УДК 517.95

СИСТЕМИ ПАРАБОЛІЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

О. М. Бугрій

Buhrii O. M. System of parabolic variational inequalities without initial conditions in an unbounded domain. Some system of parabolic variational inequalities without initial conditions in an unbounded (with respect to all variables) domain is studied. The existence and uniqueness conditions of the solution are obtained. Behaviour of solution is $e^{\mu t}, \mu > 0$ if $t \to -\infty$ and $e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$ if $|x| \to +\infty$.

Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та систем досліджувалися раніше багатьма авторами [1] – [8], [13]. Зокрема, варіаційні нерівності без початкових умов у класах обмежених, періодичних або майже періодичних за часом функцій розглянуто у [9],[10]. У даній праці досліджено систему параболічних варіаційних нерівностей у необмеженій (за просторовими і часовою змінними) циліндричній області. Отримано умови існування та єдиності розв'язку нерівності у класі функцій, котрі можуть зростати як $e^{\mu t}, \mu > 0$ при $t \to -\infty$, і як $e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$ при $|x| \to +\infty$. Зазначимо, що аналогічні дослідження для інших параболічних нерівностей та їх систем проведено раніше у [11],[12].

Нехай $\Omega \subset R^n$ – необмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$. Позначимо $\Omega_T = \{(x,t) | t = T, x \in \Omega\}$; $Q_T = \Omega \times (-\infty, T], T < +\infty$; $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$; $u(x,t), F(x,t)$ – вектори з R^N, $A_{ij}(x,t), B_i(x,t) (i,j = \overline{1,n}), C(x,t)$ – квадратні матриці розміру $N \times N$;

$$L^{2,N}(\Omega) = \prod_{i=1}^{N} L^2(\Omega), \quad H^{1,N}(\Omega) = \prod_{i=1}^{N} H^1(\Omega),$$

$$\overset{o}{H}{}^{1,N} = \{w \in H^{1,N}(\Omega) \,|\, w(x) = 0, x \in \partial\Omega\},$$

$$L^2_{\rm loc}((-\infty, T]; B) = \{u(x,t) \,|\, u \in L^2([t_0, T]; B), \text{ майже для усіх } t_0 \in (-\infty, T]\},$$

де B – банахів простір.

Нехай V – замкнений підпростір, $\overset{o}{H}{}^{1,N}(\Omega) \subset V \subset H^{1,N}(\Omega)$; K – опукла замкнена множина в V, котра містить нульовий елемент;

$$W = \{w(x,t) \,|\, w \in L^2_{\rm loc}((-\infty, T]; V), w_t \in L^2_{\rm loc}((-\infty, T]; V^*)\}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K85.

Розглянемо задачу про знаходження функції $u(x,t)$, котра задовольняє включенням

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u \in C((-\infty,T];L^{2,N}(\Omega)) \cap L^2((-\infty,T];V),$$

$u \in W, u \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty,T]$, і варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(v_t, v-u) + \sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)u_{x_i}, v_{x_j} - u_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(\tilde{B}_i(x,t)u_{x_i}, v-u) +$$
$$+ (C(x,t)u, v-u) + \mu|v-u|^2 - (F(x,t), v-u)\Big] e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega t_1} |v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_1}\,dx, \tag{1}$$

де $\tilde{B}_i(x,t) = B_i(x,t) - 2\lambda \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x,t)\dfrac{x_i}{|x|}$, для довільних $t_1, t_2 \in (\infty, T]$, $t_1 < t_2$ і для довільних функцій $v \in W$, $v \in K$ майже для всіх $t \in (\infty, T]$.

Накладемо на коефіцієнти нерівності (1) такі умови:

(A): кофіцієнти матриць $A_{ij}(x,t)$, $(i,j=\overline{1,n})$, належать простору $L^\infty(Q_T)$; $A_{ij}(x,t) = A_{ji}(x,t)$, $(i,j=\overline{1,n})$;

$$\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)\xi^i, \xi^j) \geqslant a_0 \sum_{i=1}^{n}|\xi^i|^2, \quad a_0 > 0,$$

майже скрізь в Q_T і для всіх $\xi^i \in R^N, (i=\overline{1,n})$;

(B): елементи матриць $B_i(x,t)$, $(i=\overline{1,n})$, належать простору $L^\infty(Q_T)$;

(C): елементи матриці $C(x,t)$ належать простору $L^\infty(Q_T)$,

$$(C(x,t)\xi, \xi) \geqslant c_0|\xi|^2, \ \ c_0 > 0$$

майже скрізь в Q_T і для всіх $\xi \in R^N$.

Сформулюємо і доведемо тепер теореми існування та єдиності розв"язку варіаційної нерівності (1).

Теорема 1 (теорема єдиності). *Нехай для коефіцієнтів нерівності (1) виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**. *Тоді нерівність (1) не може мати більше одного розв'язку, котрий справджує умову*

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)e^{-2\lambda|x|+\alpha_0 t}\,dx = 0, \ \alpha_0 = \frac{4a_0c_0 - b_0}{2a_0},$$

де $b_0 = \sup\limits_{Q_T}\sum\limits_{i=1}^{n}\|\tilde{B}_i(x,t)\|^2$.

Доведення. Нехай $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$ – розв'язки нерівності (1). Визначимо оператор A рівністю

$$\langle Au, ve^{-2\lambda|x|}\rangle(t) = \int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}u_{x_i}, v_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(\tilde{B}_i u_{x_i}, v) + (Cu, v)\Big]e^{-2\lambda|x|}\,dx.$$

Очевидно, що оператор A є обмеженим оператором. Крім того,

$$\langle Au - Av, (u-v)e^{-2\lambda|x|}\rangle(t) = \int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(u_{x_i}-v_{x_i}), u_{x_j}-v_{x_j})+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\tilde{B}_i(u_{x_i}-v_{x_i}), u-v) + (C(u-v), u-v)\Bigg]e^{-2\lambda|x|}\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega_t}\Bigg[\left(a_0 - \frac{b_0\delta_0}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}-v_{x_i}|^2+$$

$$+\left(c_0 - \frac{1}{2\delta_0}\right)|u-v|^2\Bigg]e^{-2\lambda|x|}\,dx = \frac{\alpha_0}{2}\int\limits_{\Omega_t}|u-v|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx. \qquad (2)$$

Розглянемо деякі функції $u(x,t)$, $h(x,t)$, для котрих $u_t = h(x,t)$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}(v_t - h, v-u)\,e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{t_1,t_2}}(v_t - u_t, v-u)\,e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}}|v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}|v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx - \mu\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}|v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx\,dt.$$

Покладемо тут $u = u_i$, $h = f_i$, $(i = 1,2)$, $v = \dfrac{u_1+u_2}{2}$, тобто, $v - u_1 = (u_2-u_1)/2$, $v - u_2 = (u_1 - u_2)/2$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}(f_1 - f_2, u_1 - u_2)e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}}((v_t - f_2) - (v_t - f_1), u_1 -$$

$$-u_2)\,e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}}|u_1-u_2|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}}|u_1-u_2|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_1}\,dx - \mu\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}|u_1-u_2|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt. \qquad (3)$$

Покладемо в (3) $f_i = F - Au^{(i)}$, $u_i = u^{(i)}$, $(i = 1,2)$. Тоді

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\langle Au^{(1)} - Au^{(2)}, (u^{(1)}-u^{(2)})e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\mu t}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}|u^{(1)}-u^{(2)}|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt - \mu\int\limits_{Q_{t_1,t_2}}|u^{(1)}-u^{(2)}|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt \leqslant 0.$$

Звідси і з оцінки (2), позначивши через

$$y(t) = \int\limits_{\Omega_t} |u^{(1)} - u^{(2)}|^2 e^{-2\lambda|x|}\, dx,$$

отримаємо, що

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(y' - \alpha_0 y\Big) e^{2\mu t}\, dt \leqslant 0$$

для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$. Тому $y' - \alpha_0 y \leqslant 0$. Домноживши останню нерівність на $e^{\alpha_0 t}$, запишемо її у вигляді $(e^{\alpha_0 t} y)' \leqslant 0$. Після інтегрування за t по довільному відрізку $[t_1, t_2] \subset (\infty, T]$ отримаємо, що $e^{\alpha_0 t_2} y(t_2) \leqslant e^{\alpha_0 t_1} y(t_1)$. Але вираз $e^{\alpha_0 t_1} y(t_1)$ прямує до нуля при $t \to +0$. Отже, $y(t_2) \leqslant 0$ майже скрізь на $(\infty, T]$. Але $y(t) \geqslant 0$ для всіх $t \in (\infty, T]$. Тоді $y(t) = 0$ майже всюди на $(\infty, T]$. Тому $u^{(1)}(x,t) = u^{(1)}(x,t)$ майже всюди в Q_T.

Теорема 2 (теорема існування). *Нехай виконуються всі умови теореми 1 і разом з тим елементи матриць A_{ij}, B_i, $(i,j = \overline{1,n})$, C та функція F є неперервні по t майже для усіх $x \in \Omega$.*

Якщо при $\alpha_0 - 2\mu > 0$

$$M_1 = \int\limits_{Q_\tau} |F|^2 e^{-2\lambda|x| + 2\mu t}\, dx\, dt < \infty, \tau \in (-\infty, T],$$

а при $\alpha_0 - 2\mu \leqslant 0$

$$M_2 = \int\limits_{Q_T} |F|^2 e^{-2\lambda|x| + (\alpha_0 - \varkappa)t}\, dx\, dt < \infty, \quad \varkappa > 0,$$

то існує розв'язок $u(x,t)$ варіаційної нерівності (1).

Доведення. Розглянемо в $Q_{t_0,T}$ задачу

$$u_t + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon} B(u) = F_{t_0}, \tag{4}$$

$$u(x, t_0) = 0, \quad t_0 \in (\infty, T], \tag{5}$$

де $\varepsilon > 0$, $B(u) = J(u - P_k(u))$, J – оператор двоїстості між V і V^*, P_k – оператор проектування на K,

$$F_{t_0}(x,t) = \begin{cases} F(x,t), & (x,t) \in Q_{t_0,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{0,t_0}. \end{cases}$$

Зазначимо, що оператор B є обмеженим, монотонним і неперервним оператором ([9], стор. 384). За теоремою 1.2 ([9], стор. 173) існує функція $u(x,t)$, яка є розв'язком задачі (5), (6) в $Q_{t_0,T}$ і яка справджує включення $e^{-\lambda|x|}u \in L^2((t_0,T); V)$, $e^{-\lambda|x|}u_t \in L^2((t_0,T); V^*)$.

Вибираючи тепер послідовно $t_0 = T-1, T-2, \dots, T-k, \dots$, отримаємо послідовність функцій $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$, котрі є розв'язками задач (4), (5). Продовжимо кожну функцію $u^{k,\varepsilon}(x,t)$ нулем в область Q_{T-k}. Тоді для довільних k і $\tau \in (\infty, T]$ справджується рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[(u_t^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon})+\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}u_{x_i}^{k,\varepsilon},u_{x_j}^{k,\varepsilon})+\sum_{i=1}^{n}(\tilde{B}_i u_{x_i}^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon})+$$

$$+(Cu^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon})-(F,u^{k,\varepsilon})\Bigg]e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\langle Bu^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon}e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\mu t}\,dt=0.$$

Звідси

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{k,\varepsilon}|^2e^{-2\lambda|x|+2\lambda\tau}\,dx+\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\left(a_0-\frac{b_0\delta_0}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^{k,\varepsilon}|^2+\Bigg(c_0-\frac{1}{\delta_0}-\mu-$$

$$-\frac{\varkappa_0}{2}\Bigg)|u^{k,\varepsilon}|^2\Bigg]e^{-2\lambda|x|+2\lambda t}\,dx\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\langle Bu^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon}e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\lambda t}\,dt\leqslant C_1M_1. \qquad (6)$$

Нехай

$$y(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}d\tau\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{k,\varepsilon}(x,t)|^2e^{-2\lambda|x|+2\lambda t}\,dx.$$

Тоді, $y'(\tau)+(\alpha_0-2\mu-\varkappa)y(\tau)\leqslant C_1M_1$.
Розглянемо два випадки
а) $\alpha_0-2\mu>0$. Тоді з (6) легко отримуємо оцінки:

$$\int\limits_{\Omega T}|u^{k,\varepsilon}(x,\tau)|^2e^{-2\lambda|x|+2\mu\tau}\,dx\leqslant\mu_1M,\ \ \tau\in(-\infty,T],$$

$$\int\limits_{Q_T}\Bigg[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^{k,\varepsilon}(x,t)|^2+|u^{k,\varepsilon}(x,t)|^2\Bigg]e^{-2\lambda|x|+2\lambda t}\,dx\,dt\leqslant\mu_1M,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{T}\langle Bu^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon}e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\lambda t}\,dt\leqslant\mu_1\varepsilon M. \qquad (7)$$

б) $\alpha_0-2\mu\leqslant 0$. В цьому випадку

$$\left(e^{(\alpha_0-2\lambda-\varkappa)\tau}y(\tau)\right)'\leqslant\frac{1}{2\varkappa}e^{(\alpha_0-2\lambda-\varkappa)\tau}\int\limits_{Q_\tau}|F|^2e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt\leqslant C_2M_2.$$

Тому можна отримати такі ж оцінки (7), лише замість M_1 буде M_2.
Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$ (збережемо для цієї підпослідовності позначення $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$) така, що

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{k,\varepsilon}(x,t)\to e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{\varepsilon}(x,t)\quad *-\text{ слабко } \text{ в } L^{\infty}((\infty,T];L^{2,N}(\Omega));$$

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{k,\varepsilon}(x,t)\to e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{\varepsilon}(x,t)\quad\text{слабко в } L^2((-\infty,T];V).$$

Тоді функція $u^\varepsilon(x,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_t + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon}B(u) = F(x,t), \tag{8}$$

справджує включення

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^\varepsilon \in L^\infty((\infty,T];L^2(\Omega)), e^{-\lambda|x|+\mu t}u^\varepsilon \in L^2((-\infty,T];V),$$
$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u_t^\varepsilon \in L^2((-\infty,T];V^*),$$

і для неї виконуються оцінки (7).

Нехай $v \in W$, $v \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty,T]$. Оскільки $B(v) = 0$, то з (8) і монотонності оператора B отримаємо, що

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[(v_t, v - u^\varepsilon) + \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}u^\varepsilon_{x_i}, v_{x_j} - u^\varepsilon_{x_j}) + \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i u^\varepsilon_{x_i}, v - u^\varepsilon) + (Cu^\varepsilon, v - u^\varepsilon) + \mu|v - u^\varepsilon|^2 -$$
$$-(F, v - u^\varepsilon)\Bigg] e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle B(v) - B(u^\varepsilon), (v - u^\varepsilon)e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\mu t}\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |v - u^\varepsilon|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |v - u^\varepsilon|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_1}\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |v - u^\varepsilon|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |v - u^\varepsilon|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_1}\,dx \tag{9}$$

для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$.

Покажемо, що на $(-\infty,T]$ існує послідовність $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\} \subset \{u^\varepsilon(x,t)\}$ зі значеннями в $L^{2,N}(\Omega)$, одностайно неперервна на довільному відрізку $[T_1,T_2] \subset (-\infty,T]$. Справді, за лемою Фату і оцінкою (7_2) для послідовності $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ справедлива нерівність

$$\int\limits_{T_1-1}^{T_2} \liminf ||u^\varepsilon e^{-\lambda|x|}||_V^2 e^{2\mu t}\,dt \leqslant \liminf \int\limits_{Q_{T_1-1,T_2}} \left[\sum_{i=1}^n |u^\varepsilon_{x_i}|^2 + |u^\varepsilon|^2\right] e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt \leqslant \mu_2.$$

Отже, $\liminf ||u^\varepsilon(x,t)e^{-\lambda|x|}||_V^2 < \infty$ майже для всіх $t \in [T_1 - 1, T_2]$. Тоді існує таке $\hat{T} \in [T_1 - 1, T_2]$ і така підпослідовність $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\} \subset \{u^\varepsilon(x,t)\}$, що

$$\liminf ||u^\varepsilon(x,\hat{T})e^{-\lambda|x|}||^2 = \lim_{m\to\infty} ||u^{\varepsilon_m}(x,\hat{T})e^{-\lambda|x|}||^2.$$

Нехай $\hat{T} = T_1$. Тоді

$$||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{-\lambda|x|}||^2 \leqslant \mu_2 \tag{10}$$

для усіх m.

Домноживши (8) на

$$\left(u^{\varepsilon_m}(x, T_1 + \delta)e^{\mu(T_1 - t)} - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)\right)e^{-2\lambda|x|+2\mu t},$$

будемо мати:

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x, T_1+\delta)e^{\mu(T_1+\delta)} - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu T_1}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\varepsilon_m}\int\limits_{T_1}^{T_1+\delta} \langle Bu^{\varepsilon_m}, (u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m})e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\mu t}\,dt +$$

$$+2\int\limits_{Q_{T_1,T_1+\delta}} \Big[-\mu(u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)}, u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m})+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}u^{\varepsilon_m}_{x_i}, u^{\varepsilon_m}_{x_j}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m}_{x_i}) + \sum_{i=1}^{n}(\tilde{B}_i u^{\varepsilon_m}_{x_i}, u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m})+$$

$$+(Cu^{\varepsilon_m}, u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m}) + \mu|u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m}|^2 +$$

$$-(F, u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m})\Big] e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int\limits_{Q_{T_1,T_1+\delta}} \Big[\sum_{i=1}^{n}|u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)|^2 e^{2\mu t} + \sum_{i=1}^{n}|u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,T_1)|^2 e^{2\mu T_1} +$$

$$+|u^{\varepsilon_m}(x,t)|^2 e^{2\mu t} + |u^{\varepsilon_m}(x,T_1)|^2 e^{2\mu T_1} + |F|^2 e^{2\mu t}\Big]\,dx\,dt.$$

Звідси, на підставі оцінок (7), (10), властивостей оператора B та умов, накладених на F, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x, T_1+\delta)e^{\mu(T_1+\delta)} - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu T_1}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx \leqslant C_3\delta, \tag{11}$$

де стала C_3 не залежить від ε_m, хоча, можливо, залежить від T_1.

Оскільки для функції $u^{\varepsilon_m}(x,t)$ справджується нерівність (9), в нерівності (3) можна взяти

$$t_1 = T_1,\;\; t_2 = t,\;\; u_1(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t),\;\; u_2(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu\delta},$$
$$f_1(x,t) = F(x,t) - A(t)u^{\varepsilon_m}(x,t),$$
$$f_2(x,t) = F(x,t+\delta)e^{\mu\delta} - A(t+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu\delta}.$$

Тоді отримаємо, що

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\mu t} - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu(t+\delta)}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu T_1} - u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)e^{\mu(T_1+\delta)}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx +$$

$$+2\mu\int\limits_{Q_{T_1,t}} |u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\mu t} - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu(t+\delta)}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx\,dt +$$

$$+2\int\limits_{Q_{T_1,t}}(F(x,t)e^{\mu t}-F(x,t+\delta)e^{\mu(t+\delta)},u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\mu t}-$$

$$-u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu(t+\delta)})\,dx\,dt-2\int\limits_{T_1}^{t}\langle A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-$$

$$-A(\tau)u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau},(u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau})e^{-2\lambda|x|}\rangle\,d\tau=$$

$$=J_1+J_2+J_3-J_4. \tag{12}$$

Задамося довільним $\varepsilon>0$ і розглянемо окремо кожну з чотирьох складових правої частини нерівності (12).

Доданок J_1 оцінюємо за допомогою (11). Доданок J_3 з неперервності на $[T_1,T_2]$, а, отже, і рівномірної неперервності функції F можна зробити меншим за ε при досить малих $\delta>0$. J_4 перетворити за допомогою нерівності (2) до вигляду

$$J_4=2\int\limits_{T_1}^{t}\langle A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau},$$

$$(u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau})e^{-2\lambda|x|}\rangle\,d\tau+$$

$$+2\int\limits_{T_1}^{t}\langle(A(\tau+\delta)-A(\tau))u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau},(u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-$$

$$-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau})e^{-2\lambda|x|}\rangle\,d\tau\geqslant\alpha_0\int\limits_{T_1}^{t}d\tau\int\limits_{\Omega}|u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-$$

$$-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau}|^2e^{-2\lambda|x|}\,dx+2\int\limits_{T_1}^{t}\langle(A(\tau+\delta)-A(\tau))u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau},$$

$$(u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau})e^{-2\lambda|x|}\rangle\,d\tau$$

За рахунок неперервності за t елементів матриць $A_{ij},B_i(i,j=\overline{1,n})$, C ми можемо зробити другий доданок меншим за ε. Тоді з (12) будемо мати: для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta_1(0<\delta<\varepsilon)$, таке, що для усіх $\delta(0<\delta<\delta_1)$

$$\int\limits_{\Omega}|u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau}|^2e^{-2\lambda|x|}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_4\varepsilon+C_5\int\limits_{T_1}^{t}d\tau\int\limits_{\Omega}|u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau}|^2e^{-2\lambda|x|}\,dx,$$

де сталі C_4,C_5 не залежать від $\varepsilon,\delta,\varepsilon_m$. Звідси, на підставі леми Гронуола-Белмана отримуємо одностайну неперервність послідовності $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\mu t}\}$. Отже, з цієї послідовності можна вибрати підпослідовність, котра рівномірно збігається на відрізку $[T_1,T_2]$.

Якщо розглянути тепер відрізки $[T-1,T]$, $[T-2,T]$, ..., $[T-m,T]$, ...,то можна виділити таку діагональну послідовність $\{u^{m,m}(x,t)\}$, для котрої

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{m,m}(x,t) \to e^{-\lambda|x|+\mu t}u(x,t) \quad * - \text{слабко в } L^\infty((-\infty,T];L^{2,N}(\Omega));$$
$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{m,m}(x,t) \to e^{-\lambda|x|+\mu t}u(x,t) \quad \text{слабко в } L^2((-\infty,T];V);$$
$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{m,m}(x,t) \to e^{-\lambda|x|+\mu t}u(x,t) \quad \text{рівномірно в } C([T_1,T];L^{2,N}(\Omega))$$

при $m\to\infty$ для довільного $T_1 \in (-\infty,T)$. Поряд з цим очевидно, що функції $\{u^{m,m}(x,t)\}$ справджують нерівність (9) для довільних $t_1,t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1 < t_2$ і $v \in W$, $v \in K$ майже для усіх $t \in (-\infty,T]$. Крім того з нерівності (7_3) випливає, що $B(u)=0$, тому $u\in K$ майже для усіх $t \in (-\infty,T]$. Тоді, аналогічно, як в [9], стор. 407, отримаємо, що функція $u(x,t)$ є розв"язком варіаційної нерівності (1).

1. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений*// Успехи матем. наук. – 1976. – Т. 31, вып 6. – С. 142-166.
2. Олейник О. А. *О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях*// Успехи матем. наук. – 1975. – Т. 30, вып. 2. – С. 219 - 220.
3. Олейник О. А., Радкевич Е. В. *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений*// Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, вып. 4. – С. 59 - 70.
4. Бокало Н. М. // О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений// Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1989. – Вып.14. – С. 3-44.
5. Бокало Н. М. *Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности*// Сиб. матем. ж. – 1993. – Т. 34, N 4. – С. 33-40.
6. Бокало М. М., Сікорський В. М. *Задача без початкових умов для слабко нелінійних параболічних рівнянь, які сильно вироджуються в початковий момент часу*// Вісник Львів. у-ту. – 1997. – Вип. 48. – С. 35-44.
7. Ивасишен С. Д. // О параболических граничных задачах без начальных условий// Укр. матем. ж. – 1982. – Т. 34, N5. – С. 547-552.
8. Ивасишен С. Д. *О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий*// Дифференц. уравн. – 1978. – Т. 14, N 2. – С. 361 - 363.
9. Лионс Ж.- Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., Мир, 1972. – 608 с.
10. Панков А. А. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – К., Наукова думка, 1985. – 184 с.

11. Лавренюк С. П. *Параболические вариационные неравенства без начальных условий* // Диференц. уравн. – 1996. – Т. 32, N 10.

12. Лавренюк С. П. *Системи параболічних варіаційних нерівності без початкових умов* // Укр. матем. ж. – 1997. – Т. 49, N 4. – С. 540-547.

13. Bokalo M., Dmytriv V. *Problem without initial conditions for one kind of quasilinear degenerate parabolic equations* // Matematychni Studii. – 1998. – Vol.9, N 1. – P. 16-20.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.1999