стала, котра залежить тільки від n, ν, μ, μ_1, β, q, k_1, M_0, C_0, G.

Доведення. Оскільки функції $a_{ij}(x, v, w)$ неперервні, то можемо записати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$|a_{ij}(x, v, w) - a_{ij}(0, 0, 0))| < \varepsilon, \tag{22}$$

як тільки $|x| + |v| + |w| < \delta(\varepsilon)$. Остання нерівність виконується завдяки (5) та (6), для всіх $x \in G_0^{2d}$, якщо d настільки мале, що крім умов, необхідних для виконання теореми 1, вимагатимемо

$$(n-1)^{1/2} 2d + C_0(2d)^{\gamma+1} + C_0(2d)^{\gamma} < \delta(\varepsilon). \tag{23}$$

Нехай $\rho \in (0, d/2)$ і $\eta(x)$ — зрізаюча функція, така що $\eta(x) \equiv 1$ при $x \in G_\rho^{2\rho,d}$, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ при $x \in G_{\rho/2}^{4\rho,2d} \setminus G_\rho^{2\rho,d}$ і $\eta(x) \equiv 0$ при $x \notin G_{\rho/2}^{4\rho,2d}$. Запишемо тепер рівняння (1) у вигляді

$$-\Delta w(x) = F_1(x) \tag{24}$$

де $w(x) = u(x)\eta(x)$, а

$$F_1(x) = [a_{ij}(x, u, u_x) - a_{ij}(0, 0, 0)]w_{x_i x_j} + a(x, u, u_x)\eta - a_{ij}(x, u, u_x)(2u_{x_i}\eta_{x_j} + u\eta_{x_i x_j}).$$

Зробимо в рівнянні (24) заміну змінних

$$y = \rho y', \quad z = z'.$$

Функція $v(x') = w(\rho y', z')$ в шарі $G_{1/2}^{4,2d}$ задовольняє рівняння

$$-\sum_{i=1}^{2} v_{y_i' y_i'} - \rho^2 \sum_{i=1}^{n-2} v_{z_i' z_i'} + Mv(x) = F^1(x') + Mv(x),$$

де $F^1(x') = \rho^2 F_1(\rho y', z')$, $M > 0$ — деяке число. Для цього рівняння можна застосувати теорему 2 [10], якщо M — достатньо велике ($M \geqslant M^0$, M^0 залежить від ν, μ G. За цією теоремою

$$\iint\limits_{G_{1/2}^{4,2d}} \left(\sum_{i=1}^{2} v_{y_i' y_i'}^2 + \rho^4 \sum_{i=1}^{n-2} v_{z_i' z_i'}^2 \right) dy' dz' \leqslant C_1 \iint\limits_{G_{1/2}^{4,2d}} (\rho^4 F_1^2 + M^2 v^2(x)) dy' dz',$$

де $C_1 > 0$ залежить від ν, μ, G. Повернемося до попередніх змінних:

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} \left(\sum_{i=1}^{2} w_{y_i y_i}^2 + \sum_{i=1}^{n-2} w_{z_i z_i}^2 \right) dy dz \leqslant C_2 \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} (F_1^2 + \rho^{-4} w^2(x)) dy dz.$$

Крім того, $||w_{xx}||_{0,2;G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} = ||\Delta w||_{0,2;G_{\rho/2}^{4\rho,2d}}$ (див. наслідок 9.10 [9]), тому

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} w_{xx}^2 dx \leqslant C_3 \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} ([a_{ij}(x, u, u_x) - a_{ij}(0, 0, 0)]^2 w_{x_i x_j}^2 + a^2\eta^2 + u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + \rho^{-4} w^2(x)) dx.$$

Візьмемо в (22) ε таким, щоб $\varepsilon^2 C_3 < \frac{1}{2}$. Тоді, враховуючи (3), здобудемо

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} w_{xx}^2 dx \leqslant C_4 \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} (u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + u_x^4\eta^2 + (b^4(x) + f^2(x))\eta^2 + \rho^{-4} w^2(x)) dx.$$

Беручи до уваги властивості зрізаючої функції і те, що $\rho/2 \leqslant r \leqslant 4\rho$ в області $G^{4\rho,2d}_{\rho/2}$, одержимо

$$\iint\limits_{G^{2\rho,d}_{\rho}} r^{\alpha}u^2_{xx}dx \leqslant C_5 \iint\limits_{G^{4\rho,2d}_{\rho/2}} (r^{\alpha-2}u^2_x + r^{\alpha}u^4_x + r^{\alpha-4}u^2 + b^4(x) + f^2(x))dx. \tag{25}$$

Оскільки з (5) і (6) маємо

$$\iint\limits_{G^{2d}_0} (r^{\alpha-2}u^2_x + r^{\alpha}u^4_x + r^{\alpha-4}u^2)dx \leqslant C_6 \int\limits_0^{2d} (r^{\alpha+2\gamma-1} + r^{\alpha+4\gamma+1})dr < \infty,$$

то покладаючи в (25) $\rho = 2^{-k}d$ можна підсумувати (25) за всіма $k = 1, 2, \ldots$. Звідси одержимо $u \in W^2_{\alpha}(G^d_0)$.

Розглянемо тепер рівняння (24) з $w = u\eta$, де $\eta(x)$ — зрізаюча функція, така що $\eta(x) \equiv 1$ при $x \in G^d_0$, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ при $x \in G^{2d}_0 \setminus G^d_0$, і $\eta(x) \equiv 0$ при $x \notin G^{2d}_0$, причому $F_1 \in W^0_{\alpha}(G^{2d}_0)$. Для цього рівняння застосуємо оцінки (27) і (33) теореми 1а [1]

$$\iint\limits_{G^{2d}_0} (r^{\alpha}(u\eta)^2_{yz} + r^{\alpha-2}(u\eta)^2_z)dx \leqslant C_7 \iint\limits_{G^{2d}_0} r^{\alpha}F^2_1dx;$$

тут $C_7 > 0$ залежить від ν, n, α, M_0, ω_0. В наших позначеннях, враховуючи умови (С) і (3),

$$\begin{aligned}\iint\limits_{G^{2d}_0} (r^{\alpha}(u\eta)^2_{yz} + r^{\alpha-2}(u\eta)^2_z)dx \leqslant C_8 \iint\limits_{G^{2d}_0} r^{\alpha}\Big([a_{ij}(x,u,u_x) - a_{ij}(0,0,0)]^2(u\eta)^2_{x_ix_j} + \\ + u^2_x\eta^2_x + u^2\eta^2_{xx} + u^4_x\eta^2 + b^4(x)\eta^2 + f^2(x)\eta^2\Big)\, dx,\end{aligned} \tag{26}$$

де $C_8 > 0$ залежить від C_6, μ, μ_1, q, k_1. Далі розглянемо довільний переріз області G^{2d}_0 площиною $z = \mathrm{const}$ і позначимо його через $G^{2d}_0(z)$. Розглянемо на цьому перерізі рівняння, що відповідає (1)

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,u,u_x)(u\eta)_{y_iy_j} = F_2(x),$$

де

$$F_2(x) = \sum_{i=1,j=3}^{n} a_{ij}(x,u,u_x)(u\eta)_{x_ix_j} - a(x,u,u_x)\eta + a_{ij}(x,u,u_x)(2u_{x_i}\eta_{x_j} + u\eta_{x_ix_j}).$$

На підставі теореми про гладкість розв'язку в околі кутової точки (теорема 4 [3]) одержуємо

$$\begin{aligned}\iint\limits_{G^{2d}_0(z)} (r^{\alpha-2}(u\eta)^2_y + r^{\alpha-4}(u\eta)^2)dy \leqslant C_9 \iint\limits_{G^{2d}_0(z)} (u^2\eta^2 + (u\eta)^2_{yz} + \\ + u^2_x\eta^2_x + u^2\eta^2_{xx} + r^{\alpha}(b^4(x) + f^2(x))\eta^2)dy,\end{aligned}$$

де C_9 — додатна константа, що залежить від величин n, ν, μ, μ_1, β, q, k_1, M_0, M_1, G. Зінтегрувавши цю нерівність за всіма z, одержимо

$$\iint\limits_{G_0^{2d}} (r^{\alpha-2}(u\eta)_y^2 + r^{\alpha-4}(u\eta)^2)dydz \leqslant C_9 \iint\limits_{G_0^{2d}} \big(u^2\eta^2 + (u\eta)_{yz}^2 + \\ + u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + r^\alpha(b^4(x) + f^2(x))\eta^2\big)dydz.$$

Ця нерівність разом з нерівностями (22) і (26) дає

$$\iint\limits_{G_0^{2d}} (r^\alpha(u\eta)_{xx}^2 + r^{\alpha-2}(u\eta)_x^2 + r^{\alpha-4}(u\eta)^2)dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{10} \iint\limits_{G_0^{2d}} \Big(u^2\eta^2 + r^\alpha(\varepsilon^2(u\eta)_{x_ix_j}^2 + u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + u_x^4\eta^2 + b^4(x)\eta^2 + f^2(x)\eta^2)\Big)\, dx.$$

Тоді з врахуванням (6) маємо

$$\iint\limits_{G_0^{2d}} (r^\alpha(u\eta)_{xx}^2 + r^{\alpha-2}(u\eta)_x^2 + r^{\alpha-4}(u\eta)^2)dx \leqslant C_{11} \iint\limits_{G_0^{2d}} \big(\varepsilon^2 r^\alpha(u\eta)_{xx}^2 + u^2\eta^2 + \\ + r^{\alpha-2}(n-1)^{\gamma+1}(2d)^{2\gamma+2}u_x^2\eta^2 + r^\alpha(u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + b^4(x)\eta^2 + f^2(x)\eta^2)\big)\, dx.$$

Візьмемо тепер ε і d такими, щоб виконувалися нерівності

$$\varepsilon < (2C_{11})^{-1/2}, \quad d < \frac{1}{2}(n-1)^{-1/2}(2C_{11})^{-1/(2\gamma+2)}. \tag{27}$$

Тоді, враховуючи властивості зрізки і те, що $\alpha \geqslant 0$, одержимо, що, коли d задовольняє (23), (27), а також умови (7), (11), (13), (17), то виконується (21). Теорему 2 доведено.

1. Кондратьев В. А. *О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области*// Дифференц. уравн. – 1970. – Т. 6, N 10. – С. 1831-1843.
2. Борсук М. В. *Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы*// Матем. сб. – 1991. – Т. 182, N 10. – С. 1446-1462.
3. Борсук М. В. *Оценки решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического недивергентного уравнения второго порядка вблизи угловой граничной точки*// Алгебра и анализ. – 1991. – Т. 3, N 6. – С. 85-107.
4. Борсук М. В. *Оценки решений задачи Дирихле для эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы*// Дифференц. уравн. – 1994. – Т. 30, N 1. – С. 104-108.
5. Cordes H. O. *Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen*// Math. Ann. – 1956. – Vol. 131. – P. 278-312.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М., Наука, 1973.

7. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности*// Успехи матем. наук. – 1986. – Т. 41, Вып. 5. – С. 59-83.

8. Lieberman G. M. *The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations with continiosly differentiable boundary data* // Comm. Partial Differential Equations. – 1986. – Vol. 11, N 2. – P. 167-229.

9. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М., Наука, 1989.

10. Трескунов А. Л. *Точные оценки в L_p для одного класса вырождающихся уравнений 2-го порядка эллиптического типа*// Записки научных семинаров ЛОМИ. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, I. – 1967. – Т. 5.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.98