УДК 519.21

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЗБУРЕНИХ ДОХОДНОСТІ І РИЗИКУ ТА ШКАЛА НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ

Я. І. Єлейко, А. Ю. Боротюк

Yeleiko Ya. I., Borotyuk A. Yu. The speed of the convergence perturbed profit, perturbed risk and the scale of infinitesimals. Consider the scale $\delta_1(\epsilon), \ldots, \delta_n(\epsilon)$ of infinitesimals with $\varepsilon \to 0$. The perturbed profit and the perturbed risk are presented by decompositions in this scale. The speed of the convergence of perturbed profit and perturbed risk to the respective unperturbed ones is researched.

Розглянемо акцію в випадковому середовищі Ω. Нехай для неї в середовищі Ω є N можливостей отримання прибутку. A_i — подія, яка полягає в настанні і-го варіанту, причому $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i = \Omega$. Позначимо $p_i := P\{A_i\}$ — імовірність настання події A_i, r_i — прибуток, що отримується за даною акцією при настанні події A_i. Тоді середньоочікувана доходність акції $\overline{r}$ є математичним сподіванням випадкової величини ξ, котра виражає прибуток за даною акцією і обчислюється за формулою

$$\overline{r} = \sum_{i=1}^{N} p_i r_i.$$

Ризик акції обчислюється як середньоквадратичне відхилення (корінь квадратний з дисперсії) цієї ж випадкової величини ξ, тобто

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \overline{r})^2}.$$

Зміну середовища будемо характеризувати деяким параметром ε і називатимемо збуренням середовища. В результаті такого збурення середовища зміниться ймовірність настання події A_i — p_i та доходність за даною акцією при настанні події A_i— r_i . Позначимо через p_i^ε — змінену ймовірність і назвемо її збуреною імовірністю, причому $p_i^\varepsilon \to p_i$, при $\varepsilon \to 0$. Аналогічно r_i^ε - збурена доходність, $r_i^\varepsilon \to r_i$, при $\varepsilon \to 0$. Незважаючи на збурення

1991 *Mathematics Subject Classification.* 90A46, 60J99.

середовища, яке приводить до збурених імовірностей настання події A_i — p_i^ε, сума цих імовірностей повинна дорівнювати 1, тобто

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^\varepsilon = 1.$$

Нехай є правильними представлення

$$p_i^\varepsilon = p_i + \lambda_{1i}\delta_1(\varepsilon) + \cdots + \lambda_{ni}\delta_n(\varepsilon) + o(\delta_n(\varepsilon)),$$

$$r_i^\varepsilon = r_i + \mu_{1i}\delta_1(\varepsilon) + \cdots + \mu_{ni}\delta_n(\varepsilon) + o(\delta_n(\varepsilon)),$$

де λ_{ij}, μ_{ij} — скалярні коефіцієнти $i = 1 \div n$, $j = 1 \div N$, $\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_n(\varepsilon)$ – шкала нескінченно малих, що $\delta_i(\varepsilon) = o(\delta_{i-1}(\varepsilon))$, $i = 2 \div n$, $\delta_1(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Розглянемо множину всеможливих добутків нескінченно малих $\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_n(\varepsilon)$

$$\Delta_2 := \{\delta_i(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon), \quad i, j = 0 \div n\},$$

де $\delta_0(\varepsilon) := 1$.

Означення 1. *Два добутки $\delta_i(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon)$ та $\delta_k(\varepsilon)\delta_l(\varepsilon)$ назвемо еквівалентними, якщо $\frac{\delta_i(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)\delta_l(\varepsilon)} \to c$, при $\varepsilon \to 0$, де $c = \mathrm{const}$.*

Тоді множину Δ_2 можна розбити на класи еквівалентності стосовно даного відношення еквівалентності. Позначимо

$$C_{ij} := \{ \ \delta_k\delta_l \mid \delta_k\delta_l \sim \delta_i\delta_j, \ i < j, \ \forall\, k, l = 0 \div n\}.$$

Отже, отримаємо скінченну кількість множин C_{ij}, котру можемо впорядкувати таким чином.

Означення 2. *$C_{ij} < C_{kl}$, якщо $(\forall \delta_m\delta_n \in C_{ij}) \wedge (\forall \delta_s\delta_t \in C_{kl}) \ \ \delta_s\delta_t = o(\delta_m\delta_n)$.*

Тепер перенумеруємо множину всіх C_{ij} так, щоб всі C_{ij} перебували в порядку зростання, та відкинемо ті, що містять добутки $\delta_i\delta_n$, $i = 1 \div n$, оскільки $\delta_i\delta_n = o(\delta_n)$. Переномеровані множини позначимо $C_1, \ldots, C_n, \ldots, C_p$, де $n \leqslant p \leqslant 2n - 1$, причому $C_i < C_j$, якщо $i < j$.

Виберемо по одному представникові з множини C_j і позначимо відповідно $\tilde{\delta}_j(\varepsilon) = \delta_k(\varepsilon)\delta_l(\varepsilon)$, $k, l = 0 \div n$.

Означення 3. *Множину $\{\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_p\}$ називатимемо головним представленням множин $C_1, \ldots, C_p$.*

Означення 4. *Для всіх i, j, $0 \leqslant i, j \leqslant n$ розглянемо $\delta_i\delta_j$. Тоді існує k, таке, що $\delta_i\delta_j \in C_k$ або $\delta_i\delta_j = o(\delta_n)$. Якщо $\delta_i\delta_j \in C_k$, то, оскільки, $\tilde{\delta}_k \in C_k$, позначимо*

$$c_{ij} := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_i(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon)}{\tilde{\delta}_k(\varepsilon)}.$$

Тоді збурену доходність $\overline{r}^\varepsilon$ можна представити таким чином:

$$\overline{r}^\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} p_i^\varepsilon r_i^\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=0}^{n} \lambda_{ji}\delta_j\right) \left(\sum_{k=0}^{n} \mu_{ki}\delta_k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p_i r_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{n} \sum_{\substack{k=0 \\ j+k\neq 0}}^{n} \lambda_{ji}\mu_{ki}\delta_j\delta_k, \tag{1}$$

де $\lambda_{0i} = p_i$, $\mu_{0i} = r_i$. Введемо позначення

$$a_{ki} := \sum_{\delta_j\delta_l \in C_k} c_{jl}\lambda_{ji}\mu_{li}. \tag{2}$$

Застосовуючи позначення (2) у формулі (1), отримаємо

$$\overline{r}^\varepsilon \sim \sum_{i=1}^{N} p_i r_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{p} a_{ki}\tilde{\delta}_k(\varepsilon) = \overline{r} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{p} a_{ki}\tilde{\delta}_k(\varepsilon). \tag{3}$$

Означення 5. *Функція $f(\varepsilon)$ має збіжність порядку $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)$, якщо $f(\varepsilon) \sim \tilde{\delta}_k(\varepsilon)$.*

Теорема 1. $\delta_1 \in C_1$.

Доведення випливає з визначення C_1.

Теорема 2.

a) Для середньоочікуваного збуреного прибутку в загальному випадку є збіжність порядку $\tilde{\delta}_1(\varepsilon)$ до незбуреного прибутку.

b) Щоб досягти збіжності порядку $\tilde{\delta}_s(\varepsilon)$, $1 < s \leqslant p$ необхідно, щоб виконувалась умова

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ki} = 0, \quad k = 1 \div (s-1).$$

Доведення. Пункти a) та b) випливають з формули (3), яку застосовуємо до різниці $\overline{r}^\varepsilon - \overline{r}$.

Тепер розглянемо збурений ризик

$$\sigma^{\varepsilon 2} = \sum_{i=1}^{N} p_i^\varepsilon (r_i^\varepsilon - \overline{r}^\varepsilon)^2.$$

Різницю $r_i^\varepsilon - \overline{r}^\varepsilon$ можемо представити

$$r_i^\varepsilon - \overline{r}^\varepsilon = r_i - \overline{r} + \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji}\delta_j - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ji}\mu_{ki}\delta_j\delta_k \sim$$

$$\sim r_i - \overline{r} + \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji}\delta_j - \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{p} a_{ki}\tilde{\delta}_k(\varepsilon) = r_i - \overline{r} + \sum_{j=1}^{p} b_{ji}\tilde{\delta}_j(\varepsilon), \tag{4}$$

де

$$b_{ji} = \begin{cases} \mu_{ki} - \sum\limits_{i=1}^{N} a_{ji}, \text{якщо } \exists k : \delta_k = \tilde{\delta}_j \\ -\sum\limits_{i=1}^{N} a_{ji}, \text{якщо } \forall k\ \delta_k \neq \tilde{\delta}_j. \end{cases} \tag{5}$$

Тут також вважається, що у головне представлення $\{\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_p\}$ входять δ_i, $i = 1 \div n$, тільки, можливо під іншими номерами, тобто, якщо $\delta_i \in C_k$, то $\delta_i = \tilde{\delta}_k$. Тоді згідно з формулами (4) та (5) отримаємо

$$(r_i^\varepsilon - \overline{r}^\varepsilon)^2 \sim \left(\sum_{k=0}^{p} b_{ki}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\right)\left(\sum_{l=0}^{p} b_{li}\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\right) = \sum_{k,l=0}^{p} b_{ki}b_{li}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon),$$

де $\tilde{\delta}_0 = \delta_0 = 1$. А також

$$\sigma^{\varepsilon 2} \sim \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{m=0}^{p} \tilde{\lambda}_{mi}\tilde{\delta}_m(\varepsilon)\right)\left(\sum_{k,l=0}^{p} b_{ki}b_{li}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k,l,m=0}^{p} \tilde{\lambda}_{mi}b_{ki}b_{li}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon). \tag{6}$$

У формулі (6) коефіцієнти $\tilde{\lambda}_{mi}$ є коефіцієнтами представлення $p_i^\varepsilon = \sum_{m=0}^{p} \tilde{\lambda}_{mi}\tilde{\delta}_m$, котре можливе згідно з визначенням $\tilde{\delta}_m$. Різниця квадратів збуреного і незбуреного ризиків матиме вигляд

$$\sigma^{\varepsilon 2} - \sigma^2 \sim \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{k,l,m=0\\k+l+m\neq 0}}^{p} \tilde{\lambda}_{mi}b_{ki}b_{li}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon). \tag{7}$$

Тепер розглянемо множину всеможливих добутків $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon)$, де $k, l, m = 0 \div p$. Позначимо її через Δ_3 і аналогічно до множини Δ_2 розіб'ємо її на класи еквівалентності D_t, котрі впорядкуємо і виберемо по одному представнику з кожного ϱ_t (їх буде скінченна кількість) $t = 1 \div q$, причому $\varrho_0 := 1$. Тоді введемо позначення

$$g_{ti} = \sum_{\substack{\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon)\in D_t\\k+l+m\neq 0}} \tilde{\lambda}_{mi}b_{ki}b_{li}d_{klm}, \quad t = 1 \div q, \tag{8}$$

де коефіцієнт d_{klm} визначається наступним чином.

Означення 6. *Для всіх $k, l, m = 0 \div p$ розглянемо добуток $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon)$. Тоді існує таке t, що $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon) \in D_t$, або $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon) = o\left(\tilde{\delta}_p(\varepsilon)\right)$. Якщо $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon) \in D_t$, то позначимо*

$$d_{klm} := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon)}{\varrho_t(\varepsilon)}.$$

Отже, враховуючи позначення (8) у формулі (7), приходимо до виразу

$$\sigma^{\varepsilon 2} - \sigma^2 \sim \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{q} g_{ti} \varrho_t. \tag{9}$$

Теорема 3.

a) В загальному випадку для збуреного ризику є збіжність порядку $\varrho_1 = \tilde{\delta}_1 = \delta_1$ *до незбуреного ризику.*

b) Для того, щоб досягти збіжності порядку ϱ_s, $1 \leqslant s \leqslant q$ *необхідно, щоб виконувались умови:*

$$\sum_{i=1}^{N} g_{ti} = 0, \quad t = 1 \div (s-1), \quad 1 \leqslant s \leqslant q.$$

Доведення. Пункти a) та b) випливають з формули (9).

1. Sharpe W. *Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk* // Journal of Finance. – 1964. – September. – P.425-442.
2. Sharpe W. Portfolio theory and capital markets. – New York, McGraw-Hill, 1970.
3. Єлейко Я.І. *Асимптотика функції відновлення для одного класу напівмарківських процесів* // Математичні студії. – 1994, випуск 3. – С.107—110.

Стаття надійшла до редколегії 17.11.98