УДК 517.956.3

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНІЄЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ю. І. Говда

Govda Yu. I. Mixed problems for a hyperbolic system of second order equations. Two mixed problems for a hyperbolic system of six 2nd order equations $\partial^2\vec{U}/\partial t^2+\mathrm{L}_0\vec{U}+$lower order terms$=\vec{F}$, where L_0 is a nonelliptic differential operator,

$$\mathrm{L}_0\vec{U}\equiv-\begin{pmatrix}\beta\vec{\nabla}^2\vec{u}^1+\nu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)+\gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)\\ \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)+\alpha\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2)\end{pmatrix},\quad \vec{U}(x,t)=\begin{pmatrix}\vec{u}^1(x,t)\\ \vec{u}^2(x,t)\end{pmatrix},$$

$\vec{u}^i=\mathrm{colon}\big(u^i_1,u^i_2,u^i_3\big)$, $i=1,2$, are considered. The set of equations of locally gradient elasticity may be reduced to the investigated system. Conditions of well-posedness of mixed problems in the class of almost everywhere solutions were established. Well known results about solvability of Cauchy problem for the abstract hyperbolic 2nd order equation in Hilbert space were used.

У праці розглянуто дві мішані задачі для гіперболічної системи шести рівнянь другого порядку з нееліптичним диференціальним оператором за просторовими змінними. Використовуючи результати про розв'язність задачі Коші для абстрактного гіперболічного рівняння другого порядку в гільбертовому просторі, встановлюються умови коректності мішаних задач в класі розв'язків майже скрізь.

1. Постановка задачі. В циліндрі $Q=\big\{(x,t)\in\mathbb{R}^4: x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3,\ 0<t<T\big\}$ розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}+\mathrm{L}\vec{U}+\mathrm{B}\vec{U}=\vec{F},\tag{1}$$

де Ω – скінченна область, обмежена поверхнею Γ класу C^2; $\vec{U}$, $\vec{F}$ – відповідно шукана й відома вектор-функції, визначені в $\overline{Q}$,

$$\vec{U}(x,t)=\begin{pmatrix}\vec{u}^{\,1}(x,t)\\ \vec{u}^{\,2}(x,t)\end{pmatrix},\quad \vec{F}(x,t)=\begin{pmatrix}\vec{f}^{\,1}(x,t)\\ \vec{f}^{\,2}(x,t)\end{pmatrix},$$

$\vec{u}^{\,i}=\mathrm{colon}\big(u^i_1,u^i_2,u^i_3\big)$, $\vec{f}^{\,i}=\mathrm{colon}\big(f^i_1,f^i_2,f^i_3\big)$, $i=1,2$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L55.

$$\mathrm{L}\vec{U} \equiv -\begin{pmatrix} \beta\vec{\nabla}^2\vec{u}^{\,1} + \nu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,1}) + \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2}) \\ \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,1}) + \alpha\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\alpha_0 + \alpha_*\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\vec{u}^{\,1} + \alpha_*\frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}^{\,2} \\ \alpha_*\frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}^{\,1} + \alpha_*\vec{u}^{\,2} \end{pmatrix}; \tag{2}$$

B – лінійний оператор, на який нижче буде накладена умова певної підпорядкованості оператору L; α, β, γ, ν, α_0, α_* – додатні сталі, причому $\gamma^2 \leqslant \alpha\nu$.

Зауважимо, що система рівнянь (1) є породжена моделлю локально градієнтного пружного тіла з врахуванням інерційності зміщень маси та механічного поступального руху [1]. Її характерною особливістю є те, що оператор L, який заданий співвідношенням (2), не є еліптичним.

На нижній основі циліндра ($t = 0$, $x \in \Omega$) задамо такі початкові умови

$$\vec{U}\big|_{t=0} = \vec{\Phi}(x), \qquad \frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \vec{\Psi}(x), \tag{3}$$

де

$$\vec{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}^{\,1}(x) \\ \vec{\varphi}^{\,2}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \vec{\psi}^{\,1}(x) \\ \vec{\psi}^{\,2}(x) \end{pmatrix},$$

$\vec{\varphi}^{\,i}$ =colon $\left(\varphi_1^i, \varphi_2^i, \varphi_3^i\right)$, $\vec{\psi}^{\,i}$ =colon $\left(\psi_1^i, \psi_2^i, \psi_3^i\right)$, $i = 1, 2$.

Для системи рівнянь (1) розглянемо крайові задачі з початковими умовами (3) і такими граничними умовами, що задані на бічній поверхні циліндра $S = \Gamma \times [0; T]$:

$$\vec{u}^{\,1}\big|_S = \vec{0}, \qquad \vec{u}^{\,2}\cdot\vec{n}\big|_S = 0; \tag{4_1}$$

$$\left(\beta\frac{\partial\vec{u}^{\,1}}{\partial n} + \left(\nu - \frac{\gamma^2}{\alpha}\right)(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,1})\vec{n} + \sigma\vec{u}^{\,1}\right)\bigg|_S = \vec{0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\gamma\vec{u}^{\,1} + \alpha\vec{u}^{\,2}\right)\big|_S = 0. \tag{4_2}$$

Тут $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до Γ; $\partial/\partial n$ – похідна в напрямку $\vec{n}$; σ – невід'ємна стала.

Умови коректності мішаних задач (1), (3), (4_i) для $i = 1, 2$ отримаємо, скориставшись відомими результатами [2,3] про коректність задачі Коші для абстрактного гіперболічного рівняння другого порядку в гільбертовому просторі. Для цього побудуємо самоспряжене розширення оператора L.

2. Енергетичні простори оператора L. Позначимо через $W^{\nabla}_{2,0}(\Omega)$ гільбертів простір, утворений поповненням за нормою $\|\cdot\|_{W_2^{\nabla}(\Omega)}$ простору $W_2^{\nabla}(\Omega)$ множини $\{\vec{u} \in [C^1(\overline{\Omega})]^3 : \vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{\Gamma} = 0\}$ [4].

Розглянемо оператори $\mathrm{L}_i\colon [L_2(\Omega)]^6 \to [L_2(\Omega)]^6$ $(i = 1, 2)$ з областями визначення

$$D(\mathrm{L}_1) = \{\vec{U} : \vec{u}^{\,1} \in [W^2_{2,0}(\Omega)]^3;\ \vec{u}^{\,2} \in W^{\nabla}_{2,0}(\Omega),\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2} \in W^1_2(\Omega)\}$$

та

$$D(\mathrm{L}_2) = \{\vec{U} : \vec{u}^{\,1} \in [W^2_2(\Omega)]^3;\ \vec{u}^{\,2} \in W^{\nabla}_2(\Omega),\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2} \in W^1_2(\Omega);$$
$$\vec{u}^{\,1},\ \vec{u}^{\,2}\ \text{задовольняють на}\ \Gamma\ \text{умови}\ (4_2)\}$$

відповідно, що задані співвідношенням (2). При цьому під похідними від $\vec{u}^{\,1}$ розуміємо узагальнені похідні, а під $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2}$ – узагальнену дивергенцію [4], і в оператор градієнта від $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2}$ входять узагальнені похідні.

Враховуючи формулу для знаходження узагальненої дивергенції від добутку скалярної та векторної функцій [4], неважко переконатись у тому, що оператори L_i є симетричними додатно визначеними операторами ($i = 1,2$). Через H_{L_i} позначимо енергетичний простір [5, с.65] оператора L_i, а через $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{L}_i}$ та $\|\cdot\|_{\mathrm{L}_i}$ відповідно – скалярний добуток і норму в ньому ($i = 1,2$). Скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{L}_i}$ задаються співвідношеннями

$$(\vec{U},\vec{V})_{\mathrm{L}_1} = I(\vec{U},\vec{V}) + \int\limits_{\Omega}\Big[\alpha_0\vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,1} + \alpha_*\Big(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,1} + \frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}^{\,2}\cdot\vec{v}^{\,1} + \frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,1}\Big)\Big]\,dx,$$

$$(\vec{U},\vec{V})_{\mathrm{L}_2} = (\vec{U},\vec{V})_{\mathrm{L}_1} + \sigma\int\limits_{\Gamma}\vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,1}\,dx,$$

де

$$I(\vec{U},\vec{V}) = \int\limits_{\Omega}\Big[\beta\sum_{j=1}^{3}(\vec{\nabla}u_j^1)\cdot(\vec{\nabla}v_j^1) + \nu(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,1})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^{\,1}) +$$
$$+\gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^{\,1}) + \gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,1})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^{\,2}) + \alpha(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^{\,2})\Big]\,dx.$$

З умов, накладених на коефіцієнти оператора L, та з еквівалентних нормувань простору Соболєва $W_2^1(\Omega)$ [6, с.158] випливає еквівалентність норм $\|\cdot\|_{\mathrm{L}_i}$, $i = 1,2$, та норми $|\!|\!|\cdot|\!|\!| = \sqrt{\|\cdot\|^2_{[W_2^1(\Omega)]^3} + \|\cdot\|^2_{W_2^{\nabla}(\Omega)}}$ простору $[W_2^1(\Omega)]^3 \times W_2^{\nabla}(\Omega)$. Таким чином, H_{L_i} збігається з поповненням за нормою $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ множини $D(\mathrm{L}_i)$, $i = 1,2$. Звідси, беручи до уваги твердженя [7, с.44] про множини щільні в $W_2^1(\Omega)$, отримуємо:

$$H_{\mathrm{L}_1} = \big[\mathring{W}_2^1(\Omega)\big]^3 \times W_{2,0}^{\nabla}(\Omega), \quad H_{\mathrm{L}_2} = \big[W_2^1(\Omega)\big]^3 \times \widetilde{W}_2^{\nabla}(\Omega),$$

де $\widetilde{W}_2^{\nabla}(\Omega)$ – гільбертів простір, утворений замиканням в нормі $\|\cdot\|_{W_2^{\nabla}(\Omega)}$ множини $[C^1(\overline{\Omega})]^3$.

Зауваження 1. Можна довести, що, коли Ω (без припущення гладкості межі) задовольняє умову локальних зсувів [8, с.315], то $\widetilde{W}_2^{\nabla}(\Omega) = W_2^{\nabla}(\Omega)$.

Зауваження 2. На елементах простору $W_2^{\nabla}(\Omega)$ визначений лінійний неперервний оператор $\gamma_n\colon W_2^{\nabla}(\Omega) \to W_2^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, який функції $\vec{u}$ з $W_2^{\nabla}(\Omega)$ ставить у відповідність її нормальну складову на межі $\vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{\Gamma}$ як елемент простору $W_2^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, причому для достатньо гладких функцій $\gamma_n\vec{u}$ дорівнює звуженню $\vec{u}\cdot\vec{n}$ на Γ [9, с.16].

Зауваження 3. З теореми 1.3 [9, с.19] випливає, що $\vec{u}$ є елементом простору $W_{2,0}^{\nabla}(\Omega)$ тоді і лише тоді, коли $\vec{u}$ належить $W_2^{\nabla}(\Omega)$ і для довільної функції $w \in W_2^1(\Omega)$ справедливо

$$\int\limits_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot[w\vec{u}]\,dx = 0.$$

3. Самоспряжене розширення оператора L. Розглянемо операторне рівняння

$$\mathrm{L}_i\vec{U} = \begin{pmatrix}\vec{g}^{\,1}\\ \vec{g}^{\,2}\end{pmatrix}, \tag{5_i}$$

$i = 1,2$. Очевидно, що $\vec{U}$ є розв'язком рівняння (5_i) тоді і лише тоді, коли $\vec{u}^{\,1}$, $\vec{u}$ є розв'язками, відповідно, операторних рівнянь

$$\mathrm{l}'_i\vec{u}^{\,1} \equiv -\beta\vec{\nabla}^2\vec{u}^{\,1} - \left(\nu - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,1}) + \alpha_0\vec{u}^{\,1} = \vec{h},$$
$$\mathrm{l}''_i\vec{u} \equiv -\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \frac{\alpha_*}{\alpha}\vec{u} = \vec{g}^{\,2}, \quad i = 1,2,$$

де

$$\vec{h} \equiv \vec{g}^{\,1} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{g}^{\,2}, \quad \vec{u} \equiv \gamma\vec{u}^{\,1} + \alpha\vec{u}^{\,2}, \quad D(\mathrm{l}'_1) = [W^2_{2,0}(\Omega)]^3,$$

$$D(\mathrm{l}'_2) = \{\vec{u}^{\,1} \in [W^2_2(\Omega)]^3 : \vec{u}^{\,1}\text{задовольняє на } \Gamma \text{ першу з умов}(4_2)\},$$

$$D(\mathrm{l}''_1) = \{\vec{u}^{\,2} \in W^{\nabla}_{2,0}(\Omega) : \vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2} \in W^1_2(\Omega)\}, \quad D(\mathrm{l}''_2) = \{\vec{u} \in W^{\nabla}_2(\Omega) : \vec{\nabla}\cdot\vec{u} \in \mathring{W}^1_2(\Omega)\}.$$

Можна показати, що для рівнянь $\mathrm{l}'_i\vec{u}^{\,1} = \vec{h}$ виконуються всі умови теореми 6.1 з праці [10]. Тому областями значень $R(\mathrm{l}'_i)$ операторів l'_i для $i = 1,2$ буде весь простір $[L_2(\Omega)]^3$.

Зрозуміло, що оператори $\mathrm{l}''_i : [L_2(\Omega)]^3 \to [L_2(\Omega)]^3$ є симетричними і додатно визначеними $(i = 1,2)$. Через $H_{\mathrm{l}''_i}$ позначимо енергетичний простір оператора l''_i, а через $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{l}''_i}$ та $\|\cdot\|_{\mathrm{l}''_i}$ — скалярний добуток і норму в ньому. При цьому скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{l}''_i}$ задаються співвідношенням

$$(\vec{u},\vec{v})_{\mathrm{l}''_i} = \int\limits_\Omega \left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \frac{\alpha_*}{\alpha}\vec{u}\cdot\vec{v}\right] dx, \quad i = 1,2.$$

З еквівалентності норм $\|\cdot\|_{\mathrm{l}''_i}$ та $\|\cdot\|_{W^{\nabla}_2(\Omega)}$ отримуємо: $H_{\mathrm{l}''_1} = W^{\nabla}_{2,0}(\Omega)$, $H_{\mathrm{l}''_2} \subset W^{\nabla}_2(\Omega)$.

Лема. *Оператори* l''_i *є самоспряженими* $(i = 1,2)$.

Доведення. Для симетричного додатно визначеного оператора існує жорстке самоспряжене розширення [11, с.220]. Таке розширення оператора l''_i позначимо $\widetilde{\mathrm{l}}''_i$. Для доведення леми достатньо показати, що $D(\mathrm{l}''_i) = D(\widetilde{\mathrm{l}}''_i)\,(i = 1,2)$. Зрозуміло, що $D(\mathrm{l}''_i) \subset D(\widetilde{\mathrm{l}}''_i)$. Доведемо, що $D(\mathrm{l}''_i) \supset D(\widetilde{\mathrm{l}}''_i)$. Нехай $\vec{v}$ – довільна функція з $D(\widetilde{\mathrm{l}}''_i)$. Враховуючи, що $D(\widetilde{\mathrm{l}}''_i) \subset H_{\mathrm{l}''_i}$, для довільної функції $\vec{u} \in \left[\dot{C}^2(\Omega)\right]^3 \subset D(\mathrm{l}''_i)$ маємо

$$\int\limits_\Omega (\widetilde{\mathrm{l}}''_i\vec{u})\cdot\vec{v}\,dx = \int\limits_\Omega (\mathrm{l}''_i\vec{u})\cdot\vec{v}\,dx = \int\limits_\Omega \left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \frac{\alpha_*}{\alpha}\vec{u}\cdot\vec{v}\right] dx = \int\limits_\Omega \vec{u}\cdot(\widetilde{\mathrm{l}}''_i\vec{v})\,dx, \tag{6}$$

$$\int\limits_\Omega (\vec{\nabla}\cdot\vec{u})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\,dx = \int\limits_\Omega \vec{u}\cdot\vec{w}\,dx, \tag{7}$$

де $w = \widetilde{\mathrm{l}}''_i\vec{v} - \frac{\alpha_*}{\alpha}\vec{v}$, $i = 1,2$. Із довільності $\vec{u}$ в рівності (7) випливає, що $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \in W^1_2(\Omega)$, і, отже, $D(\widetilde{\mathrm{l}}''_1) \subset D(\mathrm{l}''_1)$, $D(\widetilde{\mathrm{l}}''_2) \subset \left\{\vec{u} \in \widetilde{W}^{\nabla}_2(\Omega) : \vec{\nabla}\cdot\vec{u} \in W^1_2(\Omega)\right\}$. Самоспряженість оператора l''_1 доведено.

З (6) випливає, що для довільної функції $\vec{u} \in [C^2(\overline{\Omega})]^3$, яка задовольняє умові $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\big|_\Gamma = 0$, справедливо

$$\int\limits_\Gamma (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})(\vec{n}\cdot\vec{u})\,dx = 0. \tag{8}$$

Тому для завершення доведення досить показати, що множина функцій $\{\vec{u}_\Gamma \in [C^2(\Gamma)]^3 : \exists \vec{u} \in [C^2(\overline{\Omega})]^3$, що $\vec{u}\big|_\Gamma = \vec{u}_\Gamma$ і $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\big|_\Gamma = 0\}$ щільна в $[L_2(\Gamma)]^3$.

Нехай $\vec{\varphi}$ – довільна функція з $[L_2(\Gamma)]^3$, а ε – довільна додатна стала. Тоді існує $\vec{\psi}_\Gamma \in [C^2(\Gamma)]^3$ така, що $\|\vec{\varphi} - \vec{\psi}_\Gamma\|_{[L_2(\Gamma)]^3} < \varepsilon$, для якої існує функція $\vec{\psi} \in [C^2(\overline{\Omega})]^3$, що є продовженням $\vec{\psi}_\Gamma$ в Ω [6, с.141]. Як випливає з [7, с.44], $\vec{\psi}$ можна наблизити в нормі простору $[W_2^1(\Omega)]^3$ функцією $\vec{\omega} \in [C^2(\overline{\Omega})]^3$ такою, що $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}\big|_\Gamma = 0$. Враховуючи еквівалентні нормування простору $[W_2^1(\Omega)]^3$, маємо $\|\vec{\psi} - \vec{\omega}\|_{[L_2(\Gamma)]^3} < c\|\vec{\psi} - \vec{\omega}\|_{[W_2^1(\Omega)]^3} < c\varepsilon$. Тому справедлива оцінка: $\|\vec{\varphi} - \vec{\omega}\|_{[L_2(\Gamma)]^3} \leqslant \|\vec{\varphi} - \vec{\psi}_\Gamma\|_{[L_2(\Gamma)]^3} + \|\vec{\psi} - \vec{\omega}\|_{[L_2(\Gamma)]^3} < (1+c)\varepsilon$, з використанням якої на підставі рівності (8) отримуємо $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\big|_\Gamma = 0$. Отже, $D(\widetilde{\mathrm{l}}_2'') \subset D(\mathrm{l}_2'')$. Лему доведено.

Із самоспряженості та додатної визначеності оператора l_i'', маємо: $R(\mathrm{l}_i'') = [L_2(\Omega)]^3$ для $i = 1,2$ [12, с.563]. Тому, враховуючи що $R(\mathrm{l}_i') = [L_2(\Omega)]^3$, отримуємо $R(\mathrm{L}_i) = [L_2(\Omega)]^6$ $(i = 1,2)$. Звідси, беручи до уваги симетричність операторів L_i, випливає, що L_i є самоспряженими [12, с.562].

4. Формулювання основних теорем.

Означення. Нехай функція $\vec{U}$ справджує умови:

1) $\partial^2\vec{U}/\partial t^2 \in C([0;T], [L_2(\Omega)]^6)$;
2) $\partial\vec{U}/\partial t \in C([0;T], H_{\mathrm{L}_i})$;
3) $\vec{U}(\cdot, t) \in D(\mathrm{L}_i)$ для довільного $t \in [0;T]$;
4) $\vec{U}$ задовольняє початкові умови (3);
5) $\vec{U}$ на $[0;T]$ є розв'язком системи

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} + \mathrm{L}_i\vec{U} + \mathrm{B}\vec{U} = \vec{F}.$$

Тоді $\vec{U}$ будемо називати розв'язком майже скрізь задачі $(1),(3),(4_i)$; $i = 1,2$.

Враховуючи, що L_i є самоспряженим додатно визначеним оператором, з теореми 1.5 [2, с.301] та теореми 4.2 [3, с.152] випливає справедливість таких тверджень.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) оператор $\mathrm{L}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{B}: [L_2(\Omega)]^6 \to [L_2(\Omega)]^6$ *є обмеженим;*
2) $\vec{F} \in C([0;T], H_{\mathrm{L}_i})$;
3) $\vec{\Phi} \in D(\mathrm{L}_i)$, $\vec{\Psi} \in H_{\mathrm{L}_i}$.

Тоді існує єдиний розв'язок майже скрізь задачі $(1),(3),(4_i)$; $i = 1,2$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

1) $D(\mathrm{B}) \supset H_{\mathrm{L}_i}$ *і* $\|\mathrm{B}\vec{U}\|_{[L_2(\Omega)]^6} \leqslant c\|\vec{U}\|_{\mathrm{L}_i}$ *при* $\vec{U} \in H_{\mathrm{L}_i}$;
2) $\vec{F} \in W_1^1((0;T), [L_2(\Omega)]^6)$;
3) $\vec{\Phi} \in D(\mathrm{L}_i)$, $\vec{\Psi} \in H_{\mathrm{L}_i}$.

Тоді існує єдиний розв'язок майже скрізь задачі $(1),(3),(4_i)$, *і для нього справедлива* *оцінка*

$$\left\|\frac{\partial^2\vec{U}(\cdot,t)}{\partial t^2}\right\|_{[L_2(\Omega)]^6}+\left\|\frac{\partial\vec{U}(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{L_i}+\|\,\mathrm{L}_i\vec{U}(\cdot,t)\|_{[L_2(\Omega)]^6}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|\,\mathrm{L}_i\vec{\Phi}\|_{[L_2(\Omega)]^6}+\|\vec{\Psi}\|_{\mathrm{L}_i}+\|\vec{F}(\cdot,0)\|_{[L_2(\Omega)]^6}+\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial\vec{F}(\cdot,\tau)}{\partial\tau}\right\|_{[L_2(\Omega)]^6}d\tau\right),\quad t\in[0;T];$$

$i=1,2.$

1. Бурак Я. Й., Говда Ю. І., Нагірний Т. С. *Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень* // Доп. НАН України. – 1996. – N 2. – С.39-43.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М., Наука, 1967. – 464 с.
3. Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. – Баку, Элм, 1985. – 220 с.
4. Говда Ю. І. *Про енергетичні простори одного додатно визначеного оператора* // Мат. студії. – 1998. – Т.10, N 1. – С.79-84.
5. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. – М., Высш. шк., 1977. – 432 с.
6. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М., Наука, 1983. – 424 с.
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев, Наук.думка, 1965. – 800 с.
8. Бесов О.В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М., Наука, 1975. – 480 с.
9. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М., Мир, 1981. – 408 с.
10. Агранович М. С., Вишик М. И. *Эллиптические граничные задачи с параметром и параболические задачи общего вида* // Успехи матем. наук. – 1964. – Т.19, N 3. – С.53-161.
11. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна. – М., Наука, 1972. – 544 с.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т.V. – М., Физматгиз, 1959. – 656 с.

Стаття надійшла до редколегії 07.12.98