УДК 539.3: 517.956.3

ПОСТАНОВКА ПОЧАТКОВО-ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ ДВОКОМПОНЕНТНИХ ПРУЖНИХ ТІЛ ТА ЇЇ ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ

М. М. Квасній

Kvasniy M. M. Statement of initial boundary value problem for system of equations of dynamic for twocomponents elastic solids and its variational formulation. With use of methods of the continuum mechanics the new initial boundary problem for the dynamic movement equations for twocomponents elastic solids is formulated. The energy of motion is defined in the space of velocities. The variational principle of this problem is proposed.

У даній праці розглянуто двокомпонентне пружне тіло – деформівний твердий каркас (компонента 1) і пружний наповнювач (компонента 2). Вважається, що тіло перебуває під дією силового навантаження.

В основу математичного моделювання тепломасопереносу в пружних тілах покладено концепцію взаємодіючих та взаємопроникаючих континуумів [1]. За базову прийнято компоненту 1, з котрою пов'язано реалізацію Лагранжевого підходу встановлення визначальних співвідношень та балансових рівнянь.

Методами термодинаміки та механіки суцільного середовища у праці [2] побудована математична модель для опису механічних, теплових і дифузійних процесів у двокомпонентних пружних тілах. Базові співвідношення математичної моделі сформульовані в параметрах нормованих за геометричними величинами початкової конфігурації. Тут і в подальшому ці величини відзначаємо нулем.

Надалі обмежимося розглядом сформульованої в праці [2] математичної моделі за ізотермічних умов ($T = \text{const}$).

Нехай вказане двокомпонентне пружне тіло в розглядуваний момент часу t займає область X евклідового простору $\mathbb{R}^3$ з границею ∂X, а в початковий момент часу ($t = 0$) – область X_0, обмежену поверхнею ∂X_0. Область X і поверхня ∂X змінюються в часі за законом руху матеріального континууму.

Сили міжконтиуумної взаємодії $\vec{F}_0^{(1,2)}$ і $\vec{F}_0^{(2,1)}$ визначимо таким чином:

$$\vec{F}_0^{(1,2)} = (\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)})\rho_0^{(2)}, \quad \vec{F}_0^{(2,1)} = -(\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)})\rho_0^{(2)},$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A10, 35L55.

де $\vec{\nabla}_0$ – оператор Гамільтона в початковій конфігурації; $\mu^{(2)}$ – хімічний потенціалі підсистеми 2; $\rho_0^{(2)}$ – густина підсистеми 2.

Вектор потоку маси підсистеми 2 $\vec{J}_0^2$ введемо по відношенню до точок континууму 1-деформівного твердого каркасу:

$$\vec{J}_0^2 = \rho_0^{(2)}(\vec{v}^{(2)} - \vec{v}^{(1)}),$$

де $\vec{v}^{(1)}$, $\vec{v}^{(2)}$ – швидкості відповідних компонент.

Якщо врахувати зв'язки векторів швидкостей $\vec{v}^{(1)}$ і $\vec{v}^{(2)}$ з радіус-векторами $\vec{r}^{(1)}$, $\vec{r}^{(2)}$: $\vec{v}^{(1)} = \dot{\vec{r}}^{(1)}$, $\vec{v}^{(2)} = \dot{\vec{r}}^{(2)}$, то балансові рівняння та фізичні співвідношення моделі, котрі описують механічні та дифузійні процеси у їх взаємозв'язку в насичених двокомпонентних тілах, набувають вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho_0^{(1)}}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial \rho_0^{(2)}}{\partial t} + \vec{\nabla}_0 \cdot \rho_0^{(2)}(\dot{\vec{r}}^{(2)} - \dot{\vec{r}}^{(1)}) = 0, \\ &\frac{\partial \vec{k}_0^{(1)}}{\partial t} = \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_0^{(1)} + (\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)})\rho_0^{(2)}, \\ &\frac{\partial \vec{k}_0^{(2)}}{\partial t} = \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_0^{(2)} - (\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)})\rho_0^{(2)}; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \mu^{(2)} = \frac{\partial L_0}{\partial \rho_0^{(2)}}, \qquad \widehat{\sigma}_0^{(1)} = \frac{\partial L_0}{\partial (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{(1)})}, \qquad \widehat{\sigma}_0^{(2)} = \frac{\partial L_0}{\partial (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{(2)})}, \\ \vec{k}_0^{(1)} = -\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{r}}^{(1)}}, \qquad \vec{k}_0^{(2)} = -\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{r}}^{(2)}}, \end{gathered} \tag{2}$$

де

$$L_0 = L_0(\rho_0^{(2)},\ \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{(1)},\ \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{(2)},\ \dot{\vec{r}}^{(1)},\ \dot{\vec{r}}^{(2)}). \tag{3}$$

Тут $\rho_0^{(1)}$ – густина підсистеми 1; $\vec{k}_0^{(1)}$ і $\vec{k}_0^{(2)}$ – імпульси поступальної форми руху відповідно компонент 1 та 2; $\widehat{\sigma}_0^{(1)}$ та $\widehat{\sigma}_0^{(2)}$ – тензори напружень Піоли-Кірхгофа для обох компонент; символ $\otimes$ означає операцію тензорного добутку. Система рівнянь (1) – система балансових рівнянь, система рівнянь (2) – система фізичних співвідношень. Потенціальна функція L_0 (3) є характеристичною функцією густини компоненти 2, градієнтів деформації підсистем 1 і 2 та швидкостей обох компонент.

У випадку подання радіус-векторів $\vec{r}^{(1)}$ та $\vec{r}^{(2)}$ через переміщення $\vec{u}^{(1)}$ і $\vec{u}^{(2)}$: $\vec{r}^{(i)} = \vec{r}_0 + \vec{u}^{(i)}$, $i = 1,\ 2$, враховуючи, що $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_0 = \widehat{I}$ (де $\widehat{I}$ – одиничний тензор), потенціальна функція L_0 набуде вигляду

$$L_0 = L_0(\rho_0^{(2)},\ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(1)},\ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(2)},\ \dot{\vec{u}}^{(1)},\ \dot{\vec{u}}^{(2)}).$$

Із системи рівнянь (1)–(3) можна, за певних умов, виключити змінні $\rho_0^{(1)}$, $\rho_0^{(2)}$. Надалі приймаємо, що в початковому стані кожна із підсистем є однорідною, тобто

$$\rho_0^{(1)}(\vec{r}_0,\ 0) = \rho_0^{(1)*}, \tag{4}$$

$$\rho_0^{(2)}(\vec{r}_0,\ 0) = \rho_0^{(2)*}, \tag{5}$$

де $\rho_0^{(1)*}$, $\rho_0^{(2)*}$ – сталі. З першого рівняння системи (1), враховуючи (4), отримаємо $\rho_0^{(1)} = \rho_0^{(1)*}$. При наближеному знаходженні $\rho_0^{(2)}$ будем нехтувати складовою типу $(\dot{\vec{u}}^{(2)} - \dot{\vec{u}}^{(1)}) \cdot \vec{\nabla}_0 \rho_0^{(2)}$

в другому балансовому рівнянні системи (1). Це відповідає припущенню про нехтовно малий внесок конвективної складової руху континууму 2 по відношенню до континууму 1. В умовах такого припущення з використанням початкової умови (5) знаходимо

$$\rho_0^{(2)} = \rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})}.$$

Тоді система рівнянь (1)–(3) математичної моделі набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{k}_0^{(1)}}{\partial t} &= \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_0^{(1)} + (\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)}) \rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})}, \\ \frac{\partial \vec{k}_0^{(2)}}{\partial t} &= \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_0^{(2)} - (\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)}) \rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})}; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \mu^{(2)} = \frac{\partial L_0}{\partial(\rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})})}, \\ \widehat{\sigma}_0^{(1)} = \frac{\partial L_0}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(1)})}, \qquad \widehat{\sigma}_0^{(2)} = \frac{\partial L_0}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(2)})}, \\ \vec{k}_0^{(1)} = -\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{u}}^{(1)}}, \qquad \vec{k}_0^{(2)} = -\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{u}}^{(2)}}, \end{gathered} \tag{7}$$

де

$$L_0 = L_0(\rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})}, \ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(1)}, \ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(2)}, \dot{\vec{u}}^{(1)}, \dot{\vec{u}}^{(2)}). \tag{8}$$

Надалі будемо розглядати ізотропні тіла і вважати, що для (8) справедливе зображення

$$L_0 = \frac{\gamma(\rho_0^{(2)})^2}{2} + L(\widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(1)}, \ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(2)}, \dot{\vec{u}}^{(1)}, \dot{\vec{u}}^{(2)}), \tag{9}$$

де константа γ – коефіцієнт пропорційності. Приймемо також, що $|\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})| \ll 1$. Тоді

$$e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})} \approx 1 + \vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}) \tag{10}$$

і будемо нехтувати членами більшого порядку малості, ніж $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}))$ в рівняннях (6).

Якщо врахувати (9), (10) та, для зручності запису, нулики опустити, а $\rho_0^{(2)*}$ позначити через ρ_*, то повна система рівнянь (6)–(8) буде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{k}^{(1)}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \cdot \widehat{\sigma}^{(1)} + \gamma \rho_*^2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})), \\ \frac{\partial \vec{k}^{(2)}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \cdot \widehat{\sigma}^{(2)} + \gamma \rho_*^2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})); \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \widehat{\sigma}^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(1)})}, \qquad \widehat{\sigma}^{(2)} = \frac{\partial L}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)})}, \\ \vec{k}^{(1)} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{u}}^{(1)}}, \qquad \vec{k}^{(2)} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{u}}^{(2)}}, \end{gathered} \tag{12}$$

де

$$L = L(\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(1)}, \ \widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)}, \dot{\vec{u}}^{(1)}, \dot{\vec{u}}^{(2)}). \tag{13}$$

Для забезпечення однозначності розв'язку системи рівнянь (11)–(13) необхідні додаткові умови, котрі складаються з початкових умов на параметри задачі та граничних умов на поверхні розділу *двокомпонентне пружне тіло – зовнішнє середовище*.

За початкові приймемо умови, що відповідають вихідному рівноважному стану розглядуваної динамічної системи в момент часу $t = 0$:

$$\vec{u}^{(1)}\big|_{t=0} = 0, \quad \vec{u}^{(2)}\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{14}$$

Граничні умови для системи рівнянь (11) приймемо у вигляді

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\big(\widehat{\sigma}^{(1)} + \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})\widehat{I}\big)\big|_{\partial X_0} &= \vec{\sigma}_n^{(1)\bullet}, \\ \vec{n}\cdot\big(\widehat{\sigma}^{(1)} - \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})\widehat{I}\big)\big|_{\partial X_0} &= \vec{\sigma}_n^{(2)\bullet}, \end{aligned} \tag{15}$$

де $\vec{n}$ – зовнішня до поверхні тіла нормаль; $\vec{\sigma}_n^{(1)\bullet}$, $\vec{\sigma}_n^{(2)\bullet}$ – задані вектор-функції Лагранжевих координат і часу.

Система рівнянь та фізичних співвідношень (11)–(13), початкових (14) та граничних умов (15) складають початково-граничну задачу математичної моделі двокомпонентних пружних тіл у нелінійній постановці.

Якщо в системі рівнянь (11) та граничних умовах (15) врахувати фізичні співвідношення (12), то початково-граничну задачу можна сформулювати таким чином.

Позначимо через Ω_1, Ω_2 – простори тензорів відповідно першого та другого рангу. Нехай $L(\widehat{w}^1, \widehat{w}^2, \vec{w}^3, \vec{w}^4)$ – функція, яка визначена для $\widehat{w}^1 \in \Omega_2$, $\widehat{w}^2 \in \Omega_2$, $\vec{w}^3 \in \Omega_1$, $\vec{w}^4 \in \Omega_1$ і двічі неперервно-диференційовні за своїми аргументами.

Для зручності надалі покладемо $L(\dots) \equiv L(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)}, \widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)}, \dot{\vec{u}}^{(1)}, \dot{\vec{u}}^{(2)})$. Розглянемо в області $Q = X \times (0; t_1)$, де X – обмежена область в $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею ∂X, t_1 – додатне число, систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L(\dots)}{\partial t \partial \dot{\vec{u}}^{(1)}} + \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)})} + \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})) &= 0, \\ \frac{\partial^2 L(\dots)}{\partial t \partial \dot{\vec{u}}^{(2)}} + \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)})} - \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})) &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

де $\vec{u}^{(1)}(\xi, t)$, $\vec{u}^{(2)}(\xi, t)$ – шукані вектор-функції від ξ і t $(\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ – Лагранжеві координати), котрі задовольняють початкові

$$\vec{u}^{(1)}\big|_{t=0} = 0, \quad \vec{u}^{(2)}\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \tag{17}$$

та граничні умови

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot\left(\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)})} + \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})\widehat{I}\right)\Bigg|_{\partial X_0} &= \vec{\sigma}_n^{(1)\bullet}, \\ \vec{n}\cdot\left(\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)})} - \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})\widehat{I}\right)\Bigg|_{\partial X_0} &= \vec{\sigma}_n^{(2)\bullet}. \end{aligned} \tag{18}$$

Для задачі (16)–(18) сформулюємо варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського. Нагадаємо, що *дією за Гамільтоном* називається функціонал над вектором місця $\vec{r}(\xi,t) = \vec{r}_0 + \vec{u}(\xi,t)$ при русі системи, котрий має вигляд

$$\mathcal{I} = \int\limits_0^{t_1} (\mathcal{K} - W)\,dt, \tag{19}$$

де $\mathcal{K}$ – кінетична, а W – потенціальна енергії системи.

Приймемо, що операції варіювання та диференціювання за часовою змінною комутують

$$(\delta\vec{u}^{(i)})^{\cdot} = \delta\dot{\vec{u}}^{(i)} \qquad (i=1,2) \tag{20}$$

та, що на кінцях проміжку часу $[0,t_1]$ варіації $\delta\vec{u}^{(i)}$ дорівнюють нулю

$$\delta\vec{u}^{(i)}(\xi,0) = 0, \qquad \delta\vec{u}^{(i)}(\xi,t_1) = 0 \qquad (i=1,2). \tag{21}$$

Варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського формулюється так [3]: *від усіх мислимих рухів з проміжку часу $[0,t_1]$, які співпадають в початку і кінці цього проміжку, рух, що здійснюється, відрізняється тим, що для нього дія $\mathcal{I}$ – стаціонарна, тобто її варіація дорівнює нулю*

$$\delta\mathcal{I} = 0. \tag{22}$$

Для початково-граничної задачі (16)–(18) дія за Гамільтоном (19) має вигляд

$$\begin{gathered}\mathcal{I}(\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)}) = \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{X_0}\Big\{-L(\widehat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)},\ \widehat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)},\dot{\vec{u}}^{(1)},\dot{\vec{u}}^{(2)}) - \\ -\frac{\gamma\rho_*^2}{2}(\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}))^2\Big\}\,dV\,dt + \int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\partial X_0}\Big\{\vec{\sigma}_n^{(1)\bullet}\cdot\vec{u}^{(1)} + \vec{\sigma}_n^{(2)\bullet}\cdot\vec{u}^{(2)}\Big\}\,d\Sigma\,dt.\end{gathered} \tag{23}$$

Справді, розглянемо умову (22) рівності нулю першої варіації функціоналу $\mathcal{I}(\vec{u}^{(1)},\vec{u}^{(2)})$ (23)

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{X_0}\Big\{-\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)})}\cdot\cdot\,\delta(\widehat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)})^{\top} - \\ -\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)})}\cdot\cdot\,\delta(\widehat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)})^{\top} - \frac{\partial L(\dots)}{\partial\dot{\vec{u}}^{(1)}}\cdot\delta\dot{\vec{u}}^{(1)\top} - \frac{\partial L(\dots)}{\partial\dot{\vec{u}}^{(2)}}\cdot\delta\dot{\vec{u}}^{(2)\top} - \\ -\gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)})\,\delta\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)})\Big\}\,dV\,dt + \\ +\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\partial X_0}\Big\{\vec{\sigma}_n^{(1)\bullet}\cdot\delta\vec{u}^{(1)} + \vec{\sigma}_n^{(2)\bullet}\cdot\delta\vec{u}^{(2)}\Big\}\,d\Sigma\,dt = 0,\end{gathered} \tag{24}$$

де варіація скалярної функції за тензорним аргументом береться [3, с.449] за формулою

$$\delta\varphi(\widehat{Q}) = \frac{\partial\varphi}{\partial\widehat{Q}}\cdot\cdot\,\delta\widehat{Q}^{\top}.$$

Тут φ – скалярна функція тензорного аргументу $\widehat{Q}$.

Використавши відому в тензорному аналізі формулу Гаусса–Остроградського [3, с.482], а за часовою змінною – формулу інтегрування частинами [3, с.148] та властивість варіації (20), перетворена варіаційна рівність (24) матиме вигляд

$$\int_0^{t_1}\int_{X_0}\Big\{\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial L(\ldots)}{\partial(\hat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)})}\cdot\delta\vec{u}^{(1)}+\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial L(\ldots)}{\partial(\hat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)})}\cdot\delta\vec{u}^{(2)}+$$
$$+\frac{\partial^2 L(\ldots)}{\partial t\partial\dot{\vec{u}}^{(1)}}\cdot\delta\vec{u}^{(1)}+\frac{\partial^2 L(\ldots)}{\partial t\partial\dot{\vec{u}}^{(2)}}\cdot\delta\vec{u}^{(2)}+$$
$$+\gamma\rho_*^2\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)}))\cdot(\delta\vec{u}^{(1)}-\delta\vec{u}^{(2)})\Big\}\,dV\,dt-$$
$$-\int_0^{t_1}\int_{\partial X_0}\Big\{\vec{n}\cdot\Big(\frac{\partial L(\ldots)}{\partial(\hat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)})}+\gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)})\hat{I}\Big)\delta\vec{u}^{(1)}+$$
$$+\vec{n}\cdot\Big(\frac{\partial L(\ldots)}{\partial(\hat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)})}-\gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)}-\vec{u}^{(2)})\hat{I}\Big)\delta\vec{u}^{(2)}-$$
$$-\vec{\sigma}_n^{(1)*}\cdot\delta\vec{u}^{(1)}-\vec{\sigma}_n^{(2)*}\cdot\delta\vec{u}^{(2)}\Big\}\,d\Sigma\,dt-$$
$$-\int_{X_0}\Big\{\Big(\frac{\partial L(\ldots)}{\partial\dot{\vec{u}}^{(1)}}\cdot\delta\vec{u}^{(1)}\Big)\Big|_0^{t_1}+\Big(\frac{\partial L(\ldots)}{\partial\dot{\vec{u}}^{(2)}}\cdot\delta\vec{u}^{(2)}\Big)\Big|_0^{t_1}\Big\}\,dV=0. \tag{25}$$

Із рівності (25), внаслідок довільності задання $\delta\vec{u}^{(1)}$, $\delta\vec{u}^{(2)}$ в області $X\times(0,t_1)$, використовуючи основну лему варіаційного числення, випливає система рівнянь (16). На поверхні $\partial X\times(0,t_1)$ варіації $\delta\vec{u}^{(1)}$, $\delta\vec{u}^{(2)}$ довільні, тоді з (25) отримаємо граничні умови (18). Зазначимо, що граничні умови (15), котрі були прийняті при формулюванні початково-граничної задачі, є природними для розглядуваної системи рівнянь. На кінцях проміжку часу $[0,t_1]$ варіації $\delta\vec{u}^{(1)}$, $\delta\vec{u}^{(2)}$ занулюються згідно з (21).

Таким чином, для динамічної системи, що розглядається в даній роботі, ми сформулювали варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського.

1. Нигматулин Р. И., Динамика многофазных сред. – М., Наука, 1987.– 467с.
2. Бурак Я. Й., Дронюк І. М., Кваснiй М. М. *Математичне моделювання тепломасопереносу в насичених термопружних пористих тілах в умовах фазового переходу* // Доп. АН України.– 1992.– N10.– С.51-54.
3. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.– М., Наука, 1980.– 512с.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.1998