УДК 539.3

ПОБУДОВА І АНАЛІЗ РІВНЯНЬ РУХУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ІЗ МАТЕРІАЛУ МУРНАГАНА

П. П. Доманський

Domans'kyj P. P. Constructing and analysis of motion equations for cylindrical solids of Murnaghan material. One-dimentional model of motion equations for cylindrical solids of Murnaghan material is derived. The derivation method is relied on expanding base parameters in series by tensor basis. Special cases of the obtained equations are considered.

1. Вихідні співвідношення. Розглянемо однорідне ізотропне пружне тіло K. Розрізняємо дві конфігурації цього тіла: γ_0 і γ_τ. Першу з них називаємо відліковою, а другу актуальною. Відлікова конфігурація вважається природною (недеформованою), коли в тілі відсутні напруження і деформації. Актуальна конфігурація виникла внаслідок дії на тіло K з моменту часу $\tau = \tau_0$ масових і поверхневих сил.

Приймемо, що в γ_0 - конфігурації тіло K є циліндричним сталого поперечного перерізу D, два характерні розміри якого є значно менші від висоти. Положення точок осі тіла будемо характеризувати радіус-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}^{\,0}_3$, де ξ^3 – осьова координата ($0 \leqslant \xi^3 \leqslant b$), $\vec{\ni}^{\,0}_3$ – базисний орт в напрямку цієї осі. Положення довільної точки $x_0 \in X_0$ визначаємо радіус-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \quad \vec{R}_0 = \vec{R}_0(\xi^1, \xi^2) = \xi^\alpha \vec{\ni}^{\,0}_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D.$$

Приймемо надалі, що у формулах, де відбувається підсумовування за індексами, що повторюються зверху і знизу, індекси α, β, γ змінюються від 1 до 2, а всі інші – від 1 до 3.

Вектор переміщення з γ_0 в γ_τ-конфігурацію $\vec{u} = \vec{u}(\vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \tau)$ подамо у вигляді розвинення за заданою базою тензорних функцій $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{30}; \tau). \tag{1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73C50.

Тут індекси "$(i-1)$" та "(i)" вказують ранг тензорних функцій, "$\overset{i}{\cdot}$" означає i-кратний внутрішній добуток тензорів. Як випливає з формули Тейлора, для відображення одного нормованого простору в інший, за базу можна вибрати, зокрема, систему тензорних функцій $\{\vec{R}_0^n\}$, де $\vec{R}_0^n$ – n-кратний зовнішній добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе.

У праці [1] показано, що за наближеної одновимірної постановки задачі рівняння руху циліндричного тіла можна записати у вигляді

$$\int\limits_D \left(\vec{\ni}_0^3 \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} - \vec{\ni}_0^\alpha \cdot \hat{P} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} - \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \right) d\Sigma_0 + \hat{F}^{(i)} = 0 \ (i = \overline{1,N}). \quad (2)$$

Тут

$$\hat{F}^{(i)} = \int\limits_D \rho_0 \vec{f}_0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\Sigma_0 + \int\limits_{\Gamma_0} \vec{n}_{12} \cdot \hat{P} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} dl_0,$$

$\hat{P}$ – тензор напружень Піоли-Кірхгофа, $\{\vec{\ni}_0^k\}$ – база, біортогональна до бази $\{\vec{\ni}_k^0\}$, $\vec{f}_0$– вектор масових сил, Γ_0 – межа області D, ρ_0 – густина матеріалу у відліковій конфігурації, $\vec{n}_{12}$ – вектор зовнішньоі нормалі до бічноі поверхні циліндричного тіла в γ_0-конфігурації, "$\otimes$" – операція тензорного (зовнішнього) добутку.

Метою запропонованої праці є побудова в локальній формі і аналіз рівнянь руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана. Вибір зазначеного матеріалу зумовлений тим, що з нього в частковому випадку одержується широко вживаний стандартний матеріал другого порядку, з котрого, в свою чергу, в частковому випадку одержуємо лінійно пружне тіло.

2. Рівняння руху циліндричного тіла із матеріалу Мурнагана. Густина потенціальної енергії деформації матеріалу Мурнагана задається функцією інваріантів міри деформації Коші-Гріна $\hat{G} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^T$ [2]:

$$U_0 = \frac{1}{4}\left[\left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n}{2}\right) I_1(\hat{G}) + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu - 3l - 2m) I_1^2(\hat{G}) + \right.$$
$$\left. + \left(-2\mu + 3m - \frac{n}{2}\right) I_2(\hat{G}) - m I_1(\hat{G}) I_2(\hat{G}) + \frac{1}{6}(l + 2m) I_1^3(\hat{G}) + \frac{n}{2}\left(I_3(\hat{G}) - 1\right)\right].$$

Тут $\vec{r}$ – радіус-вектор місця точки в γ_τ-конфігурації; $\vec{\nabla}_0$ – набла-оператор Гамільтона в γ_0-конфігурації; λ, μ – сталі Ляме; l, m, n – сталі Мурнагана; індексом "T" позначено операцію транспонування. Якщо скористатися формулами для похідних від інваріантів міри деформації Коші-Гріна $\hat{G}$ за градієнтом місця $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$

$$I_1(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = 2\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}, \quad I_2(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = 2\left[I_1(\hat{G})\hat{I} - \hat{G}\right] \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}, \quad I_3(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = 2 I_3(\hat{G}) \vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^T$$

і врахувати, що $\hat{G} = \hat{I} + 2\hat{C}$, де $\hat{C} = \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T$ – тензор деформації Коші-Гріна, а $\hat{\varepsilon}(\vec{u}) = (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T)/2$ – лінійний тензор деформації, то можна одержати

$$\hat{P} = \frac{dU_0}{d\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = \frac{1}{4}\left\{\left[-n + 2(2\lambda - n) I_1(\hat{C}) - 8m I_2(\hat{C}) + 4l I_1^2(\hat{C})\right] \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} + 2\left[4\mu + \right.\right.$$
$$\left.\left. + n + 4m I_1(\hat{C})\right] \hat{C} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} + n\left[1 + 2I_1(\hat{C}) + 4I_2(\hat{C}) + 8I_3(\hat{C})\right] \vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^T\right\}. \quad (3)$$

Тут $\hat{I}$ – одиничний тензор, $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона в γ_r-конфігурації, $\vec{r}_0$ – радіус-вектор місця точки в γ_0-конфігурації.

Зауважимо, що

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} = \hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \quad I_1(\hat{C}) = \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \tag{4}$$

і з точністю до членів другого порядку стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$

$$I_2(\hat{C}) = \frac{1}{2}\left[\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\right)^2 - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u})\right], \qquad \vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^{\,T} = \hat{I} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + \\ + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T, \qquad I_3(\hat{C}) = 0. \tag{5}$$

Якщо підставити (4), (5) в (3) і залишити члени не вище другого порядку стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$, то отримаємо

$$\hat{P} = \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\Big[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + (n - 2m + 2l)(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u})^2 + \\ + (2m - n)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u})\Big]\hat{I} + (2m - n)\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\hat{\varepsilon}(\vec{u}) + n\hat{\varepsilon}^2(\vec{u}) + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \tag{6}$$

де $\hat{T}(\vec{u}) = \lambda \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\hat{I} + 2\mu\hat{\varepsilon}(\vec{u})$ – тензор напружень Коші лінійної теорії пружності.

Знайдемо вектори напружень $\vec{P}_j = \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \hat{P}$. Для цього підставимо (1) у вираз (6) для тензора напружень $\hat{P}$ і домножимо одержаний результат зліва на вектор $\vec{\ni}_j^{\,0}$. Після перетворень отримаємо

$$\vec{P}_j = \sum_{r=1}^{N}\left(\hat{A}_{j1}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \hat{u}^{(r)} + \hat{A}_{j2}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3}\right) + \sum_{r,k=1}^{N}\left(\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)} + \right. \\ \left. + \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{B}_{j3}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} + \hat{B}_{j4}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3}\right). \tag{7}$$

Тут

$$\hat{A}_{j1}^{(r+1)} = \left[\lambda \vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \mu\left(\vec{\ni}_0^{\,\alpha} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0} + \delta_j^\alpha \hat{I}\right)\right] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha}, \quad \hat{A}_{j2}^{(r+1)} = \left[\lambda \vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,3} + \mu\left(\vec{\ni}_0^{\,3} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0} + \right.\right. \\ \left.\left. + \delta_j^3 \hat{I}\right)\right] \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)}, \quad \hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} = \left\{\left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \hat{I} + \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \frac{n}{4}\vec{\ni}_0^{\,\alpha} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\right] \otimes \right. \\ \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\beta} + \left[\left(\frac{n}{2} - m + l\right)\vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\beta} + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right)\delta_j^\beta \hat{I} + \left(m - \frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^{\,\beta} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\right] \otimes \\ \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \vec{\ni}_0^{\,\beta} + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\beta}\vec{\ni}_j^{\,0}\right] \otimes \vec{\ni}_0^{\,s} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^{\,0} + \\ \left. + \left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\beta}\hat{I} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\right\} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha}, \quad \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} = \left\{\left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \hat{I} + \right.\right. \\ \left. + \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \frac{n}{4}\vec{\ni}_0^{\,\alpha} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\right] \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^{\,3} + \left[\left(\frac{n}{2} - m + l\right)\vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,3} + \right. \\ \left. + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right)\delta_j^3 \hat{I} + \left(m - \frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^{\,3} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\right] \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \tag{8}$$

$$+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^{\alpha}\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0\Big\}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha},\quad \hat{B}_{j3}^{(k+r+1)}=\Big\{\Big[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^3\hat{I}+$$
$$+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0\otimes\vec{\ni}_0^3+\frac{n}{4}\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_j^0\Big]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_0^\beta+\Big[\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\vec{\ni}_j^0\otimes\vec{\ni}_0^\beta+$$
$$+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\delta_j^\beta\hat{I}+\left(m-\frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^\beta\otimes\vec{\ni}_j^0\Big]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_0^3+$$
$$+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^3\vec{\ni}_0^\beta\otimes\vec{\ni}_0^s\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_s^0\Big\}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\quad \hat{B}_{j4}^{(k+r+1)}=\Big\{\Big[\left(\lambda+\mu+m-\frac{n}{4}\right)\delta_j^3\hat{I}+$$
$$+\left(l-\frac{m}{2}+\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0\otimes\vec{\ni}_0^3+\left(m-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_j^0\Big]\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3++\Big[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^3\vec{\ni}_0^3+$$
$$+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0\Big]\otimes\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\hat{I}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_j^0\Big\}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)};$$

δ^{kn},δ_k^n – символи Кронекера.

Якщо внести вирази (7) для векторів $\vec{P}_j$ в систему рівнянь руху (2), згрупувати подібні члени і виконати інтегрування по області D, то одержимо систему диференціальних рівнянь руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана в локальній формі

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{A}_1^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+\hat{A}_2^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{A}_3^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\hat{u}^{(k)}\right)+\sum_{k,r=1}^{N}\Bigg[\hat{B}_1^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\left(\frac{\partial^2\hat{u}^{(r)}}{(\partial\xi^3)^2}\otimes\right.$$
$$\left.\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}\right)+\hat{B}_2^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(r)}}{(\partial\xi^3)^2}\otimes\hat{u}^{(k)}+\hat{B}_3^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+ \quad (9)$$
$$+\hat{B}_4^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{B}_5^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\hat{u}^{(k)}+\hat{B}_6^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+$$
$$+\hat{B}_7^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\hat{u}^{(k)}\Bigg]+\hat{F}^{(i)}=\rho_0\sum_{k=1}^{N}\hat{M}^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\tau)^2}\quad (i=\overline{1,N}),$$

де

$$\hat{A}_1^{(i+k)}=\int_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\left[(\lambda+\mu)\delta_t^3\vec{\ni}_0^3+\mu\vec{\ni}_t^0\right]\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}d\Sigma_0,\quad \hat{A}_2^{(i+k)}=$$
$$=\int_D\vec{\ni}_0^t\otimes\Bigg[\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\left(\lambda\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha+\mu\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}-\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\Big(\lambda\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3+$$
$$+\mu\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha\Big)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\Bigg]d\Sigma_0,\quad \hat{A}_3^{(i+k)}=-\int_D\vec{\ni}_0^t\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\gamma}\otimes\Big(\lambda\delta_t^\gamma\vec{\ni}_0^\alpha+$$
$$+\mu\left(\delta^{\alpha\gamma}\vec{\ni}_t^0+\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^\gamma\right)\Big)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}d\Sigma_0,\quad \hat{B}_1^{(i+k+r)}=\int_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes$$
$$\otimes\Bigg[\left((\lambda+2\mu+m)\vec{\ni}_t^0+\left(l+\frac{m}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^3\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{m}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^s\otimes$$

$$\otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_s^0 \Big] \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_2^{(i+k+r)} = \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Big[\Big(\frac{m}{2} \delta_t^3 \vec{\ni}_0^3 +$$

$$+ \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \vec{\ni}_t^0 \Big) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha + \left(\left(\frac{n}{2} - m + l \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\alpha + \left(m - \frac{n}{2} \right) \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^3 \right) \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^3 + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^s \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \vec{\ni}_s^0 \Big] \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_3^{(i+k+r)} =$$

$$= \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Big[\Big(l \delta_t^3 \vec{\ni}_0^3 + \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) \vec{\ni}_t^0 \Big) \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha +$$

$$+ \left(\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\alpha + \frac{n}{4} \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^3 \right) \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^3 \Big] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_4^{(i+k+r)} =$$

$$= \hat{B}_2^{(i+k+r)} + \hat{B}_3^{(i+k+r)} - \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \Big[\Big(\left(\frac{n}{4} - \frac{m}{2} + l \right) \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^3 +$$

$$+ \left(m - \frac{n}{4} \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\alpha \Big) \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^3 + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^s \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_s^0 +$$

$$+ \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \vec{\ni}_t^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha \Big] \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_5^{(i+k+r)} = \hat{B}_8^{(i+k+r)} -$$

$$- \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \Big[\Big(\left(\frac{n}{2} - m + l \right) \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^\beta + \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) \delta^{\alpha\beta} \vec{\ni}_t^0 + \tag{10}$$

$$+ \left(m - \frac{n}{2} \right) \delta_t^\beta \vec{\ni}_0^\alpha \Big) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^3 + \left(\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^3 + \frac{n}{4} \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\alpha \right) \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta \Big] \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_6^{(i+k+r)} = \hat{B}_8^{(i+k+r)} - \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes$$

$$\otimes \Big[\Big(\left(\mu + \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\gamma} \vec{\ni}_t^0 + \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta_t^\gamma \vec{\ni}_0^\alpha + \frac{n}{4} \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^\gamma \Big) \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^3 +$$

$$+ \left(\left(\frac{n}{2} - m + l \right) \delta_t^\gamma \vec{\ni}_0^3 + \left(m - \frac{n}{2} \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\gamma \right) \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\gamma} \delta_t^3 \vec{\ni}_0^s \otimes$$

$$\otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_s^0 \Big] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_7^{(i+k+r)} = - \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes$$

$$\otimes \Big[\vec{\ni}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \Big(\left(\mu + \frac{n}{4} \right) \left(\delta^{\alpha\gamma} \vec{\ni}_0^\beta + \delta^{\alpha\beta} \vec{\ni}_0^\gamma \right) + \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) \delta^{\beta\gamma} \vec{\ni}_0^\alpha \Big) +$$

$$+ \left(\left(\frac{n}{2} - m + l \right) \delta_t^\gamma \vec{\ni}_0^\beta + \left(m - \frac{n}{2} \right) \delta_t^\beta \vec{\ni}_0^\gamma \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha +$$

$$+ \left(\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta_t^\gamma \vec{\ni}_0^\alpha + \frac{n}{4} \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^\gamma \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \Big(\left(\mu + \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\gamma} \delta_t^\beta +$$

$$+ \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\beta} \delta_t^\gamma \Big) \vec{\ni}_0^s \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^0 \Big] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_8^{(i+k+r)} =$$

$$= \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Bigg[\left(\left(\frac{n}{2} - m + l \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\beta + \left(m - \frac{n}{2} \right) \delta_t^\beta \vec{\ni}_0^3 \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha +$$

$$+ \left(\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\alpha + \frac{n}{4} \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^3 \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\beta} \delta_t^3 \vec{\ni}_0^s \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^0 + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\beta} \vec{\ni}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^3 \Bigg] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0,$$

$$\hat{M}^{(i+k)} = \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\ni}_t^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0.$$

Із системи рівнянь (9), як частковий випадок, можна одержати систему рівнянь руху циліндричного тіла із стандартного матеріалу другого порядку [3]. Для цього достатньо у формулах (10) покласти $l = m = n = 0$. Система рівнянь руху лінійної теорії пружності випливає із (9) при $B_j^{(i+k+r)} = 0 \quad (j = \overline{1,8})$.

3. Аналіз рівнянь руху. Запишемо систему рівнянь руху (9) для випадку, коли у розвиненні вектора переміщення (1) зберігається лише два доданки. За базу розвинення вибираємо $\{\vec{R}_0^n\}$, тобто приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k \vec{\ni}_0^k$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k} \vec{\ni}_0^\alpha \otimes \vec{\ni}_0^k$. Система (9) складається тепер з векторного ($i = 1$) і тензорного ($i = 2$) диференціальних рівнянь. Запишемо їх в координатній формі, якщо за осі координат вибрати головні центральні осі. Відомо, що при цьому вектор статичних моментів першого порядку і відцентрований момент інерції області D дорівнюють нулеві. Якщо обчислити коефіцієнти за формулами (10), підставити їх в (9) і виконати відповідні згортки, то отримаємо

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right) + (\mu + m) \left(u_{\alpha 3} \frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right) + (\lambda + 2\mu + m) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} + \sum_{\beta=1}^2 \frac{J^{\beta\beta}}{D_0} \left(\frac{\partial^2 u_{\beta 3}}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 u_{\beta\alpha}}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial \xi^3} \right) \right] +$$

$$+ \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \left[\frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial \xi^3)^2} (u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}) + \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi^3} \left(\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}}{\partial \xi^3} \right) + u_{\beta\alpha} \frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}}{\partial \xi^3} + u_{\beta 3} \frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}}{\partial \xi^3} \right] +$$

$$+ \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) \left(u^\beta_\beta \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial \xi^3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right) + \left(m - \frac{n}{2} \right) \left(u_{\alpha 3} \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial \xi^3} + u^\beta_\beta \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right) +$$

$$+ \frac{n}{4} \left(u^{\beta\cdot}_{\cdot 3} \frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial \xi^3} + u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot} \frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial \xi^3} \right) + \frac{F_\alpha}{D_0} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \tau^2} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} + \lambda \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial \xi^3} + (3\lambda + 6\mu + 4m + 2l) \Bigg[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{\alpha 3}}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \Bigg] + (\lambda + 2\mu + m) \Bigg[\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \xi^3} + u^{\beta\cdot}_{\cdot 3} \frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial \xi^3} +$$

$$
+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\Bigg]+(\mu+m)\left(u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}\frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}}{\partial\xi^3}\right)+
$$

$$
+(\lambda+2l)\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\right)+\left(m-\frac{n}{2}\right)u_{\gamma\beta}\frac{\partial u^{\beta\gamma}}{\partial\xi^3}+
$$

$$
+(n-2m+2l)u^\gamma_\gamma\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}u^{\beta\alpha}+\frac{F_3}{D_0}=\rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2},
$$

$$
\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\left[\mu\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2}+(\lambda+2\mu+m)\left(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^\alpha}{(\partial\xi^3)^2}\right)+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}+u^{\alpha s}\frac{\partial^2 u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha s}}{\partial\xi^3}\right)+\left(m-\frac{n}{4}\right)\left(u^{\alpha 3}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}+\left(\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\right)^2\right)+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2}+\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3}\right]-\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{D_0}\left[\left(\frac{n}{4}-\frac{m}{2}+l\right)\left(\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\frac{\partial u_{\beta s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot s}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\right)^2\right]-\lambda\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+u^\gamma_\gamma\right)-2\mu u^{\alpha\alpha}-\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\left(u^\gamma_\gamma+2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)u^\beta_\beta-
$$

$$
-(\lambda+2m-n)\left(u^\gamma_\gamma+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)u^{\alpha\alpha}-\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\left(2u^{\beta 3}\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}+u^{\cdot\beta}_{\gamma\cdot}u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}\right)- \qquad (11)
$$

$$
-\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\left(u^{\alpha 3}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}+u^{\alpha\beta}u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\right)-\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\beta\alpha}u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}+u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}u^{\alpha s}+\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}\right)^2\right)-
$$

$$
-\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\left(u_{\gamma s}u^{\gamma s}+\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^s}{\partial\xi^3}\right)-\left(\frac{n}{4}-\frac{m}{2}+l\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)^2+
$$

$$
+\frac{F_{\alpha\alpha}}{D_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha=1,2),
$$

$$
\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\left[\mu\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{(\partial\xi^3)^2}+(\lambda+2\mu+m)\left(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^\gamma}{(\partial\xi^3)^2}\right)+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}+u^{\gamma s}\frac{\partial^2 u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\gamma s}}{\partial\xi^3}\right)+
$$

$$
\left.+\left(m-\frac{n}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}u^{\gamma 3}+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\gamma 3}}{\partial\xi^3}\right)+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^3}\right)\right]-
$$

$$
-\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{D_0}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}-\mu\left(u^{\alpha\gamma}+u^{\gamma\alpha}\right)-\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+u^\beta_\beta\right)u^{\alpha\gamma}-
$$

$$
-\left(m-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+u^\beta_\beta\right)u^{\gamma\alpha}-\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\alpha 3}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3}+u^{\alpha\beta}u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}+u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}u^{\beta\gamma}+u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}u^{\gamma s}+\right.
$$

$$+\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \xi^3}\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \xi^3}\Big)-\frac{n}{4}\left(u^{\gamma 3}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \xi^3}+u^{\gamma\beta}u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\right)+\frac{F_{\gamma\alpha}}{D_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{\partial \tau^2}\quad(\alpha\neq\gamma),$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\Bigg[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}+(2\lambda+4\mu+3m+2l)\left(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial \xi^3}+\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\right)+$$

$$+(\lambda+2\mu+m)\left(\frac{\partial^2 u_s}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha s}}{\partial \xi^3}+\frac{\partial u_s}{\partial \xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha s}}{(\partial\xi^3)^2}\right)+(\mu+m)\Bigg(u_{\beta 3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}+$$

$$+\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial \xi^3}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial \xi^3}\Bigg)+(\lambda+2l)\left(u^{\beta}_{\beta}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial \xi^3}\frac{\partial u^{\beta}_{\beta}}{\partial \xi^3}\right)\Bigg]-(\mu+m)\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{D_0}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial \xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial \xi^3}-$$

$$-\mu\left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \xi^3}+u^{\alpha 3}\right)-\left(\lambda+\mu+m-\frac{n}{4}\right)u^{\alpha 3}\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}-\frac{n}{4}\frac{\partial u_{\beta}}{\partial \xi^3}u^{\beta\alpha}-\left(m-\frac{n}{2}\right)u^{\beta}_{\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \xi^3}-$$

$$-\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}\frac{\partial u^{s}}{\partial \xi^3}+\left(u^{\alpha\beta}+u^{\beta\alpha}\right)u_{\beta 3}\right)-\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)u^{\beta}_{\beta}u^{\alpha 3}-$$

$$-(\mu+m)\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial \xi^3}+\frac{F_{3\alpha}}{D_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{\partial \tau^2}\quad(\alpha=1,2).$$

У рівняннях (11) використано позначення: $u_{\alpha k}=u^{\cdot k}_{\alpha\cdot}=u^{\alpha\cdot}_{\cdot k}=u^{\alpha k}$; $F_i=\vec{\ni}^{\,0}_i\cdot\hat{F}^{(1)}$; $F_{kn}=\vec{\ni}^{\,0}_n\otimes\vec{\ni}^{\,0}_k\cdot\cdot\hat{F}^{(2)}$; D_0 – площа області D;

$$j^{\alpha\alpha}=\iint\limits_{D}(\xi^{\alpha})^2 d\Sigma_0\quad -$$

моменти інерції області D стосовно осей координат.

Для формулювання динамічних і мішаних граничних умов на поперечних перерізах $\xi^3=0,b$ в задачах теорії пружності циліндричних тіл крім розвинення вектора переміщення $\vec{u}$ за вибраною тензорною базою, як показано в [1], необхідно знати розвинення і вектора напружень $\vec{P}_3$ за цією ж базою. Тому наведемо значення коефіцієнтів розвинення $\vec{P}_3=\hat{P}^{(1)}_3+\vec{R}_0\cdot\hat{P}^{(2)}_3$ для випадку, що розглядається. Якщо обчислити згідно з (8) значення $\hat{A}^{(r+1)}_{3\alpha}, B^{(k+r+1)}_{3s}(\alpha,k,r=1,2;s=\overline{1,4})$, підставити одержані вирази в (7) і зробити перерозклад, то отримаємо

$$\hat{P}^{(1)}_3=\Bigg\{\delta^3_k\Bigg[\lambda u^{\alpha}_{\alpha}+(\lambda+\mu)\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\left(u_{\alpha\beta}u^{\beta\alpha}+u^{\alpha\cdot}_{\cdot 3}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi^3}\right)+lu^{\alpha}_{\alpha}\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}+$$

$$+\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\left(u^{\alpha}_{\alpha}+\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right)u^{\beta}_{\beta}+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)u_{\alpha s}u^{\alpha s}+\frac{m}{2}u^{\alpha 3}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi^3}+\left(l+\frac{m}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{m}{2}\right)\delta^{ij}\frac{\partial u_i}{\partial \xi^3}\frac{\partial u_j}{\partial \xi^3}\Bigg]+\delta^{\alpha}_k\Bigg[\mu u_{\alpha 3}+\frac{n}{4}\left(u_{\alpha\beta}u^{\beta 3}+u_{\alpha 3}\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right)+$$

$$+\left(m-\frac{n}{2}\right)u^{\beta}_{\beta}u_{\alpha 3}+\left(m-\frac{n}{4}\right)u_{\alpha 3}\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}\frac{\partial u_s}{\partial \xi^3}\Bigg]+\mu\frac{\partial u_k}{\partial \xi^3}+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\times$$

$$\times\left(u_{\alpha 3}+\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \xi^3}\right)u^{\alpha\cdot}_{\cdot k}+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)u^{\beta}_{\beta}\frac{\partial u_k}{\partial \xi^3}+(\lambda+2\mu+m)\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\frac{\partial u_k}{\partial \xi^3}\Bigg\}\vec{\ni}^{\,k}_0,$$

$$\begin{aligned}\hat{P}_3^{(2)} = \Bigg\{ & \mu\frac{\partial u_{\gamma k}}{\partial \xi^3} + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right) u_{\beta\beta}\frac{\partial u_{\gamma k}}{\partial \xi^3} + \left(\mu + \frac{n}{4}\right) u^{\beta\cdot}_{\cdot k}\frac{\partial u_{\gamma\beta}}{\partial \xi^3} + (\lambda + 2\mu + m) \times \\ & \times \left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi^3}\frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\frac{\partial u_{\gamma k}}{\partial \xi^3}\right) + \delta_k^3 \Bigg[(\lambda + \mu)\frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + \left(m - \frac{n}{4}\right) u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}\frac{\partial u_{\gamma\beta}}{\partial \xi^3} + \\ & + \left(\frac{n}{2} - m + 2l\right) u^{\beta}_{\beta}\frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + (2l + m)\frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + (\lambda + 2\mu + m)\frac{\partial u_s}{\partial \xi^3}\frac{\partial u^{\cdot s}_{\gamma\cdot}}{\partial \xi^3}\Bigg] + \\ & + \delta_k^{\alpha}\left[\left(m - \frac{n}{4}\right) u_{\alpha 3}\frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + \left(\mu + \frac{n}{4}\right) u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}\frac{\partial u_{\gamma s}}{\partial \xi^3}\right]\Bigg\} \vec{\ni}_0^{\gamma} \otimes \vec{\ni}_0^{k}.\end{aligned}$$

Розглянемо в прийнятому наближенні систему рівнянь руху лінійної теорії пружності, котрі описують власні коливання циліндричного тіла. Такі рівняння отримаємо із рівнянь (11), якщо в останніх знехтуємо нелінійними членами і покладемо $F_i = 0$, $F_{k\alpha} = 0 (i, k = \overline{1,3}; \alpha = 1, 2)$. В результаті одержимо

$$\begin{gathered}\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_{13}}{\partial \xi^3}\right) = \rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2}, \\ \mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_{23}}{\partial \xi^3}\right) = \rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2}, \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} + \lambda\left(\frac{\partial u_{11}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial u_{22}}{\partial \xi^3}\right) = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\mu J^{11}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{11}}{(\partial \xi^3)^2} - \lambda\left(u_{11} + u_{22} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right) - 2\mu u_{11} = \frac{\rho_0 J^{11}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\mu J^{22}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{22}}{(\partial \xi^3)^2} - \lambda\left(u_{11} + u_{22} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3}\right) - 2\mu u_{22} = \frac{\rho_0 J^{22}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{22}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\mu J^{11}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{12}}{(\partial \xi^3)^2} - \mu(u_{12} + u_{21}) = \frac{\rho_0 J^{11}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\mu J^{22}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{21}}{(\partial \xi^3)^2} - \mu(u_{12} + u_{21}) = \frac{\rho_0 J^{22}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{(\lambda + 2\mu)J^{11}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial \xi^3)^2} - \mu\left(u_{13} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi^3}\right) = \frac{\rho_0 J^{11}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{13}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{(\lambda + 2\mu)J^{22}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{23}}{(\partial \xi^3)^2} - \mu\left(u_{23} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi^3}\right) = \frac{\rho_0 J^{22}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{23}}{\partial \tau^2}.\end{gathered} \tag{12}$$

Проведемо короткий аналіз системи рівнянь (12). Два перші і два останні рівняння цієї системи описують поперечні коливання циліндричного тіла у двох головних площинах. Розглянемо такі коливання в одній з площин. Нехай, для означеності, вона характеризується індексом 1.

Знехтуємо спочатку інерцією обертання, тобто проаналізуємо систему

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_{13}}{\partial \xi^3}\right) = \rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2},$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)J^{11}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\left(u_{13}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\right)=0. \tag{13}$$

З цих двох рівнянь отримуємо

$$\frac{(\lambda+2\mu)J^{11}}{D_0}\frac{\partial^3 u_{13}}{(\partial\xi^3)^3}=\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}.$$

Тепер додатково знехтуємо деформацією зсуву, тобто покладемо, що

$$u_{13}=-\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}.$$

В результаті одержуємо

$$(\lambda+2\mu)J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}=0. \tag{14}$$

Якщо покласти $\nu=0$, де $\nu=\lambda/(2(\lambda+\mu))$, то $\lambda=0$, $\mu=E/2$ і тоді отримаємо добре відоме рівняння (див. напр. [4,5])

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}=0,$$

котре, за звичай, використовується при вивченні поперечних коливань циліндричних тіл.

Коли не нехтувати деформацією зсуву, то виразивши з першого рівняння системи (13) $\dfrac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}$ і підставивши одержане значення в друге рівняння цієї системи, попередньо продиференціювавши його по ξ^3, ми б одержали рівняння

$$(\lambda+2\mu)J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\frac{\rho_0 J^{11}(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \tag{15}$$

При $\nu=0$ воно має вигляд

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-2\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0.$$

У випадку, коли приймається до уваги інерція обертання, то з першого і передостаннього рівнянь системи (12) одержимо

$$\frac{(\lambda+2\mu)J^{11}}{D_0}\frac{\partial^3 u_{13}}{(\partial\xi^3)^3}-\frac{\rho_0 J^{11}}{D_0}\frac{\partial^3 u_{13}}{\partial\xi^3\partial\tau^2}=\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}. \tag{16}$$

Якщо знехтувати тепер деформацією зсуву, то з (16) знаходимо

$$(\lambda+2\mu)J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \tag{17}$$

При $\nu=0$ з (17) отримуємо

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \tag{18}$$

Рівняння (18) наведено в роботах С. П. Тимошенка і В. З. Власова (див. напр. [6,4]).

Якщо з першого рівняння системи (12) визначити $\frac{\partial u_{13}}{\partial \xi^3}$ і результат підставити в передостаннє рівняння цієї системи, то отримаємо рівняння поперечних коливань циліндричного тіла

$$(\lambda+2\mu)J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\rho_0 J^{11}\left(1+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}+\frac{\rho_0^2 J^{11}}{\mu}\frac{\partial^4 u_1}{\partial\tau^4}=0, \quad (19)$$

котре враховує і деформацію зсуву, і інерцію обертання. З цього рівняння раніше отримані рівняння (14), (15), (17) можна одержати як часткові випадки.

Рівняння (19) вперше отримано С. П. Тимошенком в 1920 році в праці [6]. В цій же роботі оцінено вклад поправок на інерцію обертання і деформацію зсуву на частоти власних коливань. Показано, що величина поправок збільшується із зменшенням довжини хвилі і що обидві поправки неістотні, якщо довжина хвилі поперечних коливань велика в порівнянні з розмірами поперечного перерізу цидіндричного тіла. Ці висновки підтверджено в роботі С. П. Тимошенка [7] на підставі точного розв'язку задачі для балки прямокутного поперечного перерізу.

Про інші групи системи рівнянь (12). Якщо в третьому рівнянні покласти $u_{11}=u_{22}=0$, що рівносильно гіпотезі про відсутність деформації видовження в площині поперечного перерізу, то одержимо відоме в літературі рівняння поздовжніх коливань цидіндричного тіла

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}=\rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2}.$$

У загальному випадку з третього, четвертого і п'ятого рівнянь системи (12) можна одержати рівняння поздовжніх коливань, котре враховує деформацію та інерцію видовження в площині поперечного перерізу.

Відзначимо, що коли в шостому і в сьомому рівняннях (12) покласти $u_{21}=-u_{12}=\theta$, тобто знехтувати деформацією кручення в площині поперечного перерізу, то ці рівняння зводяться до відомого рівняння крутильних коливань

$$\mu\frac{\partial^2\theta}{(\partial\xi^3)^2}=\rho_0\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}.$$

В сукупності з шостого і сьомого рівняння (12) можна одержати рівняння крутильних коливань, котре враховує деформацію та інерцію кручення в площині поперечного перерізу циліндричного тіла.

Система рівнянь (12) відповідає узагальненій гіпотезі плоских перерізів. Тут, на відміну від класичної моделі плоских перерізів, для котрої $u_{11}=u_{22}=0$, $u_{21}=-u_{12}$, враховуються деформація видовження і кручення в площині поперечного перерізу. Аналіз рівнянь руху для математичної моделі, котра враховує депланацію поперечного перерізу, можна провести, якщо у формулі (1) покласти $N=3$.

1. Доманський П. П. Математичні моделі нелінійної динамічної теорії пружності циліндричних тіл. – Львів, 1995. – 43 с. (Препринт / НАН України. ІППММ; N 16-95).

2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М., Наука, 1980. – 512 с.

3. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л., Машиностроение, 1986. – 336 с.

4. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. – М., ГИФМЛ, 1959. – 568 с.

5. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М., Наука, 1967. – 984 с.

6. Timoshenko S. P. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars* // Philosophical Magazine and Journal of Science, ser. 6. – 1921. – Vol. 41, May, N 245. – P. 744-746.

7. Timoshenko S. P. *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section* // Philosophical Magazine and Journal of Science, ser. 6. – 1922. – Vol. 43, January, N 253. – P. 125-131.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.98