УДК 515.12

ПРО ФУНКТОРІАЛЬНІ ТОПОЛОГІЗАЦІЇ І ФУНКТОРІАЛЬНІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ СТРУКТУРИ НА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

В. С. Левицька

Levytska V. S. On functorial topologies and functorial differentiable structures on function spaces. We consider some problems concerning existence of functorial topologizations of the set of continuous functions and functorial differentiable structures on function spaces that are infinite-dimensional manifolds.

1. Вступ

Різним топологіям на просторах неперервних відображень топологічних просторів присвячено багато праць (див. [1]). В препринті [5] розглянуто теорію функціональних просторів з категорної точки зору.

Оскільки простори неперервних відображень є, як правило, нескінченновимірними об'єктами, їх дослідження проводились також в рамках нескінченновимірної топології. В праці [7] цілий розділ присвячено проблемам, що стосуються функціональних просторів. Зміст даної статті якраз і пов'язано з двома такими проблемами.

Нехай $\mathfrak{l}^2$ — сепарабельний гільбертовий простір і $B(n)$ — куля радіуса n в $\mathfrak{l}^2$. За теоремою Банаха-Алаоглу, куля $B(n)$ компактна в слабкій топології (позначаємо її $(B(n), \mathrm{w})$). Позначимо через $(\mathfrak{l}^2, \mathrm{bw})$ пряму границю послідовності компактів $(B(n), \mathrm{w})$, $n \in \mathbb{N}$ (bw від bounded weak). Відомо, що для досить широкого класу просторів X і Y множина неперервних відображень $C(X, Y)$ в компактно-відкритій топології гомеоморфна $\mathfrak{l}^2$-многовидові, зокрема, просторові $\mathfrak{l}^2$. Проблема полягає в тому, чи існує природна топологізація множини $C(X, Y)$, яка перетворює цю множину в $(\mathfrak{l}^2, \mathrm{bw})$-многовид.

Припустимо, що, крім того, простір Y має структуру C^∞-многовиду. Відомо, що тоді простір $C(X, Y)$ має природну структуру C^∞-$\mathfrak{l}^2$-многовиду [3]. Більше того, в [3] запроваджено структуру C^s-многовиду на просторах $\mathcal{C}^r(X, Y)$ з компактного C^r-многовиду X в многовид Y класу C^{r+s+2}, що допускає розбиття одиниці. Зауважено, що аналогічно така структура може бути означена і для випадку, коли X — компактний C^r-многовид з краєм.

Альфа-теорема з [3] стверджує, що згадана структура є функторіальною в тому сенсі, що для кожного відображення $f: X \to X'$ класу C^r індуковане відображення

$$\mathcal{C}^r(X', Y) \longrightarrow \mathcal{C}^r(X, Y),\ g \mapsto g \circ f,$$

є класу C^r.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54C35, 54B30, 58D15.

Якщо X — недискретний компактний метричний простір, а Y — недискретний локально-компактний $\mathbb{ANR}$-простір, то простір неперервних функцій $C(X,Y)$ в топології рівномірної збіжності гомеоморфний області в гільбертовому просторі $\mathfrak{l}^2$, а отже, має структуру гладкого $\mathfrak{l}^2$-многовиду ($\mathbb{ANR}$ означає абсолютний околовий ретракт в класі метричних просторів; див. [2]). В [7] сформульовано питання про існування природної (тобто такої, що функторіально залежить від X) гладкої структури на $C(X,Y)$ у випадку, коли Y не є гладким многовидом.

2. Функторіальні топологізації просторів неперервних відображень

Для топологічних просторів X і Y через $C(X,Y)$ позначаємо множину всіх неперервних функцій з простору X в простір Y. При фіксованому X одержуємо коваріантний функтор $C(X,-)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$, а при фіксованому Y — котраваріантний функтор $C(-,Y)\colon \mathrm{TOP}\to \mathrm{SET}$.

Нехай $U\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$ — забуваючий функтор.

Означення 2.1. *Топологізацією функтора* $C(X,-)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$ *називається функтор* $C_F(X,-)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{TOP}$ *такий, що* $UC_F(X,-)=C(X,-)$.

Аналогічне означення дається для контраваріантного функтора $C(-,Y)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$, а також для функторів, означених на деяких підкатегоріях категорії TOP.

Якщо $Y=\mathbb{R}$, то замість $C(X,Y)$ вживається позначення $C(X)$. Відповідно, контраваріантний функтор $C(-,\mathbb{R})$ позначається просто C.

Для кожного $x\in X$ через $\mathrm{ev}_x\colon C(X,Y)\to Y$ позначається відображення *обчислення*, $\mathrm{ev}_x(f)=f(x)$, $f\in C(X,Y)$. Розглянемо на $C(X,Y)$ найслабшу топологію, при якій всі відображення обчислення $\mathrm{ev}_x\colon C(X,Y)\to Y$ неперервні. Така топологія називається топологією поточкової збіжності і утворений топологічний простір позначається $C_p(X,Y)$ (або $C_p(X)$, якщо $Y=\mathbb{R}$).

Означення 2.2. *Топологізація* $C_F(-,Y)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{TOP}$ *функтора* $C(-,Y)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$ *називається регулярною, якщо звуження відображення* ev_x *на підпростір сталих відображень є гомеоморфізмом цього підпростору на* Y.

Твердження 2.3. *Не існує регулярної функторіальної топологізації* C_F *функтора* C *такої, що простір* $C_F([0,1])$ *гомеоморфний* $(\mathfrak{l}^2,\mathrm{bw})$.

Доведення. Припустимо, що така топологізація C_F існує. Нехай $x\in X$. Розглянемо відображення вкладення $f_x\colon\{*\}\to[0,1]$, що переводить $*$ в $x\in[0,1]$. З функторіальності випливає, що відображення $C_F(f_x)$ неперервне, а за регулярністю, відображення $\mathrm{ev}_x=\mathrm{ev}_*\circ C_F(f_x)$ також неперервне. Звідси випливає, що тотожне відображення

$$1_{C([0,1])}\colon C_F([0,1])\to C_p([0,1])$$

неперервне, а тому простір $C_p([0,1])$ — σ-компактний. (Нагадаємо, що топологічний простір називається *σ-компактним*, якщо він є об'єднанням зліченної сім'ї своїх компактних підпросторів.) Це суперечить теоремі М. Величка (див. також узагальнення цього результату в [4]), згідно з якою простір $C_p(Z)$ σ-компактний, якщо і тільки якщо Z скінченний.

3. Функторіальні диференційовні структури на просторах неперервних функцій

Відомо, що простір неперервних відображень $C(X,Y)$ в топології рівномірної збіжності гомеоморфний ℓ^2-многовидові, якщо тільки X — нескінченний метричний сепарабельний простір і Y — нескінченний ANR-простір [6].

Позначимо через ℓ^2-$\mathcal{M}$ категорію ℓ^2-многовидів і неперервних відображень, через C^k-ℓ^2-$\mathcal{M}$ — категорію ℓ^2-многовидів і гладких відображень класу C^k, а через $U: C^k$-ℓ^2-$\mathcal{M} \to \ell^2 - \mathcal{M}$ — забуваючий функтор. Поданий вище факт можна записати у вигляді: $C(-,Y)$ є контраваріантним функтором з категорії нескінченних метричних сепарабельних просторів і неперервних відображень в категорію ℓ^2-$\mathcal{M}$.

Припустимо, що, крім того, простір Y має структуру C^∞-многовиду. Відомо, що тоді простір $C(X,Y)$ має природну структуру C^∞-ℓ^2-многовиду [3].

Нехай тепер Y — тріод, тобто факторпростір диз'юнктного об'єднання трьох відрізків за множиною, що містить рівно одну кінцеву точку від кожного з відрізків. Образ цієї множини при факторвідображенні позначається x_0. Будемо розглядати простір $C([0,1],Y)$. Для кожного $y \in Y$ позначимо через c_y постійне відображення, яке набуває єдине значення y.

Позначимо через $\mathcal{S}$ категорію нескінченних метричних сепарабельних просторів і неперервних відображень. Припустимо, що існує контраваріантний функтор $F: \mathcal{S} \to C^k - \ell^2 - \mathcal{M}$, де $k \geqslant 1$, такий, що $UF = C(-,Y)$. Ототожнимо простір $F([0,1])$ з простором ℓ^2. Будемо вважати, що простір Y лежить в ℓ^2 як множина сталих відображень, причому елемент c_{y_0} ототожнюється з нулем простору ℓ^2.

Крім того, ототожнимо дотичний простір $\mathrm{T}_{c_{y_0}} F([0,1]) \approxeq \mathrm{T}_0 \ell^2$ з простором ℓ^2.

Позначимо через $\exp^c Y$ простір непорожніх замкнених зв'язних підмножин в Y, наділений метрикою Гаусдорфа,

$$\rho(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A).$$

Нескладно показати, що існує неперервне відображення $R: \exp^c Y \to Y$ таке, що $R(A) \in A$ для кожного $A \in \exp^c Y$.

Позначимо через $r: [0,1] \to [0,1]$ ретракцію з образом $\{1\}$. Зауважимо, що Y — множина нерухомих точок відображення Fr (нагадаємо, що множина Y ототожнена з множиною сталих відображень). Оскільки Fr — C^k-відображення, то $Fr(x) = \mathrm{T}Fr(x) + \varepsilon(x)$, де $\varepsilon: \ell^2 \to \ell^2$ — відображення, для якого

$$\lim_{||x|| \to 0} \frac{||\varepsilon(x)||}{||x||} = 0.$$

Позначимо через d метрику, породжену нормою в ℓ^2. Тоді для кожних $x, y \in Y$, $\lambda \in [0,1]$ маємо

$$\begin{aligned}
&d(\mathrm{T}Fr(\lambda x + (1-\lambda)y), \lambda x + (1-\lambda)y) = \\
&= d(\lambda \mathrm{T}Fr(x) + (1-\lambda)\mathrm{T}Fr(y), \lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \\
&\leqslant \lambda d(\mathrm{T}Fr(x), x) + (1-\lambda) d(\mathrm{T}Fr(y), y) = \\
&= \lambda d(\mathrm{T}Fr(x), Fr(x)) + (1-\lambda) d(\mathrm{T}Fr(y), Fr(y)) \leqslant \\
&\leqslant \lambda ||\varepsilon(x)|| + (1-\lambda)||\varepsilon(y)|| \leqslant \max\{||\varepsilon(x)||, ||\varepsilon(y)||\}.
\end{aligned}$$

(Тут і далі для відображення $f: \ell^2 \to \ell^2$ класу C^k через $\mathrm{T}f$ позначено дотичне відображення

$\mathrm{T}_0 l^2 \to \mathrm{T}_0 l^2$.) Оскільки

$$d(Fr(\lambda x + (1-\lambda)y), \mathrm{T}Fr(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant ||\varepsilon(\lambda x + (1-\lambda)y)|| \leqslant \\ \leqslant \max\{||\varepsilon(x)||, ||\varepsilon(y)||\}, \quad (1)$$

то

$$d(Fr(\lambda x + (1-\lambda)y), \lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant 2\max\{||\varepsilon(x)||, ||\varepsilon(y)||\}.$$

Означимо відображення $q: Y \times Y \times [0,1]$ формулою

$$q(x,y,\lambda) = R(Fr(\lambda x + (1-\lambda)y))([0,1])).$$

(Зауважимо, що $Fr(\lambda x + (1-\lambda)y))([0,1]) \in \exp^c Y$). З формули (1) випливає, що

$$d(q(x,y,\lambda), \lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant 2\max\{||\varepsilon(x)||, ||\varepsilon(y)||\}.$$

Наведемо факт існування відображення q з вказаними вище властивостями до суперечності. Позначимо три відрізки, що перетинаються по точці y_0 і дають в об'єднанні Y, через I_1, I_2, I_3. Існують точки $x_i \in I_i$, $i = 1,2,3$, з властивостями:

(1) $||x_1|| = ||x_2|| = ||x_3|| = \eta$ для деякого $\eta > 0$;

(2) $\max\{||\varepsilon(x_1)||, ||\varepsilon(x_2)||, ||\varepsilon(x_3)||\} < \dfrac{\eta}{100}$.

З міркувань зв'язності випливає, що існує $\lambda_{ij} \in [0,1]$ таке, що

$$||\lambda_{ij}x_i + (1-\lambda_{ij}x_j)|| < \frac{\eta}{100} \quad (2)$$

при $i \neq j$. Застосовуючи елементарно-геометричні міркування, нескладно показати, що $||(x_i + x_j)/2|| < \dfrac{\eta}{50}$ при $i \neq j$. Тоді

$$d(x_2, x_3) = d(x_1 + x_3, x_1 + x_3) < \frac{4\eta}{50} < \frac{\eta}{10}$$

і $d(\lambda_{23}x_2 + (1-\lambda_{23})x_3), x_2 < \dfrac{\eta}{10}$, що суперечить (2).

Таким чином, ми довели, що не існує функтора F з вказаними вище властивостями.

На завершення зауважимо, що міркування, наведені в цьому пункті, можна застосувати і до інших просторів Y, що не є многовидами.

1. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. – М., Изд-во МГУ, 1989.
2. Борсук К. Теория ретрактов. – М., Мир.
3. Ленг С. Ведение в теорию дифференцируемых многообразий. – М., Мир, 1967.
4. Ткачук В. В., Шахматов Д. Б. *Когда пространство $C_p(X)$ σ-счетно компактно?* // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. – 1987. – N 1. – С. 70-72.
5. Dydak J. Covariant and contravariant points of view in topology with applications to function spaces, Preprint.
6. Geoghegan R. *On spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions I* // Topology. – 1972. – Vol. 11. – P. 159-177.
7. West J. Open problems in infinite-dimensional topology. – In: Open problems in topology (J. van Mill, G. M. Reed, Eds.) Elsevier, 1990.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.98