УДК 517.983

ПРО РЕЗОЛЬВЕНТИ НЕСТАНДАРТНИХ РІЗНИЦЕВИХ ОПЕРАТОРІВ

Ю. М. Яворський

Yavorsky Yu. M. On resolvents of nonstandard difference operators. This paper extends research of V.E. Lyantse and the author. A formula which relates to resolvents of Sturm-Liouville operators on the whole axe and semiaxes is given. This result is used for a proof of nearstandardness of fundamental functions of the operator on the whole axe.

Дана робота виконана в рамках версії Нельсона нестандартного аналізу (див. [5]). Позначення і термінологія в основному такі, як і в [1]. Результати, які стосуються операторів на півосі викладені в [2], [3] і [4].

1. Розглянемо різнецевий вираз

$$lx(t) = -\frac{1}{2}\left[x(t-1) + x(t+1)\right] + a(t)x(t), \tag{1}$$

де незалежна змінна t пробігає цілі значення ($t \in \mathbb{Z}$), $t \mapsto a(t)$ – задана функція (потенціал). Задамо натуральне число m і позначимо

$$T := \{t \in \mathbb{Z} : -m < t < m\}, \quad T_- := \{t \in T : t \leqslant -1\}, \quad T_+ := \{t \in T : t \geqslant 1\}. \tag{2}$$

Нехай L, L_-, L_+ – оператори, котрі діють в лінійних просторах, відповідно, $\mathbb{C}^T$, $\mathbb{C}^{T_-}$, $\mathbb{C}^{T_+}$, породжуються різницевим виразом (1) і нульовими крайовими умовами, відповідно,

$$x(-m) = 0, \quad x(m) = 0, \tag{3}$$

$$x(\mp m) = 0, \quad x(0) = 0. \tag{$3_\mp$}$$

Наприклад, L_+ діє таким чином

$$L_+x(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x(2) + a(1)x(1) & \text{при} \quad t = 1, \\ lx(t) & \text{при} \quad 1 < t < m-1, \\ -\dfrac{1}{2}x(m-2) + a(m-1)x(m-1) & \text{при} \quad t = m-1. \end{cases}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 46S20, 47B39.

У цій праці виведено формулу, яка виражає резольвенту оператора L через резольвенти операторів L_- і L_+. Отриманий результат дозволяє довести колостандартність власних і приєднаних функцій оператора L, які відповідають так званим побічним власним значенням (в припущенні, що натуральне число m (див. (2)) є нестандартним, тобто нескінченним).

2. Позначимо через z^-, z^+ – розв'язки рівняння $(l-\xi)z=0$, котрі визначаються початковими умовами

$$z^-(-m)=0, \quad z^-(-m+1)=\sigma^{-m+1}-\sigma^{-m-1}, \tag{4_-}$$

$$z^+(m)=0, \quad z^+(m-1)=\sigma^{-m+1}-\sigma^{-m-1}. \tag{4_+}$$

Тут і далі комплексні параметри ξ і σ пов'язані співвідношенням

$$\xi=-\frac{1}{2}\left(\sigma+\sigma^{-1}\right). \tag{5}$$

Позначимо через $w(\xi)$ вронскіан розв'язків z^-, z^+

$$w(\xi)=z^-(t)z^+(t+1)-z^+(t)z^-(t+1). \tag{6}$$

Зазначимо, що він не залежить від t і, що власні значення оператора L збігаються з нулями цього вронскіана

$$\lambda\in\sigma(L)\Leftrightarrow w(\lambda)=0. \tag{7}$$

Для ξ, яке не є власним значенням операторів L_- і L_+, визначимо функціонал K_ξ на лінійному просторі $\mathbb{C}^T$ формулою

$$\forall f\in\mathbb{C}^T \quad K_\xi(f):=(L_--\xi)^{-1}f(-1)+(L_+-\xi)^{-1}f(1)+2f(0). \tag{8}$$

2.1. Теорема. *Нехай ξ – резольвентне значення операторів L, L_-, L_+ (зокрема $w(\xi)\neq 0$). Тоді $\forall f\in\mathbb{C}^T$*

$$(L-\xi)^{-1}f(t)=\begin{cases}(L_--\xi)^{-1}f(t)-\dfrac{1}{w(\xi)}K_\xi(f)z^+(0)z^-(0) & t\leqslant 0,\\ (L_+-\xi)^{-1}f(t)-\dfrac{1}{w(\xi)}K_\xi(f)z^-(0)z^+(0) & t\geqslant 0.\end{cases} \tag{9}$$

(Тут $z^\mp(t)=z^\mp(t,\xi)$). Нехай λ – власне значення оператора L, але резольвентне значення операторів L_-, L_+. Тоді рівняння $(L-\lambda)u=f$ має розв'язок якщо і тільки якщо функція f є ортогональна до функціоналу K_λ:

$$K_\lambda(f)=0. \tag{10}$$

У такому випадку загальний розв'язок рівняння $(L-\lambda)u=f$ має вигляд

$$u(t)=\begin{cases}(L_--\xi)^{-1}f(t)+Cz^+(0)z^-(t) & t\leqslant 0,\\ (L_+-\xi)^{-1}f(t)+Cz^-(0)z^+(t) & t\geqslant 0,\end{cases} \tag{11}$$

де C – довільна стала. (Тут $z^\mp(t)=z^\mp(t,\lambda)$).

Доведення. Розв'язок u рівняння $(L-\xi)u=f$ будемо шукати у вигляді

$$u(t)=\begin{cases}v^-(t)+C_-z^-(t) & t\leqslant 0,\\ v^+(t)+C_+z^+(t) & t\geqslant 0,\end{cases} \tag{12}$$

де C_-, C_+ – сталі, а

$$v^{\mp} := (L_{\mp} - \xi)^{-1} f. \tag{12'}$$

Зазначимо, що функція u вигляду (12) автоматично задовольняє рівняння $(l-\xi)u(t) = f(t)$ при $t \neq 0$ і крайові умови $u(-m) = 0 = u(m)$. Тому слід з'ясувати тільки, чи сталі C_-, C_+ можна вибрати так, щоб

$$u(-0) = u(+0) \tag{13}$$

і

$$(l - \xi)u(0) = f(0). \tag{14}$$

Оскільки ξ не є власним значенням операторів L_-, L_+, то $z^{\mp}(0) \neq 0$ (бо $z^{\mp}(\mp m) = 0$). Тому умова (13) виконується тоді і лише тоді, коли $C_- = Cz^+(0)$, $C_+ = Cz^-(0)$, де C – певна стала. Визначаючи цю сталу з рівності (14), отримуємо

$$\alpha(\xi)C = -v^-(-1) + v^+(1) - 2f(0), \tag{15}$$

де $\alpha(\xi) := z^+(0)z^-(-1) + z^-(0)z^+(1) - 2\,[a(0) - \xi]\, z^-(0)z^+(0)$. Використовуючи те, що $z^{\pm}$ – розвязки рівняння $(l - \xi)z = 0$, після нескладних перетворень знаходимо, що $\alpha(\xi)$ збігається з вронскіаном (6). Тому, використовуючи (8), рівняння (15) (для знаходження сталої C) можемо переписати у вигляді

$$w(\xi)C = -K_\xi(f). \tag{15'}$$

Якщо ξ – резольвентне значення оператора L, тобто $w(\xi) \neq 0$, то $C = -\frac{1}{w(\xi)} K_\xi(f)$ і формула (12) перетвориться в формулу (9). Коли $\xi = \lambda$ є власним значенням для L, тобто $w(\lambda) = 0$, то рівняння (15′) може виконуватися лише при умові (10) і тоді це рівняння задовольняє довільне C.

2.2. Зауваження. *Резольвенти $(L_{\mp} - \xi)^{-1}$ виражаються через фундаментальну систему розв'язків різницевого рівняння $(l - \xi)z = 0$ (див. [2], або [4]). Використовуючи* (9), *легко отримати формулу, яка виражає резольвенту $(L-\xi)^{-1}$ через таку фундаментальну систему.*

3. Поки що наші міркування залишались в рамках звичайної лінійної алгебри. Далі нас цікавить випадок, коли число m ("довжина" T дорівнює $2m - 1$) є нестандартним ($m \in \mathbb{N} \setminus {}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$), тобто воно нескінченне: $m \approx \infty$. При такому припущенні лінійні простори $\mathbb{C}^T$, $\mathbb{C}^{T_-}$, $\mathbb{C}^{T_+}$ є нестандартними. Тому для їх елементів поняття стандартності чи колостандартності (в сенсі Нельсона) не визначені. Використаємо ці поняття в *умовному* сенсі, так як викладено в [1].

3.1. Означення. *Лінійний простір $\mathbb{C}^T$ розглянемо як гільбертовий зі скалярним добутком*

$$(x|y) = \sum_{t \in T} x(t)\overline{y(t)}. \tag{16}$$

і нормою $\|x\| = (x|x)^{1/2}$. Нехай $f \in \mathbb{C}^T$, через ${}^\bullet f$ позначимо стандартне продовження на $\mathbb{Z}$ звуження $f|_{{}^{\mathrm{st}}\mathbb{Z}}$ функції f на множину ${}^{\mathrm{st}}\mathbb{Z}$ стандартних цілих чисел. Функція f називається (умовно) стандартною, якщо $\forall t \in T$ $f(t) = ({}^\bullet f)(t)$. Вона називається (умовно) колостандартною, якщо існує така стандартна функція $g \in \mathbb{C}^T$, що $\|f -$

$g\| \approx 0$. У такому випадку функція g едина, позначається через $^\circ f$ і називається тінню функції f.

Аналогічні позначення вводяться для елементів просторів $\mathbb{C}^{T_-}$ і $\mathbb{C}^{T_+}$.

3.2. Означення. *Функція $f \in \mathbb{C}^T$ називається s-інтегровною, якщо*

$$\sum_{t\in T} |f(t)| \ll \infty \quad i \quad \forall n \approx \infty \quad \sum_{|t|>n} |f(t)| \approx 0.$$

Відомим є наступне (див. [4]).

3.3. Твердження. *Функція $f \in \mathbb{C}^T$ є колостандартною (в сенсі означення 3.1), якщо і тільки якщо функція $t \rightarrowtail |f(t)|^2$ – s-інтегровна. Надалі вважатимемо, що потенціал a в різницевому виразі (1) є s-інтегровна функція.*

3.4. Наслідок. *Нехай $\xi \in \mathbb{C}$ лежить зовні деякого стандартного околу відрізка $[-1,1]$ в комплексній площині і не є власним значенням операторів L, L_-, L_+. Тоді функція $(L-\xi)^{-1}f$ – колостандартна, якщо f – колостандартна.*

Доведення. При умові, накладеній на потенціал a, аналогічне твердження доведено в [4] для резольвент $(L_\pm - \xi)^{-1}$. Там же показано, що звуження $z^-(z^+)$ на "піввісь" $T_-(T_+)$ є колостандартним, як елемент (гільбертового) простору $\mathbb{C}^{T_-}(\mathbb{C}^{T_+})$. Безпосередньо з формули (8) видно, що $|K_\xi(f)| \ll \infty$, якщо функція f колостандартна. Крім того, зовні стандартного околу спектра $\sigma(L)$ маємо $|w(\xi)| \gg 0$. Тому на підставі формули (9) заключаємо, що резольвента $(L-\xi)^{-1}$ зберігає (умовну) колостандартність.

3.5. Означення. *Власне значення λ оператора L називається побічним, якщо його відстань до відрізка $[-1,1] \subset \mathbb{C}$ не є нескінченно малою:* $\operatorname{dist}(\lambda, [-1,1]) \gg 0$.

3.6. Зауваження. *Так само, як в [4] можна довести, що кількість побічних власних значень оператора L (включаючи їх алгебраїчну кратність) є стандартне натуральне число. Зазначимо, що загальна кількість власних значень (з врахуванням алгебраїчної кратності) дорівнює* $\dim \mathbb{C}^T = 2m \approx \infty$.

Далі нам зручно скористатись наступним твердженням.

3.7. Лема. *Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$ – побічне власне значення оператора L, але резольвентне значення операторів L_-, L_+. Припустимо, що $f \in \mathbb{C}$ така колостандартна функція, що рівняння $(L-\xi)u = f$ має розв'язок u. Тоді воно має колостандартний розв'язок u.*

Доведення. випливає безпосередньо з теореми 2.1. Справді, функція u, визначена формулою (11) буде колостандартною для довільного C такого, що $|C| \ll \infty$ (наприклад, для $C = 0$).

3.8. Теорема. *Нехай λ – побічне власне значення оператора L, але резольвентне значення для операторів L_-, L_+. Тоді підпростір N_λ власних і приєднаних функцій оператора L має базу, елементи якої колостандартні.*

Доведення. З оцінок для функцій $t \rightarrowtail z^\pm(t) = z^\pm(t,\lambda)$, отриманих в [3], випливає, що звуження z^- на T_-, а також z^+ на T_+ – s-інтегровне з квадратом, тобто є колостандартним елементом простору, відповідно, $\mathbf{C}^{T_-}$ і $\mathbf{C}^{T_+}$. Власна функція z оператора L, котра відповідає власному значенню λ, визначається формулою

$$z(t,\lambda) = \begin{cases} z^-(t,\lambda) & t \leqslant 0, \\ Cz^+(t,\lambda) & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{17}$$

де сталу C треба вибрати з умови $z^-(0,\lambda) = Cz^+(0,\lambda)$. При наших припущеннях $|z^+(0,\lambda)| \gg 0$, тому $|C| \ll \infty$. Тому з (17) випливає колостандартність функції z. Колостандартність приєднаних функцій випливає з леми 3.7, якщо їх знаходити за індукцією з рівняння $(L-\xi)z_{k+1} = z_k$, $z_0 = z$.

3.9. Зауваження. *Теорема 3.8 свідчить про те, що побічні власні значення є справжніми (аутентичними) в тому розумінні, що їм відповідають s-інтегровні з квадратом власні і приєднані функції. Власні значення оператора L, які не є побічними, природно вважати точками "неперервного" спектра, не тільки тому, що вони нескінченно близькі між собою, але й тому, що їм відповідають власні функції, які не є s-інтегровними з квадратом. Згадаємо, що власні функції неперервного спектра диференціального оператора не є елементами гільбертового простору, в якому діє оператор.*

З теореми 3.8 випливає також, що спектральний проектор P_λ, який відповідає власному значенню λ, є *s-компактним*, тобто $P_\lambda f$ – колостандартна функція при умові, що $\|f\| \ll \infty$.

1. Lyantse V. E., Kudryk T. Introduction to Nonstandard Analysis. – Math. Studii. Monograph Series. – Vol. 3. – VNTL Publ. 1997. – 255 p.
2. Lyantse V. E., Yavorsky Yu. M. *A nonstandard Difference Sturm-Liouville operator* // Bull. Polish. Acad. Sc. – 1998. – Vol. 46, № 3. – P. 285-290.
3. Lyantse V. E., Yavorsky Yu. M. *Nonstandard Sturm-Liouville Difference operator. I* // Matematychni Studii. – 1998. – Vol. 10, N 1. – P. 54-68.
4. Lyantse V. E., Yavorsky Yu. M. *Nonstandard Sturm-Liouville Difference operator. II* // Matematychni Studii. – 1999. – Vol.10, N 1. – C. 71-82.
5. Nelson E. *Internal Set Theory* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – Vol. 83. – P. 1165-1198.

Стаття надійшла до редколегії 03.11.1998