

УДК 539.3

МЕТОД РЕАЛІЗАЦІЇ УМОВ ОДНОСТОРОННЬОГО КОНТАКТУ ТА ТЕРТЯ В КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН

О. Я. ГАЛЯС, І. А. ПРОКОПИШИН, Д. Г. ХЛІБНИКОВ

Galyas O. Y., Prokopyshyn I. A., Khlebnikov D. G. A method for realization of unilateral contact conditions and friction in contact problems for transversally-isotropic plates. The quasi-static contact problem with friction of bending of a transversally-isotropic plate by a rigid stamp are considered on the base of the Timoshenko's plate theory including the transversal compression. The idea of introducing an intermediate elasto-plastic layer between the plate and the stamp is used to model the contact conditions. After load parameter discretization the initial problem is reduced to a sequence of the elasticity problems for solids connected by a linear layer with a certain distribution of nonelastic strains. Numerical realization of the approach is made by means of the finite elements method with linear triangle elements.

Розглянемо трансверсально-ізотропну пластину завтовшки $2h$ в декартовій системі координат (рис.1). В площині Oxy пластина займає область Ω з межею $\Gamma = \partial\Omega$.

Пластина згинається жорстким штампом з формою основи $z = f(x, y)$. Після вертикального переміщення штампа на величину δ утворюється зона контакту Ω_c , по якій розподілені контактні напруження: нормальне – σ та дотичні – τ_1, τ_2 . Припускається, що в області $(x, y) \in \Omega_c$ виконуються умови одностороннього контакту та тертя за законом Амонтона-Кулона.

Напружено-деформований стан пластини за теорією Тимошенка [1] характеризується: вектором узагальнених переміщень $\bar{u} = [u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2]^T$, вектором деформацій $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}]^T$, та вектором узагальнених зусиль $\bar{\sigma} = [N_1, N_2, S_{12}, Q_1, Q_2, M_1, M_2, H_{12}]^T$, де

u_1, u_2, u_3 – переміщення точок серединної площини пластини,

γ_1, γ_2 – кути повороту нормального волокна,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, 2\varepsilon_{12}$ – деформації розтягу та зсуву в площині пластини,

$2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}$ – деформації зсуву в поперечному напрямі,

$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ – деформації згину та кручення,

N_1, N_2, S_{12} – зусилля в площині пластини,

Q_1, Q_2 – перерізуючі зусилля,

M_1, M_2, H_{12} – згинальні та крутильний моменти.

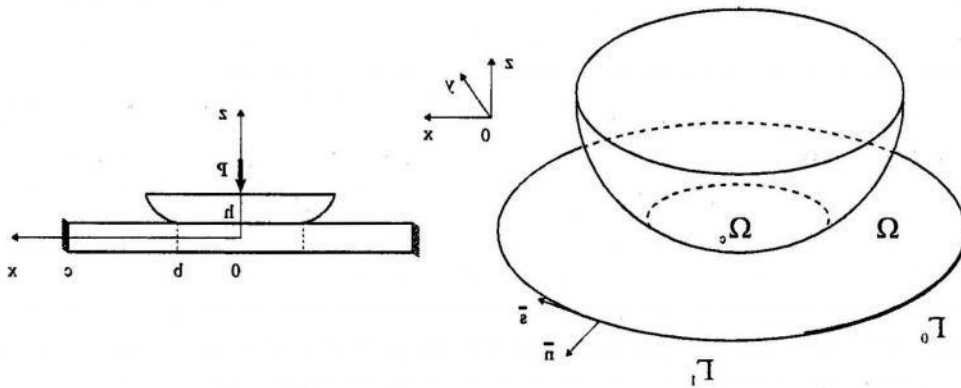


Рис. 1

Рис. 2

Вектори узагальнених зусиль, переміщень та деформацій пов'язані рівняннями рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} + \tau_1 &= 0, & \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \tau_2 &= 0, & \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \sigma &= 0, \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H_{12}}{\partial y} - Q_1 + h\tau_1 &= 0, & \frac{\partial H_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 + h\tau_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

кінематичними співвідношеннями

$$\bar{\epsilon} = \mathbf{A} \bar{u}, \quad (2)$$

та фізичними співвідношеннями

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D} \bar{\epsilon}, \quad (3)$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} B & \nu B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu B & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D \end{bmatrix},$$

$D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ – циліндрична жорсткість, $\Lambda = 2k'G_1h$ – трансверсальна жорсткість, $B = 2Eh/(1-\nu^2)$ – мембранна жорсткість, E, ν, G – модуль пружності, коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву в площинах ізотропії, E_1, ν_1, G_1 – відповідні величини у поперечному напрямку, k' – коефіцієнт зсуву.

На контурі $\Gamma_0 \subset \Gamma$ задано кінематичні крайові умови

$$\begin{aligned} u_n &= n_1 u_1 + n_2 u_2 = u_n^0, & u_s &= -n_2 u_1 + n_1 u_2 = u_s^0, & u_3 &= u_3^0, \\ \gamma_n &= n_1 \gamma_1 + n_2 \gamma_2 = \gamma_n^0, & \gamma_s &= -n_2 \gamma_1 + n_1 \gamma_2 = \gamma_s^0; \end{aligned} \quad (4)$$

а на контурі $\Gamma_1 \subset \Gamma$ – статичні

$$\begin{aligned} N_n &= N_1 n_1^2 + 2S_{12} n_1 n_2 + N_2 n_2^2 = N_n^0, \\ T_s &= (N_2 - N_1) n_1 n_2 + S_{12} (n_1^2 - n_2^2) = T_s^0, \\ Q_n &= Q_1 n_1 + Q_2 n_2 = Q_n^0, \\ M_n &= M_1 n_1^2 + 2H_{12} n_1 n_2 + M_2 n_2^2 = M_n^0, \\ H_{ns} &= (M_2 - M_1) n_1 n_2 + H_{12} (n_1^2 - n_2^2) = H_{ns}^0, \end{aligned} \quad (5)$$

де n_1, n_2 – напрямні косинуси нормалі до Γ .

Контакт штамп з пластиною при $(x, y) \in \Omega$ описується умовами: одностороннього нормального контакту

$$w - f + \delta \leq 0, \quad \sigma \leq 0, \quad (w - f + \delta)\sigma = 0, \quad (6)$$

та умовами сухого тертя Амонтона-Кулона [2]

$$|\vec{\tau}| \leq -k\sigma, \quad (7)$$

$$|\vec{\tau}| < -k\sigma \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\tau = 0, \quad (8)$$

$$|\vec{\tau}| = -k\sigma \Rightarrow \frac{\vec{\tau}}{|\vec{\tau}|} = -\frac{\dot{\vec{u}}_\tau}{|\dot{\vec{u}}_\tau|}, \quad (9)$$

де w – вертикальне переміщення поверхні пластини $z = h$; $\vec{\tau}$ – вектор дотичного напруження на поверхні пластини; $\dot{\vec{u}}_\tau$ – вектор швидкості дотичного переміщення поверхні пластини; k – коефіцієнт тертя.

Зона контакту визначається так: $\Omega_c = \{(x, y) \in \Omega \mid \sigma(x, y) < 0\}$.

Для реалізації умов контакту в розвиток ідей праць [3–5] між штампом та пластиною введемо неоднорідний анізотропний пружно-пластичний шар завтовшки h^* . Цей шар може бути цілком умовним і відображати ідею методу штрафу в контактних задачах [6], або ж реальні властивості контактуючих тіл (шерехатість, формування поверхневого шару, обтиснення і т.ін.).

Позначимо через u_i^* переміщення точок шару. Припустимо, що в ньому виникають лише зсувні $\gamma_i^* = \frac{\partial u_i^*}{\partial z}$ ($i = 1, 2$) і нормальні деформації $\varepsilon^* = \frac{\partial u_3^*}{\partial z}$ та відповідні їм напруження τ_1, τ_2, σ , які вважаємо постійними по товщині шару. Для дослідження клейових та адгезійних з'єднань така модель проміжкового шару була запропонована і широко використовувалася у працях Рабіновича А.Л. [7].

Фізичні співвідношення для проміжкового шару, за аналогією з [8], візьмемо у формі закону пластичного течіння

$$d\gamma_i^* = d\gamma_i^{*e} + d\gamma_i^{*p} = \frac{1}{G^*} d\tau_i + \tau_i d\lambda_i, \quad i = 1, 2; \quad (10)$$

$$d\varepsilon^* = d\varepsilon^{*e} + d\varepsilon^{*p} = \frac{1}{E^*} d\sigma + \sigma d\lambda, \quad (11)$$

де

$$d\lambda_1 = d\lambda_2 = S_-(T - T_y) \frac{\overline{d\Gamma_p}}{T_y}, \quad d\lambda = S_-(\sigma - \sigma_y) \frac{d\varepsilon^{*p}}{\sigma_y},$$

$$G^*, E^* - \text{модулі пружності та зсуву},$$

$$T = (\tau_1^2 + \tau_2^2)^{\frac{1}{2}} - \text{інтенсивність дотичних напружень},$$

$$\overline{d\Gamma_p} = [(d\gamma_1^{*p})^2 + (d\gamma_2^{*p})^2]^{\frac{1}{2}} - \text{інтенсивність приростів пластичних деформацій},$$

$$T_y(q), \sigma_y(\varepsilon^{*p}) - \text{функції деформування}, q - \text{параметр зміцнення},$$

$$S_-(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} - \text{одинична асиметрична функція}.$$

Закони деформування (10), (11) легко дозволяють реалізувати умови контакту (6)–(9). Скажімо, для моделювання умов одностороннього контакту (6) достатньо у виразі (11) врахувати лише перший доданок і взяти модуль пружності у вигляді

$$E^*(\varepsilon^*) = \begin{cases} E, & \varepsilon^* \leq 0 \\ \alpha E, & \varepsilon^* > 0 \end{cases},$$

де $\alpha > 0$ – достатньо мале число.

Покажемо спосіб реалізації умов тертя Амонтона-Кулона. Стрибки переміщень під час переходу через проміжковий шар, внаслідок прийнятих гіпотез дорівнюють

$$[u_i^*] = h^* \gamma_i^*, \quad i = 1, 2; \quad [u_3^*] = h^* \varepsilon^*.$$

З рівнянь пластичного течіння (10) випливає, що у зоні течіння

$$|\vec{\tau}| = T = T_y. \quad (12)$$

З цих же рівнянь за умови $\gamma_i^{*e} \ll \gamma_i^{*p}$ ($i = 1, 2$) одержується наближена рівність

$$\frac{[u_i^*]}{([u_1^*]^2 + [u_2^*]^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\tau_i}{|\vec{\tau}|}, \quad (13)$$

яка в одновимірному випадку виконується точно. За умови $T_y = -k\sigma$ співвідношення (12), (13) дають закон тертя Амонтона-Кулона.

Дамо схему чисельного дослідження вихідної задачі, базуючись на загальній методиці розв'язування задач пластичного течіння [9]. Замінімо співвідношення пластичного течіння (10), (11) різницевиими, розглядаючи процес навантаження у вузлах сітки $\delta = \{\delta^{(1)} < \delta^{(2)} < \dots < \delta^{(N)}\}$, де δ – параметр навантаження. Для цього зінтегруємо їх на проміжку від $\delta^{(n-1)}$ до $\delta^{(n)}$. В результаті отримаємо (для зменшення обсягу наводимо лише вирази для нормальних деформацій, вирази для зсувів – аналогічні)

$$\varepsilon^{*(n)} - \varepsilon^{*(n-1)} = \frac{1}{E^*} [\sigma^{(n)} - \sigma^{(n-1)}] + \int_{\lambda^{(n-1)}}^{\lambda^{(n)}} \sigma d\lambda.$$

Обчислюючи інтеграл у правій частині, наприклад, за формулою правих прямокутників, матимемо

$$\varepsilon^{*(n)} = \left(\frac{1}{E^*} + \Delta^{(n)} \lambda \right) \sigma^{(n)} + \varepsilon^{*(n-1)} - \frac{\sigma^{(n-1)}}{E^*}. \quad (14)$$

Співвідношення (14) є нелінійним і лінеаризується методом січних модулів.

Враховуючи, що стрибки переміщень через шар пов'язані з деформаціями лінійним чином, на k -му кроці методу січних модулів матимемо такі лінійні залежності між величинами стрибків переміщень та контактними напруженнями:

$$[u_i^*]^{(n,k)} = \frac{h^*}{G^{(n,k)}} \tau_i + [u_i^{*p}]^{(n-1)}, \quad i = 1, 2; \quad [u_3^*]^{(n,k)} = \frac{h^*}{E^{(n,k)}} \sigma + [u_3^{*p}]^{(n-1)}.$$

Тому, на кожній ітерації методу січних модулів необхідно розв'язати задачу для двох тіл, з'єднаних через лінійно-пружний шар при заданому розподілі непружних деформацій у ньому.

Кінематичні умови контакту штампа з пластиною через такий проміжковий шар матимуть вигляд

$$\begin{aligned} u_3 + \kappa \sigma + \frac{h^*}{E^{(n,k)}} \sigma + [u_3^{*p}]^{(n-1)} &= f(x, y) - \delta^{(n)}, \\ u_i + \gamma_i h + \omega \tau_i + \frac{h^*}{G^{(n,k)}} \tau_i + [u_i^{*p}]^{(n-1)} &= u_i^{+(n)}, \end{aligned} \quad (15)$$

де $u_i^{+(n)}(x, y)$ – горизонтальні переміщення поверхні пластини у точці (x, y) на момент вступу даної точки у контакт зі штампом; $\kappa \sigma$, $\omega \tau_i$ – додаткові переміщення поверхні пластини, які прямо пропорційно залежать від прикладеного навантаження і враховують обтиснення по товщині пластини. При цьому коефіцієнти обтиснення κ , ω та зсуву k' подаються формулами, отриманими внаслідок асимптотичного аналізу просторової задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропного шару [10]

$$k' = \frac{5}{6} \frac{G}{G_1} \frac{2}{(1-\nu)\lambda}, \quad \kappa = \frac{260\mu - \lambda^2}{350} \frac{1-\nu^2}{E} h, \quad \omega = \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{\mu}}{5} \right) \frac{(1-\nu)\lambda h}{4G}, \quad (16)$$

де

$$\lambda = \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{G}{G_1} - \nu_1 \frac{E}{E_1} \right), \quad \mu = \frac{E(1-\nu_1^2 \frac{E}{E_1})}{E_1(1-\nu^2)}.$$

Під час застосування проміжкового пружно-пластичного шару для моделювання умов тертя виникає проблема, пов'язана з необхідністю виконання умови $\vec{\tau} = 0$ поза зоною контакту Ω_c (у зоні $\Omega \setminus \Omega_c$). При $\sigma = 0$ умова $\vec{\tau} = 0$ формально впливає з умови тертя (9) при $T_y = 0$. Це означає, що в даній області зсувні деформації шару є повністю пластичними. Виходячи з кінематичної умови контакту штампа з пластиною через проміжковий шар, отримуємо, що пластичні переміщення з точністю до знака дорівнюють переміщенням поверхні пластини. Отже, у зоні $\Omega \setminus \Omega_c$ для визначення пластичних деформацій немає необхідності реалізовувати алгоритм січних модулів. Врахування пластичних деформацій здійснюється їх безпосереднім введенням в умову кінематичного контакту (15); умова $\vec{\tau} = 0$ реалізується покладанням зсувної жорсткості проміжкового шару у цій зоні дуже близькою до нуля.

Для вектор-функцій узагальнених переміщень $\bar{u} \in (H^1(\Omega))^5$ введемо підростір K кінематично допустимих переміщень, який визначається кінематичними крайовими умовами

(4). Задача про контакт штампа та пластини через проміжковий шар на основі принципу можливих переміщень зводиться до мінімізації у підпросторі K функціоналу

$$J^{(n,k)}(\bar{u}) = \frac{1}{2}a(\bar{u}, \bar{u}) - l(\bar{u}) + \varepsilon^{(n,k)}(\bar{u}), \quad (17)$$

де $\frac{1}{2}a(\bar{u}, \bar{u})$ – енергія пружної деформації пластини за теорією Тимошенка:

$$\frac{1}{2}a(\bar{u}, \bar{u}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\mathbf{A}\bar{u})^T \mathbf{D}(\mathbf{A}\bar{u}) d\Omega;$$

$l(\bar{u})$ – робота зовнішніх зусиль на викликаних ними переміщеннях:

$$l(\bar{u}) = \int_{\Gamma_1} (u_n N_n^0 + u_s T_n^0 + u_3 Q_n^0 + \gamma_n M_n^0 + \gamma_s H_{ns}^0) d\Gamma;$$

$\varepsilon^{(n,k)}(\bar{u})$ – енергія пружної деформації проміжкового шару, записана з урахуванням кінематичних умов контакту (15):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n,k)}(\bar{u}) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \tilde{E}^{(n,k)} (f - \delta^{(n)} - [u_3^{*p}]^{(n-1)} - u_3)^2 + \right. \\ & \left. + \tilde{G}^{(n,k)} \sum_{i=1}^2 (u_i^{+(n)} - [u_i^{*p}]^{(n-1)} - u_i - h\gamma_i)^2 \right\} d\Omega, \\ \tilde{E}^{(n,k)} = & \frac{E^{(n,k)}}{\kappa E^{(n,k)} + h^*}, \quad \tilde{G}^{(n,k)} = \frac{G^{(n,k)}}{\omega G^{(n,k)} + h^*}. \end{aligned}$$

Оскільки обмеження у вигляді нерівностей відсутні, з умови мінімуму функціоналу (17) у підпросторі K після скінченно-елементної апроксимації приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Програмна реалізація здійснена на мові FORTRAN на базі програмного забезпечення для розв'язування двовимірних контактних задач згину пластин за відсутності тертя з використанням лінійних трикутних елементів [11].

Як приклад, розглянута плоска контактна задача про циліндричний згин жорстким штампом пластини з жорстко защемленим краєм (рис.2). Для її розв'язування використовувалася двовимірна прямокутна сітка завширшки в один елемент зі спеціальними крайовими умовами для моделювання умов циліндричного згину пластини [11].

Форма штампа задавалася функцією $f(x, y) = x^2/2R$, де R – радіус скруглення. Обчислення здійснювалися для пластин завдовжки $c/h = 5$, при радіусі скруглення штампа $R/h = 1.25 \cdot 10^3$, коефіцієнтах Пуассона $\nu = \nu_1 = 0.25$.

Нижче наводяться результати, отримані при розбитті пластини уздовж її довжини на 400 елементів при 800 кроках навантаження по δ до виникнення контакту по всій довжині пластини $\delta = \delta_c = 0.01h$.

На рис.3 показано розподіл нормальних $\bar{\sigma} = \sigma/E$ та дотичних $\bar{\tau}_1 = \tau_1/E$ контактних напружень, отриманих для відносних значень пружних параметрів пластини $E_1/E = 1$, $G_1/G = 0.25$ та коефіцієнта тертя $k = 0.2$. Криві 1–4 відповідають таким відносним значенням осідання $\bar{\delta} = \delta/\delta_c = 0.2, 0.6, 0.8, 1.0$. Штриховою лінією показано розподіл дотичних напружень у випадку абсолютно шерехатого штампа ($k = \infty$) для осідання $\bar{\delta} = 0.6$.

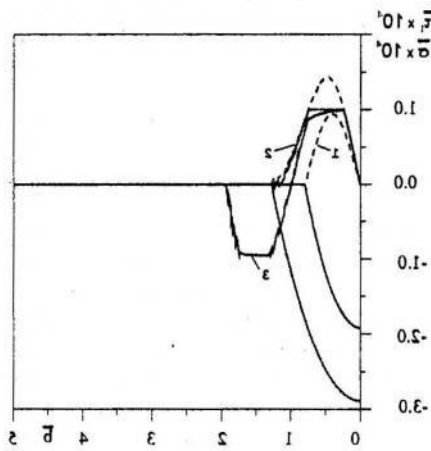


Рис. 3

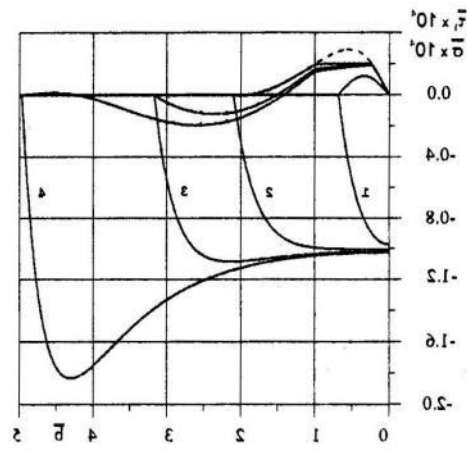


Рис. 4

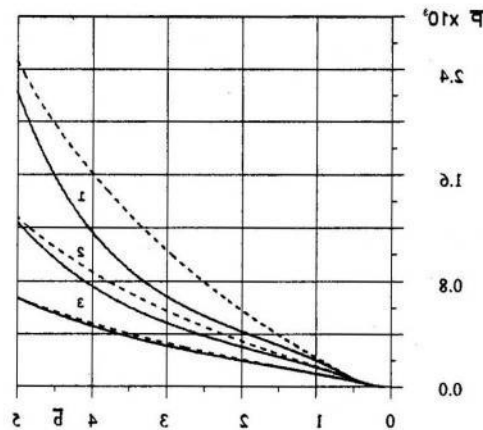


Рис. 5

Зазначимо, що спостережене незначне проковзування мало впливає на величину зони контакту і розподіл нормальних напружень під штампом у порівнянні з випадком абсолютно шерехатого штампа.

На рис.4 наведено графіки розподілу нормальних та дотичних напружень для ізотропної пластини ($E_1/E = 1$, $G_1/G = 1$), отримані за моделі тертя Треска-Сен-Венана ($T_y = T_{max} = 10^{-4}E$). Осіданню $\bar{\delta} = 0.2, 0.4, 0.6$ відповідають криві 1-3.

На рис.5 відображені залежності безрозмірного зусилля на штамп $\bar{P} = P/hE$ від величини зони контакту $\bar{b} = b/h$, отримані за різних співвідношень пружних сталей. Криві 1 відповідають ізотропному випадку ($E_1/E = 1$, $G_1/G = 1$); криві 2 – значенням $E_1/E = 1$, $G_1/G = 0.25$; криві 3 – значенням $E_1/E = 0.5$, $G_1/G = 0.125$. Випадок гладкого штампа ($\tau_1 = 0$) показано на рисунку суцільними лініями; а випадок ідеаль-

но шерехатого штампа – штриховими лініями. При зменшенні відносної трансверсальної жорсткості пластини вплив коефіцієнта тертя на величину зони контакту та розподіл контактних напружень проявляється все в меншій мірі.

Характер дотичних контактних напружень для початкової стадії навантаження зумовлений протидією шерехатого штампа стиску верхньої поверхні пластини. Зі збільшенням зони контакту напрям проковзування може змінитися на протилежний (рис.3,4). Відзначимо, що при $E_1/E = 0.5$, $G_1/G = 0.125$ вказаний ефект не спостерігається і дотичні напруження під час навантаження не змінюють знаку.

Для жорстких на зсув пластин помітне значне нагромадження похибки обчислення пластичних деформацій. Дискретність навантаження та розбиття області приводять до збурень дотичних напружень. За наявності проковзування ці збурення переходять у вирази для пластичні деформації, які на наступному кроці навантаження, у свою чергу, викликають збурення дотичних напружень і т.д. Таким чином може відбуватись лавинне нагромадження похибки, яке при значному проковзуванні унеможливорює здійснення обчислень.

1. Пелех Б. Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. – К., Наукова думка, 1977. – 182 с.
2. Кравчук А. С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // ПММ – 1980. – Т. 44, N 1. – С.122–129.
3. Блох М. В., Оробинский А. В. О модификации метода конечных элементов для решения двумерных упругих и пластических контактных задач // Проблемы прочности. – 1983. – N 5. – С.21–27.
4. Левин А. А. Численное моделирование квазистатического контактного взаимодействия деформируемых тел (двумерная постановка): Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Горький, 1987. – 16 с.
5. Prokopyshyn I. A., Khlebnikov D. G. A method for realisation of unilateral contact conditions, friction and fracture in quasi-static contact problems for elastic solids // Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media: Abstracts of Second Polish-Ukrainian conference. (Warsaw, September 11–13, 1997). – Warsaw, 1997. – P.50–51.
6. Oden J. I. Mixed finite element approximations via interior and exterior penalties for contact problem in elasticity // Hybrid and mixed finite element method: Proc. Int. Simp. (Atlanta, Ga, 8–10 apr., 1981.) – Chichester e.a., 1983. – P.467–486.
7. Рабинович А. Л. Введение в механику армированных полимеров. – М., Наука, 1970. – 482 с.
8. Michalowski R., Mroz Z. Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems // Archives of Mechanics. – 1978. – 30, N 3. – P.259–276.
9. Махненко В. И. Расчетные методы исследования сварочных напряжений и деформаций. – К., Наукова думка, 1976. – 320 с.
10. Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г. Асимптотический анализ решения теории упругости для трансверсально-изотропного слоя и построение уточненных теорий пластин для контактных задач // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань, 1992. – N 24. – С.108–113.
11. Прокопишин И. А. Численное решение двумерных контактных задач изгиба пластин с учетом обжатия // Львов. ун-т. – Львов, 1987. – 51с. – Деп. в Укр. НИИТИ, N 1387-Ук87.

Стаття надійшла до редколегії 20.10.98