УДК 519.21

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ МАТРИЧНОЗНАЧОЇ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Я. І. Єлейко, І. І. Ніщенко

Yeleiko Ya. I., Nishchenko I. I. A limit theorem for random matrix-valued evolution. The random matrix-valued evolution $N^\varepsilon(t)$ in random fase space generated by a regenerative process $x(t)$ is considered. The asymptotic behaviour of $M\,N^\varepsilon(t)$ for $\varepsilon \to 0$, $t \to \infty$ is investigated under the condition that the matrix $M\,N^\varepsilon(\tau)$ is reducible, where τ is the first moment of the regenerative process.

Нехай E – повний метричний сепарабельний простір; $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E)$ $-$ σ -алгебра борелівських підмножин; $x(t)$ – регенеруючий процес із значеннями в фазовому просторі $(E, \mathfrak{A})$ з моментом регенерації τ. Це означає, що знайдеться послідовність випадкових величин $\{\tau_n\}$, така, що $\tau_{n+1} > \tau_n$, $\tau_0 = 0$, і обривні випадкові процеси

$$x^n(t) = x(\tau_n + t), \quad 0 \leqslant t < \tau_{n+1} - \tau_n$$

незалежні в сукупності і однаково розподілені.

Позначимо $\tau \equiv \tau_1$, і вважатимемо, що $M\tau < \infty$.

Розглянемо сім'ю невід'ємних матричнозначних процесів $\xi^\varepsilon(t)$

$$\xi^\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} \xi^\varepsilon_{1\,1}(t) & \cdots & \xi^\varepsilon_{1\,d}(t) \\ & \cdots & \\ \xi^\varepsilon_{1\,d}(t) & \cdots & \xi^\varepsilon_{d\,d}(t) \end{pmatrix}, \quad \xi^\varepsilon_{i\,j}(t) \geqslant 0,$$

котрі функціонально залежать від малого параметра ε, але статистично не залежать від регенеруючого процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$.

За процесом $\xi^\varepsilon(t)$ та послідовністю моментів регенерації $\{\tau^n\}$ побудуємо матричнозначну еволюцію

$$N^\varepsilon(t) = \begin{cases} \xi^\varepsilon(t), & 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ \xi^\varepsilon(\tau_1)\xi^{\varepsilon(1)}(t - \tau_1), & \tau_1 < t \leqslant \tau_2, \\ \dots & \\ \xi^\varepsilon(\tau_1)\dots\xi^{\varepsilon(k)}(t - \tau_k), & \tau_k < t \leqslant \tau_{k+1}, \end{cases}$$

де $\xi^{\varepsilon(k)}$, $k = 1, 2, \cdots$ – послідовність незалежних копій процесу $\xi^\varepsilon(t)$; $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Вважатимемо, що послідовність матричнозначних мір

$$K^\varepsilon(du) = M(\xi^\varepsilon(\tau)),\ \tau \in du)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 60K15.

слабко збігається до матричнозначної міри $K(du)$ при $\varepsilon \to 0$, причому матриця $K(\infty)$ повних мас мір є розкладною, тобто множину $I = \{1, 2, \dots, d\}$ можна подати у вигляді об'єднання $I = \bigcup\limits_{k=1}^{r} I_k$ скінченної кількості неперетинних множин $I_1, \dots, I_r$ таких, що

$$K_{i\,j}(\infty) = 0 \quad \text{при} \quad i \in I_k,\, j \in I_l,\, k \neq l.$$

Вважатимемо також, що звуження $K^{(s)}(\infty)$ матриці $K(\infty)$ на множину I_s є нерозкладною матрицею з перроновим коренем, котрий дорівнює одиниці; матриця $K(dy)$ нерешітчата і

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\varepsilon} \int\limits_{t}^{\infty} yK^{\varepsilon}(dy) = (0) \tag{1}$$

При таких припущеннях знайдемо математичне сподівання $MN^{\varepsilon}(t)$ випадкової еволюції $N^{\varepsilon}(t)$.

Для $MN^{\varepsilon}(t)$ запишемо формулу повної імовірності за моментом регенерації τ. Матимемо

$$MN^{\varepsilon}(t) = M(N^{\varepsilon}(t),\, t < \tau) + \int\limits_{0}^{t} M(\xi^{\varepsilon}(\tau)),\, \tau \in du)M(N^{\varepsilon}(t-u)),$$

або

$$X^{\varepsilon}_{i\,j}(t) = A^{\varepsilon}_{i\,j}(t) + \sum_{l=1}^{d} \int\limits_{0}^{t} K^{\varepsilon}_{i\,l}(du) X^{\varepsilon}_{l\,j}(t-u), \tag{2}$$

де позначено

$$X^{\varepsilon}(t) = MN^{\varepsilon}(t), \quad A^{\varepsilon}(t) = M(N^{\varepsilon}(t),\, t < \tau).$$

Зафіксуємо r координат $w_1 \in I_1, \dots, w_r \in I_r$ і нехай $\tau^{\varepsilon} = \tau_{\alpha}$, де

$$\alpha = \alpha(\varepsilon) = \min\{n \geqslant 1 :\ K^{\varepsilon(n)}_{w_s\,w_m}(\infty) > 0,\, s, m = \overline{1,r}\}.$$

Розглянемо стрибкоподібну еволюцію $\widetilde{N}^{\varepsilon}(t)$

$$\widetilde{N}^{\varepsilon}(t) = N^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}_{k}), \quad \tau^{\varepsilon}_{k} \leqslant t < \tau^{\varepsilon}_{k+1},\ k = 0, 1, \dots$$

де $\{\tau^{\varepsilon}_{k}\}$ – послідовність моментів регенерації, породжена моментом τ^{ε}. Тоді якщо

$$R^{\varepsilon}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K^{\varepsilon(n)}(t)$$

– матриця відновлення, побудована за матрицею $K^{\varepsilon}(t)$, а

$$P^{\varepsilon}(dt) = M(\widetilde{N}^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}),\, \tau^{\varepsilon} \in dt),$$

то елементи $R^{\varepsilon}_{i\,w_k}(t)\,(i \in I,\, k = \overline{1,r})$ матриці $R^{\varepsilon}(t)$ задовольняють рівняння

$$R^{\varepsilon}_{i\,w_k}(t) = 1 + \sum_{l=1}^{r} \int\limits_{0}^{t} P^{\varepsilon}_{i\,w_l}(du) R^{\varepsilon}_{w_l\,w_k}(t-u). \tag{3}$$

Формули (3) дають змогу вивчати асимптотику $R^{\varepsilon}_{i\,w_k}(t)$ за допомогою $R^{\varepsilon}_{w_s\,w_k}(t)$, а для знаходження $R^{\varepsilon}_{w_s\,w_k}(t)$ маємо рівняння

$$R^{\varepsilon}_{w_s\,w_k}(t) = \sum_{l=1}^{r} \int\limits_0^t P^{\varepsilon}_{w_s\,w_l}(du) R^{\varepsilon}_{w_l\,w_k}(t-u). \tag{4}$$

Щоб мати можливість застосовувати до рівняння (4) відомі результати теорії відновлення, треба забезпечити скінченність величини

$$m_s = \int\limits_0^{\infty} t P_{w_s\,w_s}(dt).$$

Покажемо, що з умови

$$a_{i\,j} = \int\limits_0^{\infty} t K_{i\,j}(dt) < \infty,$$

яка виконується згідно з (1), випливає скінченність величини m_s. Функції $P^{\varepsilon}_{i\,w_s}(t)$ визначаються із співвідношень

$$P^{\varepsilon}_{i\,w_s}(t) = K^{\varepsilon}_{i\,w_s}(t) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{j\in I_l \\ j\neq w_l}} \int\limits_0^t K^{\varepsilon}_{i\,j}(du) P^{\varepsilon}_{j\,w_s}(t-u). \tag{5}$$

Переходячи в (5) до границі при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, отримуємо рівняння для знаходження $P_{i\,w_s}(\infty)$:

$$P_{i\,w_s}(\infty) = K_{i\,w_s}(\infty) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{j\in I_l \\ j\neq w_l}} K_{i\,j}(\infty) P_{j\,w_s}(\infty). \tag{6}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що

$$P_{i\,w_s}(\infty) = \begin{cases} u_i^{(s)} / u_{w_s}^{(s)}, & \text{при } i \in I_s, \\ 0 & \text{при } i \notin I_s \end{cases}$$

є розв'язком рівняння (6), де $\vec{u}^{(s)}$ – правий власний вектор матриці $K^{(s)}(\infty)$, відповідний її перроновому кореню 1.

Позначимо

$$\widehat{P}_{i\,w_s}(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{pt} P_{i\,w_s}(dt), \qquad \widehat{K}_{i\,w_s}(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{pt} K_{i\,w_s}(dt).$$

Застосувавши до рівняння

$$P_{i\,w_s}(t) = K_{i\,w_s}(t) + \sum_{\substack{j\in I_s \\ j\neq w_s}} \int\limits_0^t K_{i\,j}(du) P_{j\,w_s}(t-u)$$

перетворення Лапласа, отримаємо

$$\widehat{P}_{i\,w_s}(p) = \widehat{K}_{i\,w_s}(p) + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} \widehat{K}_{i\,j}(p)\widehat{P}_{j\,w_s}(p).$$

Використовуючи те, що

$$\widehat{P}_{i\,w_s}(0) = P_{i\,w_s}(\infty), \quad \widehat{K}_{i\,w_s}(0) = K_{i\,w_s}(\infty), \quad P_{i\,w_s}(\infty) = \sum_{j\in I_s} K_{i\,j}(\infty)P_{i\,w_s}(\infty),$$

можемо записати:

$$\frac{1}{p}[\widehat{P}_{i\,w_s}(p) - \widehat{P}_{i\,w_s}(0)] = \frac{1}{p}\left[\widehat{K}_{i\,w_s}(p) - \widehat{K}_{i\,w_s}(0)\right] +$$
$$+ \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} \frac{1}{p}\left[\widehat{K}_{i\,w_s}(p) - \widehat{K}_{i\,w_s}(0)\right]\widehat{P}_{j\,w_s}(p) + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} \frac{1}{p}\left[\widehat{P}_{j\,w_s}(p) - \widehat{P}_{j\,w_s}(0)\right]\widehat{K}_{i\,j}(0).$$

Переходячи до границі при $p \to 0$ і враховуючи, що

$$\widehat{P}'_{i\,w_s}(0) = \int_0^\infty tP_{i\,w_s}(dt) = m_{i\,w_s}, \quad \widehat{K}'_{i\,w_s}(0) = \int_0^\infty tK_{i\,w_s}(dt) = a_{i\,w_s},$$

отримуємо

$$m_{i\,w_s} = \sum_{j\in I_s} a_{i\,j}P_{j\,w_s}(\infty) + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} K_{i\,j}(\infty)m_{j\,w_s}$$

або

$$m_{i\,w_s} = \sum_{j\in I_s} a_{i\,j}\frac{u_j^{(s)}}{u_{w_s}^{(s)}} + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} K_{i\,j}(\infty)m_{j\,w_s}.$$

Нехай $\vec{v}^{(s)}$ – лівий власний вектор матриці $K^{(s)}(\infty)$. Помножимо останню рівність на $v_i^{(s)}$ і підсумуємо за всіма $i \in I_s$. Матимемо:

$$\sum_{i\in I_s} v_i^{(s)}\, m_{i\,w_s} = \sum_{i,\,j\in I_s} \frac{v_i^{(s)}a_{i\,j}u_j^{(s)}}{u_{w_s}^{(s)}} + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} v_j^{(s)}m_{j\,w_s}.$$

Звідси

$$m_s = \sum_{i,\,j\in I_s} \frac{v_i^{(s)}a_{i\,j}u_j^{(s)}}{v_{w_s}^{(s)}u_{w_s}^{(s)}} < \infty.$$

Покладемо

$$\rho_s^\varepsilon = \frac{1 - P^\varepsilon_{w_s\,w_s}(\infty)}{m_s}, \quad s = \overline{1,r}; \quad \rho^\varepsilon = \sum_{s=1}^r \rho_s^\varepsilon,$$
$$c^\varepsilon_{s\,s} = -\frac{\rho_s^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}; \quad c^\varepsilon_{s\,m} = \frac{P^\varepsilon_{w_s\,w_m}(\infty)}{m_s\rho^\varepsilon}, \ s \neq m.$$

Тоді можемо записати

$$P^{\varepsilon}_{w_s\, w_m}(\infty) = \delta_{s\, m} + \rho^{\varepsilon} m_s c^{\varepsilon}_{s\, m}.$$

З побудови бачимо, що $c^{\varepsilon}_{s\, m} \geqslant 0$ при $s \neq m$ і

$$\sum_{m \neq s} c^{\varepsilon}_{s\, m} \leqslant -c^{\varepsilon}_{s\, s} \leqslant 1.$$

Отже, існує підпослідовність $\varepsilon' \to 0$ така, що існують границі

$$c_{s\, m} = \lim_{\varepsilon' \to 0} c^{\varepsilon'}_{s\, m};$$

а тому

$$P^{\varepsilon'}_{w_s\, w_m}(\infty) = \delta_{s\, m} + \rho^{\varepsilon'} m_s c_{s\, m} + o(\rho^{\varepsilon'}).$$

Ми перебуваємо в умовах праці [1], згідно з якою при $w_s \in I_s$, $w_k \in I_k$

$$R^{\varepsilon'}_{w_s\, w_k}\left(\frac{t}{\rho^{\varepsilon'}}\right) \underset{\varepsilon' \to 0}{\longrightarrow} q_{s\, k}(t) \frac{1}{m_k}, \tag{7}$$

де $M = \mathrm{diag}\{m_1, \ldots, m_r\}$, $C = (c_{s\, m})^r_{s,m=1}$, $q_{s\, k}(t)$ – – $(s,\, k)$– ий елемент матриці (e^{tC}). Співвідношення (3) показують, що при $i \in I_s$, $w_k \in I_k$

$$R^{\varepsilon'}_{i\, w_k}\left(\frac{t}{\rho^{\varepsilon'}}\right) \underset{\varepsilon' \to 0}{\longrightarrow} \frac{u^{(s)}_i}{u^{(s)}_{w_s}}\, q_{s\, k}(t) \frac{1}{m_k}. \tag{8}$$

Тоді, якщо послідовність матриць $A^{\varepsilon}(t)$ є рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\, \infty)$, то для $i \in I_s$, $j \in I_k$ можемо записати

$$X^{\varepsilon'}_{i\, j}\left(\frac{t}{\rho^{\varepsilon'}}\right) \underset{\varepsilon' \to 0}{\longrightarrow} \frac{u^{(s)}_i}{u^{(s)}_{w_s}}\, q_{s\, k}(t)\, \frac{1}{m_k} \int\limits_0^{\infty} A_{w_k\, j}(y) dy, \tag{9}$$

де $\int\limits_0^{\infty} A(y)dy = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{\infty} A^{\varepsilon}(y)dy$, $X^{\varepsilon}_{i\, j}(t)$ – розв'язок багатовимірного рівняння відновлення (2).

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай послідовність матриць $A^{\varepsilon}(t)$ є рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\, \infty)$. Тоді, якщо*

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{\varepsilon} \int\limits_t^{\infty} y K^{\varepsilon}(dy) = (0)$$

і матриця $K(dy)$ нерешітчата, то можна вибрати таку послідовність $\rho^{\varepsilon} \to 0$, що існує $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} MN^{\varepsilon}(t/\rho^{\varepsilon})$ і граничне зображення задається формулою (9).

1. Куция П. П. *Одна теорема многомерного восстановления*// Изв. АН УССР. – 1989. – Т.135, N3. – С.463- 466.
2. Єлейко Я. І., Шуренков В. М. *Деякі властивості випадкових еволюцій*// Укр. мат. ж. – 1995. – Т.47, N 10.

Стаття надійшла до редколегії 07.11.98