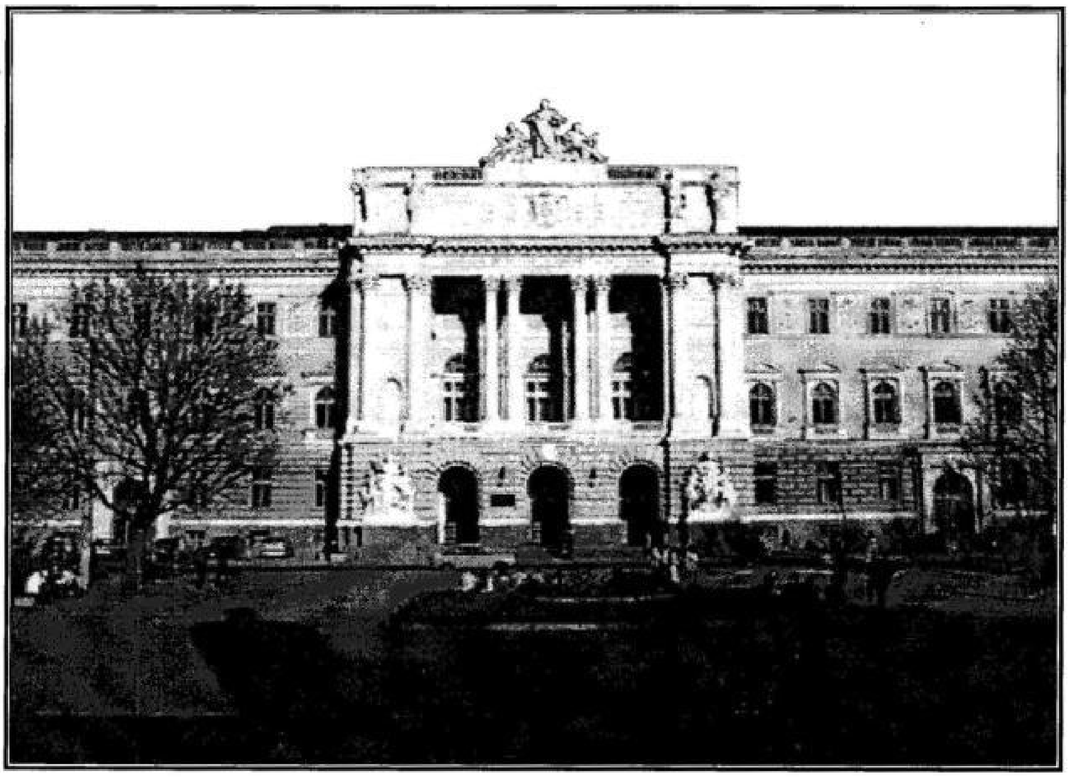
ISSN 0201 - 758X
ISSN 0320 - 6572



ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 53

1999

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
VISNYK LVIVSKOHO UNIVERSYTETU
(HERALD OF LVIV UNIVERSITY)

Серія механіко-математична

Mathematics and Mechanics
Виходить з 1965 року

Issued from 1965

Випуск 53

Volume 53

ЛЬВІВ – 1999

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редколегії:

290602, Львів, вул. Університетська, 1, Львівський державний університет,
механіко-математичний факультет, кафедра диференціальних рівнянь
Тел. (0322) 79-45-93
E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Departament of Mechanics and Mathematics,
Lviv State University, Universytetska 1, Lviv, 290602

Комп'ютерний набір (видав. пакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX). Підписано до друку з оригінал-макета 24.03.99.
Зам. №260011250. Тир. 100. Папір друк. офсетний №1. Формат 84×108/16. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 15,46. Друк ТзОВ "Простір М", м. Львів.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 512.553

ПРО КІЛЬЦЯ ЕНДОМОРФІЗМІВ УЛЬТРАДОБУТКІВ ВІЛЬНИХ КІЛЕЦЬ

Г. В. Зелиско

Zelisko H. V. On endomorphism rings of the ultraproducts of free modules. Necessary and sufficient conditions for existence of isomorphism between the endomorphism ring of the ultraproduct of modules and the ultraproduct of endomorphism rings of these modules are found. It is proved that the ring $(\prod_{i\in I} End_{R_i}(M_i))/\mathfrak{D}$ is a dense subring (in the sence of Jacobson) in the ring $End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$.

1. Вступні зауваження і позначення

Дослідження кілець ендоморфізмів модулів привертало увагу багатьох авторів. У даному повідомленні розпочинається вивчення поведінки кілець ендоморфізмів при переході до ультрадобутків модулів. Ми встановлюємо, що ультрадобуток кілець ендоморфізмів сім'ї модулів вкладається в кільце ендоморфізмів ультрадобутку цих модулів, а також визначаємо, коли це вкладення є ізоморфізмом. Цікавим фактом є те, що знайдене вкладення є щільним в розумінні Джекобсона. У кінці повідомлення доведено, що ультрадобуток сім'ї локальних модулів є локальним. Цей результат узагальнює твердження Ф.Тахи з [4] про локальність ультрадобутку сім'ї комутативних локальних кілець.

Надалі всі розглядувані кільця вважатимуться асоціативними з $1 \neq 0$, а всі модулі лівими і унітарними. Основні використані твердження і позначення з теорії кілець можна знайти в [1]. Потрібний матеріал з теорії моделей взято з монографії [2]. Ідейно стаття близька до праці [3].

Нехай $\{R_i\}_{i\in I}$ – сім'я кілець, $\mathfrak{D}$ – ультрафільтр над I, $R = (\prod_{i\in I} R_i)/\mathfrak{D}$ – ультрадобуток сім'ї кілець $\{R_i\}_{i\in I}$ за ультрафільтром $\mathfrak{D}$, M_i – лівий R_i-модуль для кожного $i \in I$. Тоді $M = (\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D}$ є лівим R-модулем стосовно природно визначених операцій. Нехай N_i – підмодуль в M_i для довільного $i \in I$. Тоді одержуємо R-підмодуль $N = (\prod_{i\in I} N_i)/\mathfrak{D}$ в M і фактор-модуль M/N. Оскільки M_i/N_i є лівим R_i-модулем, то можна розглянути модуль $M' = (\prod_{i\in I}(M_i/N_i))/\mathfrak{D}$, котрий також має природну структуру лівого R-модуля. Виникає запитання, як зв'язані модулі M' і M/N? Відповідь сформулюємо у вигляді леми.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 03C20, 03G10, 16B70, 16D15, 16D50, 18G05.

Лема. *Модулі M' і M/N є ізоморфними.*

Доведення. Побудуємо гомоморфізм лівих R-модулів $\varphi : M \longrightarrow M'$, котрий задається правилом

$$m = \overline{(m_i)_{i\in I}} \longmapsto \overline{(\overline{m_i})_{i\in I}}.$$

Цей гомоморфізм коректно визначений, у чому легко переконатись прямою перевіркою. Обчислимо ядро цього гомоморфізму. З одного боку, якщо $n = \overline{(n_i)_{i\in I}} \in N$, то

$$\varphi(n) = \varphi(\overline{(n_i)_{i\in I}}) = \overline{(\overline{n_i})_{i\in I}} = \overline{(\overline{0})_{i\in I}} = 0_{M'}.$$

Тому $N \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.

З іншого боку, якщо $k = \overline{(k_i)_{i\in I}} \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $\varphi(\overline{(k_i)_{i\in I}}) = 0_{M'}$. Це означає, що $\overline{(\overline{k_i})_{i\in I}} = \overline{(\overline{0})_{i\in I}}$. Тоді $\overline{k_i} = \overline{0}$ для кожного $i \in U$, де $U \in \mathfrak{D}$. Тому, $k_i \in N_i$ для довільного $i \in U$. Нехай $k' = \overline{(k'_i)_{i\in I}}$ таке, що $k'_i = k_i$, якщо $i \in U$ і $k'_i = 0$ в усіх інших випадках. Тоді $\overline{(k'_i)_{i\in I}} = \overline{(k_i)_{i\in I}}$. Оскільки $\overline{(k'_i)_{i\in I}} \in N$, то $k \in N$. Тому $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq N$. Отже, одержуємо рівність $\operatorname{Ker}\varphi = N$.

Встановимо, що $\operatorname{Im}\varphi = M'$. Включення $\operatorname{Im}\varphi \subseteq M'$ виконується очевидним чином. Встановимо обернене включення. Для перевірки оберненого включення нехай $m' \in M'$ і існує $m \in M$ таке, що $\varphi(m) = m'$. Якщо $m' = \overline{(\overline{m_i})_{i\in I}}$, то за m можна взяти $\overline{(m_i)_{i\in I}}$. Отже, $M' \subseteq \operatorname{Im}\varphi$. За теоремою про гомоморфізми $\operatorname{Im}\varphi \simeq M/\operatorname{Ker}\varphi$. Оскільки $\operatorname{Im}\varphi = M'$, $\operatorname{Ker}\varphi = N$, то $M' \simeq M/N$, що і потрібно довести.

Нехай M_i – лівий R_i-модуль для кожного $i \in I$. Розглянемо кільця $End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$ і $End_{R_i}(M_i)$, $i \in I$.

Можна ввести в розгляд кільце

$$\left(\prod_{i\in I} End(M_i)\right)/\mathfrak{D}$$

– ультрадобуток сім'ї кілець ендоморфізмів $\{End(M_i)\}_{i\in I}$ за ультрафільтром $\mathfrak{D}$. Неважко бачити, що існує вкладення

$$\left(\prod_{i\in I} End(M_i)\right)/\mathfrak{D} \subset End_R\left(\left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D}\right).$$

Справді, існує відображення

$$\theta : \left(\prod_{i\in I} End(M_i)\right)/\mathfrak{D} \to End\left(\left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D}\right),$$

котре задається правилом: $\theta(\overline{(f_i)_{i\in I}}) = \varphi_{\overline{f}}$, де

$$\varphi_{\overline{f}} : \left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D} \to \left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D}$$

ендоморфізм, визначений рівністю

$$\varphi_{\overline{f}}(\overline{(m_i)_{i\in I}}) = \overline{(f_i(m_i))_{i\in I}}. \qquad (*)$$

Безпосередня перевірка показує, що $\varphi_{\overline{f}}$ справді є гомоморфізмом R-модулів.

Переконаємося, що θ – гомоморфізм. Для цього треба показати, що виконуються наступні рівності: $\theta(\overline{f}+\overline{g})=\theta(\overline{f})+\theta(\overline{g})$, $\theta(\overline{r}\cdot\overline{f})=\overline{r}\cdot\theta(\overline{f})$. Справді,

$$\theta(\overline{f}+\overline{g})=\theta(\overline{f+g})=\varphi_{\overline{f+g}},\quad \varphi_{\overline{f+g}}(\overline{(m_i)_{i\in I}})=\overline{((f_i+g_i)(m_i))_{i\in I}},\quad \theta(\overline{f})+\theta(\overline{g})=\varphi_{\overline{f}}+\varphi_{\overline{g}},$$

$$(\varphi_{\overline{f}}+\varphi_{\overline{g}})(\overline{(m_i)_{i\in I}})=\varphi_{\overline{f}}(\overline{(m_i)_{i\in I}})+\varphi_{\overline{g}}(\overline{(m_i)_{i\in I}})\overline{(f_i(m_i))_{i\in I}}+\overline{(g_i(m_i))_{i\in I}}=\overline{((f_i+g_i)(m_i))_{i\in I}}.$$

Покажемо, що θ – ін'єктивне. Справді, якщо $\overline{(f_i)_{i\in I}}\neq\overline{(g_i)_{i\in I}}$, то існує $i_0\in U$, де $U\in\mathfrak{D}$, таке, що $f_{i_0}\neq g_{i_0}$, тобто існує m_{i_0} таке, що $f_{i_0}(m_{i_0})\neq g_{i_0}(m_{i_0})$. Тому $\overline{(f_i(m_i))_{i\in I}}\neq\overline{(g_i(m_i))_{i\in I}}$ і $\varphi_{\overline{f}}\neq\varphi_{\overline{g}}$. Отже, кільце $(\prod_{i\in I}End(M_i))/\mathfrak{D}$ є підкільцем в $End_R((\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D})$.

2. Кільця ендоморфізмів ультрадобутків вільних модулів

Розглянемо сім'ю $\{M_i\}_{i\in I}$, де M_i є лівим R_i-модулем для кожного $i\in I$.

Теорема 1. *Вкладення $(\prod_{i\in I}End_{R_i}(M_i))/\mathfrak{D}\to End_R((\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D})$ є ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли існує така множина $U\in\mathfrak{D}$, що для кожного $i\in U$ модуль M_i є не більш, ніж n-породженим, де n – фіксоване натуральне число.*

Доведення. Для доведення достатності нехай M_i – не більш, ніж n-породжений для кожного $i\in I$, де n – фіксоване натуральне число. Покажемо, що

$$\theta:\left(\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i))\right)/\mathfrak{D}\to End_R\left(\left(\prod_{i\in I}M_i\right)/\mathfrak{D}\right)$$

є сюр'єктивним відображенням. Для цього введемо нові позначення. Якщо $M_i=\sum\limits_{j=1}^{n}R_im_i^j$, то сім'я елементів $\{\overline{(m_i^j)_{i\in I}}\}_{j=1}^n$ є системою твірних для ультрадобутку $(\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D}$. Справді, для довільного $\overline{(n_i)_{i\in I}}\in(\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D}$

$$\overline{(n_i)_{i\in I}}=\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}r_i^jm_i^j\right)_{i\in I}}=\overline{\sum_{j=1}^{n}(r_i^j)_{i\in I}\cdot(m_i^j)_{i\in I}}=\sum_{j=1}^{n}\overline{(r_i^j)_{i\in I}}\cdot\overline{(m_i^j)_{i\in I}}.$$

Нехай $\eta\in End_R((\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D})$ таке, що $\eta(\overline{(m_i^j)_{i\in I}})=\overline{(\sum\limits_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k)_{i\in I}}$. Для кожного $i\in I$ побудуємо ендоморфізм $f_i:M_i\to M_i$, який задається правилом:

$$f_i\left(\sum_{j=1}^{n}r_i^jm_i^j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(r_i^j\cdot\sum_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k\right).$$

Тоді $\overline{(f_i)_{i\in I}}\in(\prod_{i\in I}End(M_i))/\mathfrak{D}$ і йому можна поставити у відповідність елемент $\varphi_{\overline{f}}$ з $End_R((\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D})$ (див.(*)).

Для доведення сюр'єктивності θ досить встановити рівність $\varphi_{\overline{f}}=\eta$. Для довільного $\overline{(n_i)_{i\in I}}\in(\prod_{i\in I}M_i)/\mathfrak{D}$

$$\eta(\overline{(n_i)_{i\in I}})=\eta\left(\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}r_i^jm_i^j\right)_{i\in I}}\right)=\sum_{j=1}^{n}\overline{(r_i^j)_{i\in I}}\cdot\eta(\overline{(m_i^j)_{i\in I}})=\sum_{j=1}^{n}(\overline{(r_i^j)_{i\in I}}\cdot\overline{\left(\sum_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k)_{i\in I}\right)}.$$

$$\varphi_{\overline{f}}(\overline{(n_i)_{i\in I}})=\overline{(f_i(n_i))_{i\in I}}=\overline{\left(\sum_{j=1}^{n}\left(r_i^j\cdot\sum_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k\right)\right)_{i\in I}}=\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{(r_i^j)_{i\in I}}\cdot\overline{\left(\sum_{k=1}^{n}k_i^{jk}m_i^k\right)_{i\in I}}\right).$$

З метою доведення необхідності припустимо, що

$$M_1 = \sum_{j=1}^{n_1} R_1 e_1^j, \quad M_2 = \sum_{j=1}^{n_2} R_2 e_2^j, \quad \dots, \quad M_k = \sum_{j=1}^{n_k} R_k e_k^j \dots.$$

Введемо такі позначення: $d_1 = \overline{(e_1^1, e_2^1, ..., e_k^1, ...)}$, $d_2 = \overline{(e_1^2, e_2^2, ..., e_k^2, ...)}$, ... (це елементи з $(\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$. Міркуваннями від супротивного встановимо, що

$$End_R\left(\left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D}\right) \ncong \left(\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i))\right)/\mathfrak{D}.$$

Нехай для кожного $\varphi \in End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$ існує таке $\psi = \overline{(f_i)_{i\in I}}$, де $f_i \in End_{R_i} M_i$, що $\varphi = \psi$. Визначимо відображення

$$\varphi : \left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D} \to \left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D},$$

котре задається рівностями $\varphi(d_i) = d_i$ і $\varphi(e) = 0$ для кожного $e \in (\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D}$ такого, що $e \neq d_i$. Легко переконатись, що φ є гомоморфізмом R-модулів. Далі, за припущенням для кожного $i = 1, 2, \dots$ виконується $\psi(d_i) = \varphi(d_i) = d_i$. Враховуючи дію f_i, маємо $\psi(d_i) = \overline{(f_j(e_j^i))_{j\in I}} = d_i = \overline{(e_j^i)_{j\in I}}$. Тому для кожного $t = 1, 2, \dots$ існує така множина $U_t \in \mathfrak{D}$, що для довільного $j \in U_t$ виконується $f_j(e_j^t) = e_j^t$. Звідси випливає існуванняє такого $j_1 \in U_1$, що $f_{j_1}(e_{j_1}^1) = e_{j_1}^1$, існування такого $j_2 \in U_2 \backslash U_1$, що $f_{j_2}(e_{j_2}^2) = e_{j_2}^2$, ..., існування такого $j_k \in U_k \backslash U_{k-1}$, що $f_{j_k}(e_{j_k}^k) = e_{j_k}^k$, ...

Розглянемо елемент

$$e = \overline{(e_{j_1}^1, e_{j_2}^2, ..., e_{j_k}^k, ...)} \in \left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\mathfrak{D}.$$

З одного боку, оскільки $\varphi = \psi$, то

$$\varphi(e) = \psi(e) = \overline{(f_{j_1}(e_{j_1}^1, f_{j_2}(e_{j_2}^2), ..., f_{j_k}(e_{j_k}^k), ...)} = \overline{(e_{j_1}^1, e_{j_2}^2, ... e_{j_k}^k, ...)} = e.$$

З іншого боку $e \neq d_i$ для кожного i. Таким чином, $\varphi(e) = 0$, тобто $e = 0$. Отримана суперечність доводить теорему.

3. Аналог теореми щільності Джекобсона

Теорема 2. *Якщо $\{M_i\}_{i\in I}$ – сім'я вільних скінченнопороджених R_i-модулів, то кільце $(\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i)))/\mathfrak{D}$ є щільним підкільцем (в розумінні Джекобсона) в кільці $End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$.*

Доведення. Покажемо, що кільце $(\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i)))/\mathfrak{D}$ щільне в кільці ендоморфізмів $End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$. Нехай $e_1, e_2, ..., e_n$ – лінійно незалежні елементи з $(\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D}$, і нехай $e_j = \overline{(a_i^j)_{i\in I}}$ для кожного $j \in \{1, 2, ..., n\}$, де $a_i^j \in M_i$. Потрібно довести, що для довільного $\varphi \in End_R((\prod_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$ існує $f \in (\prod_{i\in I}(End_{R_i}(M_i)))/\mathfrak{D}$ таке, що $\varphi(e_j) = f \cdot e_j$ для кожного $j \in \{1, ..., n\}$.

Нехай $\varphi(e_j) = \varphi(\overline{(a_i^j)_{i\in I}}) = \overline{(b_i^j)_{i\in I}}$, де $b_i^j \in M_i$. Оскільки елементи $e_1, e_2, ..., e_n$ – лінійно незалежні, то для кожного фіксованого i існує така множина $U_i \in \{1, ..., n\}$, що елементи

a_i^j є лінійно незалежними в M, якщо $j \in U_i$ і множина $V_i \in \{1, ..., n\}$ така, що елементи b_i^j лінійно незалежні, якщо $j \in V_i$. Нехай $W_i = U_i \cap V_i$.

Побудуємо $f \in (\prod_{i \in I}(End_{R_i} M_i))/\mathfrak{D}$, $f = \overline{(f_i)_{i \in I}}$ і покладемо

$$f \cdot e_j = f(e_j) = \overline{(f_i(a_i^j))_{i \in I}}.$$

Тут гомоморфізм $f_i : M_i \to M_i$ задається правилом $f_i(a_i^j) = b_i^j$, де $j \in W_i$ для кожного i. Тоді $f \cdot e_j = f(e_j) = \overline{(f_i(a_i^j))_{i \in I}} = \overline{(b_i^j)_{i \in I}} = \varphi(e_j)$, що і потрібно було довести.

4. Ультрадобутки локальних модулів

Твердження. *Якщо $\{M_i\}_{i \in I}$ – сім'я локальних модулів, то модуль $M = (\prod_{i \in I} M_i)/\mathfrak{D}$ теж локальний.*

Доведення. Оскільки модуль M_i – локальний для кожного $i \in I$, то в ньому існує єдиний максимальний підмодуль N_i. Розглянемо $N = (\prod_{i \in I} N_i)/\mathfrak{D}$. Покажемо, що N є максимальним підмодулем в M. Якщо припустити, що це не так, тобто, що існує підмодуль $K = (\prod_{i \in I} K_i)/\mathfrak{D}$ модуля M такий, що $N \subset K, K \neq M, K \neq N$, то знайдеться така множина $U_1 \in \mathfrak{D}$, що $N_i \subset M_i$ для кожного $i \in U_1$, існує множина $U_2 \in \mathfrak{D}$ така, що $K_i \neq M_i$ для всіх $i \in U_2$ і знайдеться така множина $U_3 \in \mathfrak{D}$, що $K_i \neq N_i$ для кожного $i \in U_3$. Тоді для кожного $i \in U$, де $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, N_i не буде максимальним підмодулем модуля M_i, а це суперечить локальності M_i.

Покажемо тепер, що N – єдиний максимальний підмодуль модуля M. Якщо припустити, що $S = (\prod_{i \in I} S_i)/\mathfrak{D}$ – інший максимальний підмодуль в M, то знайдеться така множина $V \in \mathfrak{D}$, що S_i для всіх $i \in V$, як і N_i, буде максимальним підмодулем модуля M_i, а це суперечить локальності M_i. Отже, в M існує єдиний максимальний підмодуль N, що і потрібно було довести.

1. Ламбек И. Кольца и модули. – М., Мир, 1971. - 281с.
2. Комарницкий Н. Я. *Ультрапроизведения областей Безу и проблема Коззенса-Фейса о "счетной" ультрастепени V - области главных идеалов* // Препринт. Львов. – 1996. – С.1-81.
3. Bell J. L., Slomson A. B. Models and ultraproducts, an introduction. – Amsterdam, North-Holland, 1969. – 319p.
4. Taha F. *Algebres simples centrales sur les corps ultraproduit de corps p-adiques* // Lect. Notes Math. – 1982. – N 924. – P.89-128.

Стаття надійшла до редколегії 19.10.98

УДК 513.6

ДВОЇСТІСТЬ В ЕТАЛЬНИХ КОГОМОЛОГІЯХ КРИВИХ НАД ПСЕВДОСКІНЧЕННИМ ПОЛЕМ

В. І. Андрійчук

Andriychuk V. I. Duality in the etale cohomology of curves over pseudofinite fields. Let X be a smooth complete curve over a pseudofinite field k. If $\mathcal{F}$ is any locally constant constructible sheaf of $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$–modules on X, $(n, \operatorname{char} k) = 1$, $\widetilde{\mathcal{F}} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, then there is a nondegenerate pairing $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F}) \times \mathrm{H}^{3-r}(X, \widetilde{\mathcal{F}}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ of finite groups. This extends the well-known duality for curves over finite fields to the case of curves over pseudofinite fields.

Нехай X — проективна, гладка, незвідна крива над полем k, $\overline{k}$ — алгебраїчне замикання поля k, $\overline{X} = X \otimes_k \overline{k}$ — крива X над $\overline{k}$, $G_k = \operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ — група Галуа поля k.

Позначимо через $\mathbb{G}_m$ пучок мультиплікативних груп, а через μ_n — пучок коренів n-го степеня з 1. Будемо вважати, що n взаємно просте з характеристикою поля k.

Через $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F})$ та $\mathrm{H}^r(\overline{X}, \mathcal{F})$ (відповідно $\mathrm{H}^r(k, M)$) позначаються етальні когомології кривих X та $\overline{X}$ з коефіцієнтами в пучку $\mathcal{F}$ (відповідно когомології Галуа групи G_k з коефіцієнтами в G_k-модулі M), $M_n = \operatorname{Ker}(M \xrightarrow{n} M)$. Етальні когомології $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ алгебраїчного многовиду X над довільним полем k відображають важливі геометричні та алгебраїчні властивості цього многовиду. Зокрема $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Pic} X$, $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Pic} \overline{X}$, де $\operatorname{Pic} X$ та $\operatorname{Pic} \overline{X}$ — групи класів ізоморфних оборотних пучків на X та $\overline{X}$ [2]. Групу $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{G}_m) = \operatorname{Br} X$ називають *когомологічною групою Брауера* кривої X, а група $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mu_n)$ ізоморфна групі n–кручення в якобіані многовиду $\overline{X}$.

Важливою проблемою є вивчення взаємозв'язків між групами когомологій $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ різних розмірностей. У випадку, коли X — крива над скінченним полем k, $\mathcal{F}$ — локально постійний конструктивний пучок $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$–модулів, $\widetilde{\mathcal{F}} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, О. Гротендік і Д. Вердьє [1] довели, що $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F})$ та $\mathrm{H}^{3-r}(X, \widetilde{\mathcal{F}})$ двоїсті одна одній (див. також [2], ст. 226).

Мета цієї статті — довести, що згаданий результат залишається правильним і у випадку кривих, визначених над псевдоскінченними [3] полями.

Теорема. *Нехай X - проективна, гладка, незвідна крива над псевдоскінченним полем k, $\mathcal{F}$ - локально сталий конструктивний пучок $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-модулів, $\widetilde{\mathcal{F}} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Тоді:*

а) Групи $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F})$ скінченні для $0 \leqslant r \leqslant 3$ і тривіальні для $i > 3$.

б) Існує природний невироджений добуток

$$\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F}) \times \mathrm{H}^{3-r}(X, \widetilde{\mathcal{F}}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 12G99, 14H05.

отже, групи $\mathrm{H}^r(X,\mathcal{F})$ *та* $\mathrm{H}^{3-r}(X,\widetilde{\mathcal{F}})$ *двоїсті одна одній.*

Спочатку ми доведемо цю теорему у випадку коли $\mathcal{F}=\mu_n$. Загальний випадок випливає звідси за допомогою застосування "відкручування" [2, Розділ V].

Лема 1. *Нехай* X *— проективний, гладкий, абсолютно незвідний многовид над псевдоскінченним полем* k, $\operatorname{Pic}^\circ\overline{X}$ *— підгрупа в* $\operatorname{Pic}\overline{X}$, *що складається з оборотних пучків алгебраїчно еквівалентних нулю. Тоді* $\mathrm{H}^1(k,\operatorname{Pic}^\circ\overline{X})=0$.

Доведення. Група $\operatorname{Pic}^\circ\overline{X}$ ізоморфна як G_k-модуль абелевому многовиду $\widehat{A}$, двоїстому до многовиду Альбанезе A многовиду X (див. [4], лема 4). Тому $\mathrm{H}^1(k,\operatorname{Pic}^\circ\overline{X})\simeq\mathrm{H}^1(k,\widehat{A}(\overline{k}))$. Група $\mathrm{H}^1(k,\widehat{A}(\overline{k}))$ інтерпретується як група головних однорідних просторів для $\widehat{A}$ над k. Оскільки кожний многовид над k має k-раціональну точку (це частина означення псевдоскінченного поля), то $\mathrm{H}^1(k,\operatorname{Pic}^\circ\overline{X})=0$.

Лема 2. *Нехай* X *— проективна, гладка, абсолютно незвідна крива над* k. *Тоді*
а) $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{G}_m)=\operatorname{Br}X=0$,
б) $\mathrm{H}^3(X,\mathbb{G}_m)=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
в) $\mathrm{H}^r(X,\mathbb{G}_m)=0$ *для* $r>3$.

Доведення. а). Запишемо для пучка $\mathbb{G}_m$ спектральну послідовність Хохшільда-Серра стосовно морфізму $\overline{X}\to X$:

$$\begin{aligned}0\to\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\mathrm{H}^1(X,\mathbb{G}_m)\to\mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\\ \to\mathrm{H}^2(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\operatorname{Ker}(\mathrm{H}^2(X,\mathbb{G}_m))\to\mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^2(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\\ \to\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mathbb{G}_m))\to\mathrm{H}^3(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mathbb{G}_m))=0.\end{aligned}\tag{1}$$

Відомо, що $\mathrm{H}^i(\overline{X},\mathbb{G}_m)=0$ для $i>1$ (див.[2], с.138). За теоремою Гільберта-90 маємо $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mathbb{G}_m))=\mathrm{H}^1(k,\overline{k}^*)=0$. Когомологічна розмірність поля k дорівнює 1, отже, $\mathrm{H}^2(k,\overline{k}^*)=0$. Тому з (1) ми одержуємо ізоморфізми

$$\mathrm{H}^1(X,\mathbb{G}_m)\simeq\mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mathbb{G}_m))=\mathrm{H}^\circ(k,\operatorname{Pic}\overline{X}),$$
$$\mathrm{H}^2(X,\mathbb{G}_m)\simeq\mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mathbb{G}_m))=\mathrm{H}^1(k,\operatorname{Pic}\overline{X}).$$

Точна послідовність когомологій Галуа, відповідна точній послідовності G_k-модулів. Послідовність

$$0\to\operatorname{Pic}^\circ\overline{X}\to\operatorname{Pic}\overline{X}\to\mathbb{Z}\to0\tag{2}$$

показує, що $\mathrm{H}^1(k,\operatorname{Pic}\overline{X})=\mathrm{H}^1(k,\mathbb{Z})=0$, бо $\mathrm{H}^1(k,\operatorname{Pic}^\circ\overline{X})=0$ за лемою 1 і $\mathrm{H}^2(k,\operatorname{Pic}^\circ\overline{X})=0$. Отже, $\mathrm{H}^1(X,\mathbb{G}_m)=\operatorname{Pic}\overline{X}^{G_k}=\operatorname{Pic}X$ і $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{G}_m)=0$.

б). $\mathrm{H}^3(X,\mathbb{G}_m)\simeq\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ навіть у більш загальному випадку кривої X над квазіскінченним полем k (див. [5], твердж.1.1).

в). Використаємо точну послідовність ([2], с.137.)

$$\cdots\to\bigoplus_v\mathrm{H}^{r-2}(k(v),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\to\mathrm{H}^r(X,\mathbb{G}_m)\to\mathrm{H}^r(X,\mathbb{G}_{m,K})\to\dots,\tag{3}$$

де K — поле функцій на кривій X, v пробігає всі замкнені точки кривої X, а $k(v)$ означає поле лишків точки v. $\mathrm{H}^{r-2}(k(v),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})=0$ для $r-2>1$, а $\mathrm{H}^r(K,\mathbb{G}_{m,K})=0$ для $r\geqslant 3$, оскільки когомологічна розмірність поля k (відповідно K) дорівнює 1 (відповідно 2). Отже, послідовність (3) показує, що $\mathrm{H}^r(X,\mathbb{G}_{m,K})=0$ для $r>3$.

Лема 3. *Групи* $\mathrm{H}^1(X,\mu_n)$ *та* $\mathrm{H}^2(X,\mu_n)$ *є скінченними. Крім того, існують точні послідовності*

$$1 \to k^*/k^{*n} \to \mathrm{H}^1(X,\mu_n) \to \mathcal{J}(k)_n \to 0, \tag{4}$$

$$0 \to \mathcal{J}(k)/n\mathcal{J}(k) \to \mathrm{H}^2(X,\mu_n) \to \mu_n(k) \to 1, \tag{5}$$

що дуальні одна одній. Тут $\mathcal{J}(k)$ *означає групу* k*-раціональних точок якобіана* $\mathcal{J}$ *кривої* X.

Доведення. Запишемо спектральну послідовність Хохшільда-Серра стосовно морфізму 2 $\overline{X} \to X$ для пучка μ_n:

$$\begin{gathered} 0 \to \mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mu_n)) \to \mathrm{H}^1(X,\mu_n) \to \mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mu_n)) \to \\ \to \mathrm{H}^2(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mu_n)) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^2(X,\mu_n) \to \mathrm{H}^\circ(k,\mathrm{H}^2(\overline{X},\mu_n)) \to \\ \to \mathrm{H}^1(k,\mathrm{H}^1(\overline{X},\mu_n)) \to \mathrm{H}^3(k,\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mu_n)) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Відомо, що $\mathrm{H}^\circ(\overline{X},\mu_n) = \mu_n(\overline{k})$, $\mathrm{H}^1(\overline{X},\mu_n) = (\mathrm{Pic}\,\overline{X})_n$ — підгрупа елементів порядку, що ділить n в $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$, $\mathrm{H}^2(\overline{X},\mu_n) = \mathrm{Pic}\,\overline{X}/n\,\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ (див.,наприклад [2], с.157). Оскільки множення на n в $\mathrm{Pic}^\circ\,\overline{X}$ є сюр'єктивним, то з точної послідовності (2) випливає, що $\mathrm{Pic}\,\overline{X}/n\,\mathrm{Pic}\,\overline{X} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mu_n(\overline{k})$.

Тепер з точної послідовності когомологій Галуа, відповідної послідовності

$$1 \to \mu_n(\overline{k}) \to \overline{k}^* \xrightarrow{n} \overline{k}^* \to 1,$$

випливає, що $\mathrm{H}^1(k,\mu_n(\overline{k})) \simeq k^*/k^{*n}$.

Враховуючи ці факти, одержуємо з (6)

$$1 \to k^*/k^{*n} \to \mathrm{H}^1(X,\mu_n) \to (\mathrm{Pic}\,\overline{X})_n^{G_k} \to 0, \tag{7}$$

$$0 \to \mathrm{H}^1(k,(\mathrm{Pic}\,\overline{X})_n) \to \mathrm{H}^2(X,\mu_n) \to \mu_n(\overline{k})^{G_k} \to 1. \tag{8}$$

Тут $(\mathrm{Pic}\,\overline{X})_n \simeq (\mathrm{Pic}^\circ\,\overline{X})_n = \mathcal{J}(\overline{k})_n \simeq \widehat{\mathcal{J}}(\overline{k})_n$, де $\widehat{\mathcal{J}}$ — якобіан, двоїстий до $\mathcal{J}$.

З невиродженості добутку Вейля ([6], §15)

$$\mathcal{J}(\overline{k})_n \times \widehat{\mathcal{J}}(\overline{k})_n \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

випливає двоїстість груп $\mathrm{H}^1(k,\mathcal{J}(\overline{k})_n)$ та $\mathrm{H}^\circ(k,\widehat{\mathcal{J}}(\overline{k})_n)$, а з теорії Куммера – двоїстість груп $\mathrm{H}^1(k,\mu_n(\overline{k}))$ і $\mathrm{H}^\circ(k,\mu_n(\overline{k})) \simeq \mu_n(k)$. Тому послідовності (7) і (8) двоїсті одна одній. Але, з іншого боку, в точній послідовності когомологій Галуа, відповідній точній послідовності G_k-модулів,

$$0 \to \mathcal{J}(\overline{k})_n \to \mathcal{J}(\overline{k}) \xrightarrow{n} \mathcal{J}(\overline{k}) \to 0,$$

$\mathrm{H}^1(k,\mathcal{J}(\overline{k})) = 0$ за лемою 1, отже, $\mathrm{H}^1(k,\mathcal{J}(\overline{k})_n) \simeq \mathcal{J}(k)/n\mathcal{J}(k)$. Тому точні послідовності (7) і (8) є послідовностями з формулювання леми.

Лема 4. *Групи* $\mathrm{H}^r(X, \mu_n)$ *тривіальні для* $r > 3$.

Доведення. Розглянемо точну послідовність когомологій

$$\cdots \to \mathrm{H}^{r-1}(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{n} \mathrm{H}^{r-1}(X, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{H}^r(X, \mu_n) \to \mathrm{H}^r(X, \mathbb{G}_m), \tag{9}$$

відповідну точній послідовності пучків

$$0 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 0.$$

Послідовність (9) показує, з врахуванням леми 2 *в*), що

$$\mathrm{H}^r(X, \mu_n) = \mathrm{H}^{r-1}(X, \mathbb{G}_m) = 0$$

для $r > 4$, а група $\mathrm{H}^4(X, \mu_n)$ ізоморфна коядру множення на n в $\mathrm{H}^3(X, \mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, і тому теж тривіальна.

Тепер легко довести теорему. З лем 3 і 4 випливає твердження *a*) теореми для пучка μ_n і твердження *б*) для пучка μ_n для $r = 1$ і $r = 2$. У випадку $r = 0$, $\mathrm{H}^\circ(X, \mu_n) \simeq \mathrm{H}^3(X, \mu_n) \simeq \mu_n(k)$ і твердження *б*) очевидне.

Далі, кожна скінченна абелева група є прямою сумою циклічних груп і когомології комутують з прямими сумами. Отже, групи $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F})$ скінченні для всіх сталих скінченних пучків $\mathcal{F}$ порядку взаємно простого з характеристикою поля k, і для таких пучків твердження *б*) теореми теж виконується. Звідси, використовуючи "відкручування", випливає твердження теореми у загальному випадку.

1. Verdier J. A duality theorem in the etale cohomology of schemes. – Proceedings of a conference on local fields. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1967.
2. Милн Дж. Этальные когомологии. – М., Мир, 1983.
3. Ax J. *The elementary theory of finite fields*// Ann. Math. – 1968. – Vol. 88. – N 2. – P. 239–272.
4. Manin Ju. *Le groupe de Brauer-Grothendieck en Geometrie diophantienne*// In Actes Congres International de Mathematicians (Nice, 1970). Paris: Gauthier-Villars. – 1971. – 1. – P. 401–411.
5. Douai J.-C. *Le theoreme de Tate-Poitou pour les corps de fouctions des courbes definies sur les corps de series formelles en une variable sur un corps algebriquement clos*// Comm. Alg. – 1987. – 15 (11). – P. 2379–2390.
6. Мамфорд Д. Абелевы многообразия. – М., Мир, 1971.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.97

УДК 512.64

СИМЕТРИЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ І ЇХ ФАКТОРИЗАЦІЯ

М. І. Кучма

Kuchma M. I. Symmetric equivalence of matrix polynomials and their factorization. Conditions for existence of symmetric equivalence of matrices to its Smith forms and of factorization of such matrices over polynomial rings with involution are found. The results on strict equivalence and congruence of matrices are obtained.

Задача про симетричну еквівалентність симетричних матричних многочленів і їх факторизацію вивчалась у працях [1-3].

У роботі [1] показано, що симетричну оборотню над кільцями многочленів $\mathbb{C}[x]$ чи квазімногочленів $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ матрицю $A(x)$ можна зобразити у вигляді

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^{\nabla}, \tag{1}$$

де $B(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ чи $GL_n(\mathbb{C}[x, x^{-1}])$, при певних обмеженнях на симетричну матрицю $C(x)$. Факторизації вигляду (1) застосовуються до питання про факторизацію довільних симетричних матричних многочленів.

В [2] доведено, що із строгої еквівалентності регулярних симетричних матриць $A(x)$ і $B(x)$ випливає їх конгруентність.

Мета цієї статті – одержати умови існування симетричної еквівалентності симетричних матриць своїм формам Сміта і факторизації таких матриць, а також отримати результати, які стосуються строгої еквівалентності та конгруентності матриць.

Нехай $A(x)$ – неособливий матричний многочлен вигляду

$$A(x) = \sum_{i=0}^{p} A_i x^{p-i}, \tag{2}$$

де $A_i \in M_n(\mathbb{C})$, $i = 0, 1, \ldots, p$. Матричний многочлен $A(x)$ називається регулярним (унітальним, сингулярним), якщо $|A_0| \neq 0$ ($A_0 = E$ – одинична матриця, $|A_0| = 0$).

Якщо для $A(x)$ і $B(x)$ вигляду (2) існують оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)$ і $Q(x)$ такі, що $P(x)A(x)Q(x) = B(x)$, то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються еквівалентними.

Нехай $\mathbb{C}[x]$ – кільце многочленів з інволюцією ∇, визначеною, наприклад, у роботі [1], і перенесеною на кільце матриць $M_n(\mathbb{C}[x])$ наступним способом:

$$A(x)^{\nabla} = ||a_{ij}(x)||^{\nabla} = ||a_{ji}(x)^{\nabla}||.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 15A24, 15A23.

Матрицю $A(x)$ називатимемо симетричною, якщо $A(x) = A(x)^{\nabla}$. Факторизацією матриці $A(x)$ з кільця $M_n(\mathbb{C}[x])$ називатимемо її зображення у вигляді (1), де $B(x)$ – регулярна (унітальна, сингулярна), а $C(x) = C(x)^{\nabla}$ – неособлива, матриці.

Симетричні матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються симетрично еквівалентними, якщо існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$ така, що $R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = B(x)$.

Якщо для $A(x)$ і $B(x)$ існують такі матриці P, $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ ($T \in GL_n(\mathbb{C})$), що $PA(x)Q = B(x)$ ($T A(x)T^{\nabla} = B(x)$), то матриці $A(x)$ і $B(x)$ називаються строго еквівалентними (конгруентними).

Нехай $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i}$ – деякий многочлен (зокрема, $f(x)$ вигляду (2)). Тоді позначатимемо через $\widetilde{f}(x)$ зворотний до $f(x)$ многочлен $\widetilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$.

Відомо [4], що якщо для матричного многочлена $A(x)$ є розклад $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x)$ – деякий сингулярний матричний многочлен, то $\widetilde{B}(x)\widetilde{C}(x) = \widetilde{A}(x)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\deg B(x) + \deg C(x) = \deg A(x).$$

Якщо остання умова на степені многочленів не виконується, то є доцільним введення поняття узагальнено зворотного многочлена. Позначатимемо через $\widetilde{\widetilde{f}}(x)$ узагальнено зворотний до $f(x)$ многочлен стосовновідносно r степеня $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{i+r}$, де $r \in \mathbb{N}$. Якщо $\deg f(x) = m$, то, очевидно, $\widetilde{f}(x) = x^m f(\frac{1}{x})$ і $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = x^{r+m} f(\frac{1}{x})$, $r \in \mathbb{N}$.

Легко бачити, що якщо матричний многочлен $A(x)$ оборотний над $\mathbb{C}[x]$, то $\widetilde{A}(x)$ і $\widetilde{\widetilde{A}}(x)$ – зворотний і узагальнено зворотний, відповідно, до $A(x)$ є регулярними матричними многочленами.

Позначимо через S_A форму Сміта матриці $A(x)$

$$S_A = P(x)A(x)Q(x). \tag{3}$$

Оскільки $\widetilde{\widetilde{A}}(x) = Ex^r \widetilde{A}(x)$, $r \in \mathbb{N}$, то легко переконатись у справедливості такого твердження.

Твердження. *Нехай форма Сміта матричного многочлена $\widetilde{A}(x)$ зворотного до $A(x)$ має вигляд $U(x)\widetilde{A}(x)V(x) = S_{\widetilde{A}}$. Тоді $U(x)\widetilde{\widetilde{A}}(x)V(x) = S_{\widetilde{\widetilde{A}}}$.*

Теорема 1. *Для симетричної матриці $A(x)$ правильна рівність*

$$R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = S_A, \tag{4}$$

де $R(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$, тоді і тільки тоді, коли для довільних оборотних матриць $P(x)$, $Q(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що задовольняють (3), виконується

$$\widetilde{\widetilde{P}}(x)^{\nabla} = \widetilde{R}(x)^{\nabla}\widetilde{S}(x)^{\nabla}, \quad \widetilde{\widetilde{Q}}(x) = \widetilde{R}(x)^{\nabla}\widetilde{T}(x) \tag{5}$$

і

$$S(x)S_A T(x) = S_A, \tag{6}$$

де матриці $\widetilde{\widetilde{P}}(x)$, $\widetilde{\widetilde{Q}}(x)$ – узагальнено зворотні, відповідно, до матриць $P(x)$, $Q(x)$, а матриці $\widetilde{R}(x)$, $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{T}(x)$ – зворотні, відповідно, до матриць $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$.

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай для матриці $A(x)$ виконуються (3), (4). Для матриць $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ існують матриці $S(x)$, $T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$P(x)^{\nabla} = R(x)^{\nabla} S(x)^{\nabla}, \quad Q(x) = R(x)^{\nabla} T(x). \tag{7}$$

Підставляючи співвідношення (7) в (3), і, зважаючи на (4), отримаємо

$$S_A = S(x)R(x)A(x)R(x)^{\nabla} T(x) = S(x)S_A T(x).$$

Розглянемо до матриць $P(x)^{\nabla}$, $Q(x)$ узагальнено зворотні стосовно $r = \deg R(x)^{\nabla} + \deg S(x)^{\nabla}$, $m = \deg R(x)^{\nabla} + \deg T(x)$, відповідно. Тоді із рівності (7) одержимо (5).

Д о с т а т н і с т ь. Нехай для оборотних матриць $P(x)$, $Q(x)$ з (3) виконуються співвідношення (5) і (6). Розглянемо до матриць $\widetilde{\widetilde{P}}(x)^{\nabla}$ і $\widetilde{\widetilde{Q}}(x)$ зворотні матриці. Тоді з (5) одержимо оборотні над $\mathbb{C}[x]$ матриці $P(x)^{\nabla}$, $Q(x)$, котрі після підстановки в (3) дадуть рівність

$$S(x)R(x)A(x)R(x)^{\nabla} T(x) = S_A. \tag{8}$$

Домножаючи рівність (8) зліва на матрицю $S(x)^{-1}$ і справа на $T(x)^{-1}$, і враховуючи (6), отримаємо $R(x)A(x)R(x)^{\nabla} = S_A$.

Теорему доведено.

Таким чином, що пошук перетворюючої матриці $R(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такої, що виконується (4), зводиться до питання про виділення спільного регулярного множника $\widetilde{R}(x)^{\nabla}$ із регулярних матричних многочленів $\widetilde{\widetilde{P}}(x)^{\nabla}$ і $\widetilde{\widetilde{Q}}(x)$.

Теорема 2. *Симетричний матричний многочлен $A(x)$ конгруентний своїй формі Сміта, тобто*

$$RA(x)R^{\nabla} = S_A, \tag{9}$$

де $R \in GL_n(\mathbb{C})$, тоді і тільки тоді, коли для довільних матриць $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ із (3) виконуються

$$\widetilde{P}(x)^{\nabla} = R^{\nabla} \widetilde{S}(x)^{\nabla}, \quad \widetilde{Q}(x) = R^{\nabla} \widetilde{T}(x) \tag{10}$$

і

$$S(x)S_A T(x) = S_A, \tag{11}$$

де матриці $\widetilde{P}(x)$, $\widetilde{Q}(x)$, $\widetilde{S}(x)$,$\widetilde{T}(x)$ – зворотні, відповідно, до матриць $P(x)$, $Q(x)$, $S(x)$, $T(x)$.

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Оскільки для $A(x)$ виконується (9), то для матриць $P(x)$, $Q(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ існують матриці $S(x)$, $T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$P(x)^{\nabla} = R^{\nabla} S(x)^{\nabla}, \quad Q(x) = R^{\nabla} T(x).$$

Розглянувши зворотні матричні многочлени до $P(x)^{\nabla}$ і $Q(x)$, легко бачити, що виконуються (10) і (11).

Доведення достатності повторює доведення достатності теореми 1.

Теорема 3. *Якщо еквівалентні матриці $A(x) = A(x)^\nabla$ і $B(x) = B(x)^\nabla$ симетрично еквівалентні до своїх форм Сміта S_A і S_B, відповідно, то вони симетрично еквівалентні.*

Доведення. Для матричних многочленів $A(x)$ і $B(x)$ існують матриці $T(x)$, $R(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ такі, що

$$S_A = T(x)A(x)T(x)^\nabla, \quad S_B = R(x)B(x)R(x)^\nabla. \tag{12}$$

Оскільки матриці $A(x)$ і $B(x)$ – еквівалентні, тобто $S_A = S_B$, то із співвідношення (12) маємо $B(x) = S(x)A(x)S(x)^\nabla$, де $S(x) = R(x)^{-1}T(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$. Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай для симетричного матричного многочлена $A(x)$ і його форми Сміта S_A справджуються факторизації*

$$A(x) = B(x)CB(x)^\nabla, \quad S_A = \Phi(x)I\Phi(x)^\nabla,$$

де матриця $B(x)$ лівоеквівалентна до форми Сміта $S_B = \Phi(x)$, а $C = C^\nabla = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ – неособлива числова матриця з формою Сміта $S_C = I$. Тоді існує оборотна над $\mathbb{C}[x]$ матриця $R(x)$ така, що $R(x)A(x)R(x)^\nabla = S_A$.

Доведення. Нехай для матриці $A(x)$ існує факторизація, в якій $B(x)$ лівоеквівалентна до $S_B = \Phi(x)$, тобто існує матриця $S(x) \in GL_n(\mathbb{C}[x])$ така, що $B(x) = S(x)\Phi(x)$. Тоді

$$A(x) = S(x)\Phi(x)C\Phi(x)^\nabla S(x)^\nabla.$$

Відомо [1], що для матриці C маємо факторизацію вигляду $C = GIG^\nabla$, де G - неособлива числова матриця. Звідси, враховуючи $\Phi(x)G = G\Phi(x)$, маємо

$$A(x) = S(x)\Phi(x)GIG^\nabla\Phi(x)^\nabla S(x)^\nabla == S(x)G\Phi(x)I\Phi(x)^\nabla G^\nabla S(x)^\nabla = R(x)S_AR(x)^\nabla,$$

де $R(x) = S(x)G \in GL_n(\mathbb{C}[x])$. Теорему доведено.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови існування факторизації вигляду (1) матриць, симетрично еквівалентних до своїх форм Сміта.

Теорема 5. *Для симетричної матриці $A(x)$, яка симетрично еквівалентна своїй формі Сміта S_A, існує факторизація (1), в якій $B(x)$ – унітальна матриця степеня r з формою Сміта $\Phi(x)$, а $C(x) = C(x)^\nabla$ – неособлива матриця, тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця $V(\Phi)S_AV(\Phi)^\nabla$ одночасно ділиться зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^\nabla$ при деяких допустимих значеннях параметрів у матриці $V(\Phi)$, для яких виконується умова $\det M_{V(\Phi)R(x)||E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}||}(\Phi) \not\equiv 0$, де $R(x)$ – довільна оборотна матриця із співвідношення (4), а $V(\Phi)$, $M_{V(\Phi)R(x)||E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}||}(\Phi)$ – матриці визначені в праці [5].*

Доведення випливає з теореми 1 [6] і того, що матриця $A(x)$ симетрично еквівалентна до форми Сміта S_A.

Як наслідок, із теореми 5 випливає умова допустимої факторизації [7] таких матриць.

Наступні результати стосуються строгої еквівалентності та конгруентності матриць.

Теорема 6. *Якщо сингулярні симетричні матричні многочлени $A(x)$ і $B(x)$, корені характеристичних многочленів котрих відмінні від нуля, строго еквівалентні, то вони конгруентні.*

Доведення випливає з теореми 3 [2] і того, що $\widetilde{A}(x)$ і $\widetilde{B}(x)$ зворотні до $A(x)$ і $B(x)$, відповідно, є регулярними матричними многочленами.

Теорема 7. *Симетричні матричні двочлени $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = Ex^m - B$, де A, $B \in M_n(\mathbb{C})$, m – парне число, є конгруентними, тоді і тільки тоді, коли матриці A і B є подібними.*

Легко бачити, що матричний двочлен $A(x) = Ex^m - A$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, m – парне число, є симетричним, тоді і тільки тоді, коли матриця A є ермітовою при інволюції (α) [1] і симетричною (в розумінні [8]) при інволюціях (β) і (γ), визначених у роботі [1].

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Нехай матричні двочлени $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = E^m - B$ є конгруентними, тобто існує така матриця $R \in GL_n(\mathbb{C})$, що

$$R(Ex^m - A)R^\nabla = Ex^m - B.$$

Прирівнюючи матричні коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо $RAR^\nabla = B$ і $RR^\nabla = E$. З останньої рівності видно, що у випадку інволюції (α) матриця R є унітарною, у випадку (β) і (γ) – R є ортогональною. Це і доводить подібність матриць A і B.

Д о с т а т н і с т ь. Припустимо, що $A(x) = Ex^m - A$ і $B(x) = Ex^m - B$ – симетричні матричні двочлени, в котрих матриці A і B – подібні. Існують такі матриці $U, V \in GL_n(\mathbb{C})$ (унітарні, ортогональні), що $A = UDU^\nabla$, $B = VDV^\nabla$, де $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, λ_i – власні значення матриці A і B.

Враховуючи останні співвідношення, одержимо

$$A(x) = Ex^m - A = U(Ex^m - D)U^\nabla = UV^{-1}(Ex^m - B)[V^\nabla]^{-1}U^\nabla = RB(x)R^\nabla,$$

де $R = UV^{-1} \in GL_n(\mathbb{C})$.

Теорему доведено.

1. Любачевский Б. Д. *Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. I*// Сибирск. мат. журн. – 1973. – Т. 14, N 2. – С.337-356.
2. Зеліско В. Р. *Припустима факторизація і еквівалентність симетричних матриць над кільцем многочленів з інволюцією*// Алгебра і топологія. - К., 1993. - С. 53-62.
3. Икрамов Х. Д. Матричные пучки: Теория, приложения, числовые методы. Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ. - М., 1991. – Т. 29. - С. 3-106.
4. Зеліско В. Р. *Сингулярні дільники матричного иногочлена*// Вісник Львів. ун-ту, сер. мех-мат. – 1996. – Вип. 43. – С. 13-15.
5. Казімірський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. - К., Наук. думка, 1981. - 224 с.
6. Зеліско В. Р., Кучма М. І. *Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією*// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – Т. 40, N 4. – С.91-95.
7. Зеліско В. Р. *Допустимі факторизації регулярних симетричних матриць над кільцями многочленів і квазімногочленів з інволюцією*// Алгебра і топологія. Л., 1996. - С.94-103.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М., Наука, 1988. – 552 с.

Стаття надійшла до редколегії 24.09.98

УДК 519.48

РАДИКАЛЬНІ ФІЛЬТРИ В ДУО-КІЛЬЦЯХ НОРМУВАННЯ

І. Я. Тушницький

Tushnytskyi I. Ya. The radical filters in the rings of valuations. In this paper the results analogous to those obtained by W.Brandal and E.Barbut are obtained. Let R be a primary value duo-ring. For any primary ideal P of R we define $\mathfrak{F}(P) = \{I \text{ is an ideal of } R \ / \ I \not\subseteq P\}$. Then for any radical filter $\mathfrak{F}$ of R only two possibilities exist:

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P)$ for some primary ideal P of R;
2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$ for some primary ideal P of R such that $P^2 = P$.

Similar results are obtained for all duo-ring of valuations.

У статті [1] описано всі радикальні фільтри в комутативних областях нормування. У даній праці досліджено радикальні фільтри в дуо-кільцях нормування, зокрема в первинних дуо-кільцях.

Всюди в праці R буде означати дуо-кільце з $1 \neq 0$. Нагадаємо, що дуо-кільцем називається асоціативне кільце, в якого кожний односторонній ідеал є двостороннім. Дуо-кільця досліджувались багатьма авторами і при цьому для означення даних кілець вживались різні терміни, наприклад, "під-комутативне", інваріантне тощо (див. [4]-[7]).

Кільце R називається кільцем нормування, коли для будь-яких двох ідеалів I і J кільця R є тільки дві можливості: $I \subseteq J$ або $J \subseteq I$.

Нехай X – довільна множина кільця R, а r – довільний елемент кільця R. Тоді через $X : r$ позначатимемо множину $\{t \in R \ / \ rt \in X\}$. Через $\mathrm{Id}(R)$ позначатимемо сім'ю всіх ідеалів кільця R, а через $\mathrm{spec}(R)$ – сім'ю всіх первинних ідеалів кільця R.

Радикальним фільтром кільця R називається непорожня сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів кільця R, котра задовольняє таким умовам:

$T1$. Якщо $I \in \mathfrak{F}$, J – ідеал кільця R і $I \subseteq J$, то $J \in \mathfrak{F}$.

$T2$. Якщо $I \in \mathfrak{F}$ і $J \in \mathfrak{F}$, то $I \cap J \in \mathfrak{F}$.

$T3$. Якщо $I \in \mathfrak{F}$ і $r \in R$, то $I : r \in \mathfrak{F}$.

$T4$. Якщо I – ідеал кільця R і $J \in \mathfrak{F}$, причому $I : j \in \mathfrak{F}$ для будь-якого $j \in J$, то $I \in \mathfrak{F}$, [2].

Через $\mathfrak{F}_J$ позначатимемо сім'ю ідеалів $\{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ I \supseteq J\}$. Нехай P – первинний ідеал кільця R. Тоді через $\mathfrak{F}(P)$ позначатимемо радикальний фільтр $\{I \ / \ I$ – ідеал кільця R і $I \not\subseteq$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18E40.

$P\}$. Нехай $\mathcal{P}$ – деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді $\mathfrak{F}(\mathcal{P})$ – радикальний фільтр $\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$, (див. [3]).

Для зручності посилань деякі добре відомі факти формулюємо у вигляді лем.

Лема 1. *Нехай R – кільце. Якщо $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R, то правильне твердження:*

T2′. З того, що $I \in \mathfrak{F}$, $J \in \mathfrak{F}$ випливає, що $IJ \in \mathfrak{F}$.

Лема 2. *Нехай R – кільце і J – ідеал кільця R. Якщо $\mathfrak{F}_J$ є радикальним фільтром кільця R, то виконується рівність $J^2 = J$.*

Доведення цих лем можна знайти в [3].

Лема 3. *Нехай R – кільце нормування і P – первинний ідеал кільця R. Тоді виконується рівність*

$$\mathfrak{F}(P) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \;/\; P \subsetneqq I\}.$$

Доведення. Спочатку покажемо включення $\mathfrak{F}(P) \subseteq \{I \in \mathrm{Id}(R) \;/\; P \subsetneqq I\}$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(P)$. З співвідношення $J \not\subseteq P$ і з того, що кільце R є кільцем нормування, випливає включення $P \subseteq J$. Оскільки $J \not\subseteq P$, то $J \neq P$. Отже, з двох останніх співвідношень маємо, що $P \subsetneqq J$. Звідси, $J \in \{I \in \mathrm{Id}(R) \;/\; P \subsetneqq I\}$.

Тепер покажемо включення $\{I \in \mathrm{Id}(R) \;/\; P \subsetneqq I\} \subseteq \mathfrak{F}(P)$. Якщо $J \in \{I \in \mathrm{Id}(R) \;/\; P \subsetneqq I\}$, то $P \subsetneqq J$. Таким чином, маємо, що $P \subseteq J$ і $P \neq J$. Треба показати, що $J \in \mathfrak{F}(P)$. Доведення будемо проводити від супротивного. Припустимо, що $J \notin \mathfrak{F}(P)$. Оскільки за означенням $\mathfrak{F}(P) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \;/\; I \subsetneqq P\}$ і $J \notin \mathfrak{F}(P)$, то маємо включення $J \subseteq P$, а, отже, і рівність $J = P$. Отримана суперечність показує, що $\{I \in \mathrm{Id}(R) \;/\; P \subsetneqq I\} \subseteq \mathfrak{F}(P)$.

Лему доведено.

Лема 4. *Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді $\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$ – первинний ідеал кільця R.*

Доведення. Нехай $\mathcal{P}$ – деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Те, що $\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$ є ідеалом, очевидно. Покажемо, що він є первинним ідеалом кільця R. Нехай a і b – довільні елементи кільця R такі, що $aRb \subseteq \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$. Треба показати, що або $a \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, або $b \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$. Оскільки $aRb \subseteq \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то $aRb \subseteq P$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Ми повинні довести, що елемент a або елемент b належить кожному з ідеалів P з сім'ї $\mathcal{P}$. Доведення будемо проводити від супротивного. Припустимо, що жоден з елементів a і b не належить всім ідеалам із сім'ї $\mathcal{P}$. Нехай P_1 – ідеал, який належить $\mathcal{P}$, що не містить елемента a, а P_2 – ідеал, який належить $\mathcal{P}$, що не містить елемента b. Оскільки $aRb \in P_1$ і $a \notin P_1$, то згідно з первинністю ідеалу P_1 маємо, що $b \in P_1$. Оскільки $aRb \in P_2$ і $b \notin P_1$, то на підставі первинності ідеалу P_2 маємо, що $a \in P_1$. Оскільки кільце R є кільцем нормування, то для ідеалів P_1 і P_2 отримуємо, що або $P_1 \subseteq P_2$, або $P_2 \subseteq P_1$. Нехай $P_1 \subseteq P_2$. Тоді, оскільки $b \in P_1$, то $b \in P_2$. Це суперечить тому, що $b \notin P_2$. Аналогічно одержимо суперечність, коли $P_2 \subseteq P_1$. Таким чином, $a \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$ або $b \in \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, тобто ідеал $\bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} P$ є первинним. Лему доведено.

Нехай $\mathcal{P}$ – деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді через $N(\mathcal{P})$ позначимо множину $\bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$.

Лема 5. *Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – будь-яка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді множина $N(\mathcal{P})$ є первинним ідеалом кільця R.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – будь-яка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Покажемо, що множина $N(\mathcal{P})$ є первинним ідеалом кільця R.

Спочатку доведемо, що $N(\mathcal{P})$ є ідеалом кільця R. Нехай $x_1 \in N(\mathcal{P})$ і $x_2 \in N(\mathcal{P})$. Оскільки $x_1 \in N(\mathcal{P})$, то існує ідеал P_1 з сім'ї $\mathcal{P}$ такий, що $x_1 \in P_1$. Оскільки $x_2 \in N(\mathcal{P})$, то існує ідеал P_2 з сім'ї $\mathcal{P}$ такий, що $x_2 \in P_2$. З того, що кільце R є кільцем нормування випливає, що або $P_1 \subseteq P_2$, або $P_2 \subseteq P_1$ (для визначеності нехай $P_2 \subseteq P_1$). Тоді, оскільки $x_2 \in P_2$, то $x_2 \in P_1$. З того, що $x_1 \in P_1$ і $x_2 \in P_1$ випливає $x_1 + x_2 \in P_1$. Оскільки $P_1 \in \mathcal{P}$ і $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то $x_1 + x_2 \in N(\mathcal{P})$.

Далі, нехай маємо $x \in N(\mathcal{P})$ і $r \in R$. Оскільки $x \in N(\mathcal{P})$ і $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то існує ідеал P з сім'ї $\mathcal{P}$ такий, що $x \in P$. З умов $x \in P$ і $r \in R$ випливає, що $xr \in P$. Оскільки $P \in \mathcal{P}$, то отримуємо, що $xr \in N(\mathcal{P})$. Аналогічно доводиться, що множина $N(\mathcal{P})$ є замкненою відносно множення на елементи кільця R зліва.

Залишилось довести, що ідеал $N(\mathcal{P})$ є первинним. Нехай a і b – елементи кільця R такі, що $aRb \subseteq N(\mathcal{P})$. Покажемо, що або $a \in N(\mathcal{P})$, або $b \in N(\mathcal{P})$. Оскільки $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то існує такий ідеал P з сім'ї $\mathcal{P}$, що $aRb \subseteq P$. З того, що ідеал P – первинний, випливає $a \in P$ або $b \in P$. Оскільки $P \in \mathcal{P}$, то або $a \in N(\mathcal{P})$, або $b \in N(\mathcal{P})$.

Лему доведено.

Лема 6. *Нехай R - кільце нормування і P_1, P_2 - первинні ідеали кільця R. Тоді виконується така імплікація:*

$$P_1 \supseteq P_2. \Longrightarrow \mathfrak{F}(P_1) \subseteq \mathfrak{F}(P_2)$$

Доведення. Нехай R – кільце нормування і P_1, P_2 – первинні ідеали кільця R такі, що $P_1 \supseteq P_2$. Доведемо, що $\mathfrak{F}(P_1) \subseteq \mathfrak{F}(P_2)$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(P_1)$. Покажемо, що $J \in \mathfrak{F}(P_2)$. Оскільки, за лемою 3, $\mathfrak{F}(P_1) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P_1 \subsetneqq I\}$ і $J \in \mathfrak{F}(P_1)$, то маємо $P_1 \subsetneqq J$. З включень $P_2 \subseteq P_1$ і $P_1 \subsetneqq J$ випливає включення $P_2 \subsetneqq J$. За лемою 3 маємо, що $\mathfrak{F}(P_2) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P_2 \subsetneqq I\}$. Таким чином, $J \in \mathfrak{F}(P_2)$, що і потрібно було довести.

Лема 7. *Нехай R - кільце нормування, $\mathcal{P}$ – довільна підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R така, що $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$. Тоді виконується включення $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування, $\mathcal{P}$ – довільна підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Припустимо, що $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$. Тоді, оскільки $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} P$, то $N(\mathcal{P}) \supseteq P$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. За лемою 6 маємо включення $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(P)$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Звідси, отримаємо $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$. Оскільки $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \bigcap\limits_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$, то маємо включення $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Лему доведено.

Лема 8. *Нехай $\mathcal{P}$ - деяка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R така, що є включення $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$ і J - довільний ідеал кільця R. Тоді з того, що $P \subsetneqq J$ для будь-якого первинного ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$, випливає, що $N(\mathcal{P}) \subsetneqq J$.*

Доведення. Нехай $\mathcal{P}$ – довільна підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R, причому $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$ і J – довільний ідеал кільця R такий, що виконується включення $P \subsetneqq J$ для будь-якого первинного ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Тоді з строгого включення $P \subsetneqq J$ для будь-якого $P \in \mathcal{P}$ випливає просте включення $P \subseteq J$ для будь-якого $P \in \mathcal{P}$. Оскільки $P \subseteq J$ для будь-якого $P \in \mathcal{P}$, то за означенням об'єднання маємо включення $\bigcup\limits_{P \in \mathcal{P}} P \subseteq J$. Це означає, що маємо включення $N(\mathcal{P}) \subseteq J$. Тепер покажемо, що з нерівностей $P \neq J$ для будь-якого первинного ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$ випливає нерівність $N(\mathcal{P}) \neq J$. Доведення будемо проводити від супротивного. Нехай $P \neq J$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$ і $N(\mathcal{P}) = J$. Оскільки $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$, то отримуємо суперечність з тим, що $P \neq J$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Таким чином, маємо, що $N(\mathcal{P}) \neq J$. Оскільки $N(\mathcal{P}) \subseteq J$ і $N(\mathcal{P}) \neq J$, то отримуємо $N(\mathcal{P}) \subsetneqq J$. Лему доведено.

Лема 9. *Нехай R – первинне дуо-кільце і x – довільний необоротний ненульовий елемент кільця R. Тоді є включення*
$$x^{n+1}R \subsetneqq x^nR$$
для будь-якого натурального числа n.

Доведення. Нехай R – первинне кільце, x – довільний необоротній ненульовий елемент кільця R і n – будь-яке натуральне число. Покажемо спочатку включення $x^{n+1}R \subseteq x^nR$. Нехай $p \in x^{n+1}R$. Оскільки $p \in x^{n+1}R$, то існує елемент $u \in R$ такий, що $p = x^{n+1}u$. Тоді елемент p можна записати у вигляді $p = x^nu'$, де $u' = xu$. Оскільки $u' \in R$, то $p \in x^nR$.

Тепер доведемо, що $x^{n+1}R \neq x^nR$. Доведення будемо вести від супротивного. Нехай $x^{n+1}R = x^nR$. Тоді існує $t \in R$ таке, що виконується рівність $x^n = x^{n+1}t$, тобто $x^n - x^{n+1}t = 0$. Звідси, отримуємо рівність $x^n(1 - xt) = 0$. Оскільки елемент x – ненульовий і кільце R – первинне, то $x^n \neq 0$. Елемент x кільця R – необоротний, тому $1 - xt \neq 0$. Ми отримали, що $x^n \neq 0$ і $1 - xt \neq 0$, але $x^n(1 - xt) = 0$. Таким чином, в кільці R є дільники нуля. Оскільки R є дуо-кільцем, то ми отримуємор суперечність, що кільце R є первинним. Отже, припущення $x^{n+1}R = x^nR$ неправильне.

З того, що $x^{n+1}R \subseteq x^nR$ і $x^{n+1}R \neq x^nR$ випливає включення $x^{n+1}R \subsetneqq x^nR$, а це завершує доведення.

Лема 10. *Нехай R – первинне кільце і x – довільний необоротний елемент кільця R. Тоді множина $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$ – первинний ідеал кільця R.*

Доведення. Оскільки множини x^nR є ідеалами для довільного натурального числа n, то множина $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$ є ідеалом кільця R. Тепер доведемо, що ідеал $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$ – первинний. Нехай a і b – елементи кільця R такі, що $aRb \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$. Покажемо, що або $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$, або $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$. Оскільки $aRb \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$, то $ab \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$. Тому існує таке $r \in R$, що $ab = x^nr$. З цієї рівності випливає існування натуральних чисел m_n, l_n і елементів кільця R r_1, r_2 таких, що виконуються рівності: $m_n + l_n = n$, $a = x^{m_n}r_1$ і $b = x^{l_n}r_2$. Справді, $ab = x^{m_n}r_1x^{l_n}r_2$. Оскільки кільце R є дуо-кільцем, то існує такий елемент $r_1{}'$ кільця R, що правильна рівність $r_1x^{l_n} = x^{l_n}r_1{}'$. Звідси, $ab = x^{m_n}x^{l_n}r_1{}'r_2 = x^{m_n+l_n}r_1{}'r_2 = x^nr$, де $r = r_1{}'r_2$. Припустимо, що $a \notin \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^nR$. Тоді існує натуральне число s таке, що $m_n \leqslant s$

для будь-якого натурального числа n. За лемою 9 маємо, що

$$x^{n+1}R \subsetneqq x^n R$$

для будь-якого натурального числа n. Таким чином, ми довели імплікацію $n \to \infty \Rightarrow l_n \to \infty$. Це означає, що $b \in x^{l_n}R$, де l_n пробігає множину всіх натуральних чисел. Звідси маємо $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^{l_n}R$. Оскільки $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^{l_n}R = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^n R$, то $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^n R$. Лему доведено.

Лема 11. *Нехай R – кільце нормування, J – довільний ідеал кільця R, $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq J_n \supseteq \dots$ – спадна послідовність ідеалів кільця R така, що виконується включення $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subsetneqq J$. Тоді існує таке натуральне число n, що $J_n \subsetneqq J$.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування, J – довільний ідеал кільця R, $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq J_n \supseteq \dots$ – спадна послідовність ідеалів кільця R така, що виконується включення $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subsetneqq J$. Спочатку покажемо, що якщо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subseteq J$, то існує таке натуральне n_1, що $J_{n_1} \subseteq J$. Доведення будемо проводити від супротивного. Нехай $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subseteq J$ і для будь-якого натурального числа n маємо $J_n \nsubseteq J$. Тоді, оскільки R – кільце нормування то отримуємо, що для будь-якого натурального числа n: $J \subsetneqq J_n$. Звідси випливає $J \subsetneqq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n$. Таким чином, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \nsubseteq J$. Отримали суперечність з тим, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subseteq J$.

Тепер покажемо, що якщо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \neq J$, то існує таке натуральне число n_2, що $J_{n_2} \neq J$. Доведення знову будемо проводити від супротивного. Нехай для будь-якого натурального n виконується рівність $J_n = J$. Тоді $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n = J$, що суперечить умові $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} J_n \neq J$.

Для завершення доведення леми за шукане натуральне число n достатньо взяти максимальне з чисел n_1 і n_2. Для такого n отримуємо $J_n \subsetneqq J$. Лему доведено.

Лема 12. *Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – будь-яка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Тоді для радикального фільтру $\mathfrak{F}(\mathcal{P})$ або, якщо $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$, то $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$, або, якщо $N(\mathcal{P}) \notin \mathcal{P}$, то $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування і $\mathcal{P}$ – будь-яка підсім'я сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R. Припустимо, що $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$. Тоді з леми 7 випливає включення $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Покажемо обернене включення $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Оскільки $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \bigcap\limits_{P \in \mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$, то $J \in \mathfrak{F}(P)$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Оскільки, за лемою 3, $\mathfrak{F}(P) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ P \subsetneqq I\}$, то маємо включення $P \subsetneqq J$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Крім того, $N(\mathcal{P}) \in \mathcal{P}$, тому можна застосувати лему 8. З цієї леми випливає включення $N(\mathcal{P}) \subsetneqq J$. Оскільки, за лемою 3, $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) = \{I \in \mathrm{Id}(R) \ / \ N(\mathcal{P}) \subsetneqq I\}$, то $J \in \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$. Таким чином, включення $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$ виконується. З включень $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$ і $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$ випливає рівність $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$.

Нехай тепер маємо $N(\mathcal{P}) \notin \mathcal{P}$. Тоді, оскільки є рівність $N(\mathcal{P}) = \bigcup\limits_{P \in \mathcal{P}} P$, то отримуємо включення $P \subsetneqq N(\mathcal{P})$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Звідси, і з означення радикального фільтру $\mathfrak{F}(P)$, маємо $N(\mathcal{P}) \in \mathfrak{F}(P)$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. Це означає, що є включення $N(\mathcal{P}) \in \bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$. Оскільки $\bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P) = \mathfrak{F}(\mathcal{P})$, то $N(\mathcal{P}) \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. За лемою 7, $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Звідси, отримуємо $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Тепер покажемо включення $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Тоді, оскільки $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$, то $J \in \bigcap_{P\in\mathcal{P}} \mathfrak{F}(P)$. Звідси, маємо включення $J \in \mathfrak{F}(P)$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї $\mathcal{P}$. За лемою 3, отримуємо строге включення $P \subsetneqq J$ для будь-якого ідеалу P з сім'ї простих ідеалів $\mathcal{P}$. Тоді $\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P \subseteq J$. Оскільки $\bigcup_{P\in\mathcal{P}} P = N(\mathcal{P})$, то з попереднього включення $N(\mathcal{P}) \subseteq J$. Можливі два випадки:

1) $N(\mathcal{P}) \subsetneqq J$;
2) $N(\mathcal{P}) = J$.

В першому випадку за лемою 3 маємо, що $J \in \mathfrak{F}(N(\mathcal{P}))$; в другому маємо рівність $J = N(\mathcal{P})$. Звідси, отримуємо $J \in \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$. Таким чином, включення $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$ доведене. З включень $\mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\} \subseteq \mathfrak{F}(\mathcal{P})$ і $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) \subseteq \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$ отримуємо рівність $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \mathfrak{F}(N(\mathcal{P})) \cup \{N(\mathcal{P})\}$. Лему доведено.

Наступна теорема узагальнює твердження 3.2 роботи [1].

Теорема 1. *Нехай R – первинне дуо-кільце нормування. Тоді сім'я ідеалів $\mathfrak{F}$ є радикальним фільтром кільця R тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з двох умов:*

1) існує первинний ідеал P кільця R такий, що виконується рівність $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P)$;
2) існує первинний ідеал P кільця R такий, що виконуються рівності $P^2 = P$ і $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$.

Доведення. Необхідність. Нехай сім'я ідеалів $\mathfrak{F}$ є радикальним фільтром кільця R. Покажемо, що він може бути лише одним з двох видів, виділених в теоремі. Визначимо $P = \bigcup\{P' \in \operatorname{spec}(R) \;/\; P' \subseteq \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I\}$. Таким чином, $P = N(\mathcal{P})$, де $\mathcal{P} = \{P' \in \operatorname{spec}(R) \;/\; P' \subseteq \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I\}$. За лемою 5, P є первинним ідеалом кільця R. Покажемо, що $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$. Нехай $J \in \mathfrak{F}$. Тоді з означення ідеалу P випливає включення $P \subseteq \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I$. Оскільки $J \in \mathfrak{F}$, то маємо $\bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I \subseteq J$. З двох останніх включень випливає $P \subseteq J$. Це означає, що $J \in \mathfrak{F}(P)$ або $J = P$.

Тепер покажемо включення $\mathfrak{F}(P) \subseteq \mathfrak{F}$. Нехай $J \in \mathfrak{F}(P)$. Треба довести, що $J \in \mathfrak{F}$. Оскільки, за лемою 3, $\mathfrak{F}(P) = \{I \in \operatorname{Id}(R) \;/\; P \subsetneqq I\}$, то $J \supsetneqq P$. Визначимо $P_1 = \bigcap\{P' \in \operatorname{spec}(R) \;/\; P' \supseteq J\}$. Якщо покласти $\mathcal{P} = \{P' \in \operatorname{spec}(R) \;/\; P' \supseteq J\}$, то, за лемою 4, маємо, що ідеал P_1 є первинним, оскільки $P_1 = \bigcap_{P\in\mathcal{P}} P$. Легко бачити, що $P_1 \supseteq J$. Оскільки $J \supsetneqq P$, то $P_1 \supsetneqq P$. Звідси випливає, що $P_1 \not\subseteq \bigcap_{I\in\mathfrak{F}} I$. Отже, існує такий ідеал $L \in \mathfrak{F}$, що $P_1 \not\subseteq L$. Оскільки R – кільце нормування, то з того, що $P_1 \not\subseteq L$ випливає $L \subsetneqq P_1$. Виберемо $x \in P_1 \setminus L$. Тоді $x \notin L$, тобто $xR \not\subseteq L$. Оскільки R – кільце нормування, то $L \subsetneqq xR$. З того, що $L \in \mathfrak{F}$ за аксіомою $T1$ з означення радикального фільтру $\mathfrak{F}$ випливає, що $xR \in \mathfrak{F}$. Нехай $P_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} x^n R$. Тоді, за лемою 10, P_2 є первинним ідеалом кільця R. З того, що $x \in P_1$ маємо $x^n \in P_1$, тобто $\bigcap_{n=1}^{\infty} x^n R \subseteq P_1$. Звідси, $P_2 \subseteq P_1$. Оскільки $x \in P_1 \setminus L$, то включення є строге: $P_2 \underset{\neq}{\subset} P_1$. З того, що $P_1 = \bigcap\{P' \in \operatorname{spec}(R) \;/\; P' \supseteq J\}$ і $P_2 \underset{\neq}{\subset} P_1$, випливає $J \not\subseteq P_2$. Оскільки кільце R є кільцем нормування, то $P_2 \underset{\neq}{\subset} J$. Звідси, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} x^n R \subseteq J$. Послідовність ідеалів $xR \supseteq x^2R \supseteq \cdots \supseteq x^nR \supseteq \ldots$ утворює спадний ланцюг. Звідси, за лемою 11, отримуємо існування такого натурального число n, що $x^nR \underset{\neq}{\subset} J$. Оскільки $xR \in \mathfrak{F}$ і $\mathfrak{F}$ є радикальним фільтром кільця R, то, за лемою 1, маємо $\underbrace{xR \cdot xR \cdot \ldots \cdot xR}_{n \text{ разів}} = x^nR \in \mathfrak{F}$. Зауважимо, що рівність $\underbrace{xR \cdot xR \cdot \ldots \cdot xR}_{n \text{ разів}} = x^nR$ випливає з того факту, що R є дуо-кільцем. Скористаємося знову тим, що $\mathfrak{F}$ є радикальним фільтром. Тоді з того, що $x^nR \underset{\neq}{\subset} J$, за аксіомою $T1$ для радикального фільтру $\mathfrak{F}$, маємо $J \in \mathfrak{F}$, що і потрібно було довести.

Ми довели, що $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$. Це означає, що для для радикального фільтру $\mathfrak{F}$ є тільки дві можливості: 1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P)$ або 2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$. У другому випадку, оскільки F є радикальним фільтром і $\mathfrak{F} = \{I \in \operatorname{Id}(R) \;/\; P \subseteq I\}$, то за лемою 2 отримуємо $P^2 = P$.

Достатність. Те, що сім'я ідеалів $\mathfrak{F}(P)$ є радикальним фільтром для будь-якого первинного ідеалу P кільця R є очевидним. Сім'я ідеалів $\mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$ також є радикальним фільтром для кожного такого первинного ідеалу P кільця R, що $P^2 = P$. Це випливає з того, що $\mathfrak{F}(P) \cup \{P\} = \mathfrak{F}_P$, а сім'я ідеалів $\mathfrak{F}_J$ є радикальним фільтром кільця R для кожного такого ідеалу J кільця R, для котрого виконується рівність $J^2 = J$. Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай R – первинне кільце нормування. Тоді сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів кільця R є радикальним фільтром кільця R тоді і тільки тоді, коли існує деяка підсім'я $\mathcal{P}$ сім'ї всіх первинних ідеалів кільця R така, що виконується рівність $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathcal{P})$.*

Доведення. Доведення цього твердження випливає з теореми 1 і леми 12.

Лема 13. *Нехай R – кільце нормування, $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R і J – ідеал кільця R такий, що є строге включення $J \underset{\neq}{\supset} \bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$. Тоді виконується включення $J \in \mathfrak{F}$.*

Доведення. Нехай R – кільце нормування, $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R, J – ідеал кільця R і є включення $J \underset{\neq}{\supset} \bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$. З включення $J \underset{\neq}{\supset} \bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$ випливає, що $J \not\subseteq \bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$. Це підтверджує існування такого ідеалу $I \in \mathfrak{F}$, що $J \not\subseteq I$. Оскільки кільце R є кільцем нормування, то є включення $I \underset{\neq}{\subset} J$. З того, що $I \underset{\neq}{\subset} J$ і $I \in \mathfrak{F}$, за аксіомою $T1$ для радикального фільтру $\mathfrak{F}$ випливає $J \in \mathfrak{F}$. Лему доведено.

Наступна теорема описує будову радикальних фільтрів над довільним дуо-кільцем нормування.

Теорема 2. *Нехай R – дуо-кільце нормування. Тоді сім'я $\mathfrak{F}$ ідеалів кільця R є радикальним фільтром кільця R тоді і тільки тоді, коли виконується хоча б одна з двох умов:*
1) існує первинний ідеал P кільця R такий, що виконується рівність $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P)$;
2) існує ідеал J кільця R такий, що виконуються рівності $J^2 = J$ і $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_J$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R. Покажемо спочатку, що якщо $\bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I \notin \mathfrak{F}$, то $\bigcap\limits_{I \in \mathfrak{F}} I$ є первинним ідеалом кільця R. Доведення будемо вести від супротивного. Припустимо, що $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I$ не є первинним ідеалом кільця R. Тоді існують ідеали J_1 і J_2 кільця R такі, що виконуються умови: $J_1 \supsetneqq \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I$, $J_2 \supsetneqq \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I$ і $J_1J_2 = \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I$. Оскільки $J_1 \supsetneqq \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I$ і $J_2 \supsetneqq \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I$, то, за лемою 13, $J_1, J_2 \in \mathfrak{F}$. Тоді за лемою 1 $J_1J_2 \in \mathfrak{F}$, а, отже, $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \in \mathfrak{F}$. Це суперечить умові, що $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \notin \mathfrak{F}$. Тепер покажемо, що $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I)$. Нехай $L \in \mathfrak{F}$. Тоді $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \subsetneqq L$. Справді, включення $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \subseteq L$ випливає з того, що $L \in \mathfrak{F}$. Нерівність $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \neq L$ випливає з того, що $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \notin \mathfrak{F}$. Нехай тепер $L \in \mathfrak{F}(\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I)$. Тоді, за лемою 3, $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \subsetneqq L$. Звідси за лемою 13 $L \in \mathfrak{F}$.

Якщо $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \in \mathfrak{F}$, то покладемо $J = \bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I$. Покажемо, що $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_J$. Нехай $L \in \mathfrak{F}$. Тоді $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \subseteq L$, тобто $J \subseteq L$. Це означає, що $L \in \mathfrak{F}_J$. Нехай тепер $L \in \mathfrak{F}_J$. Тоді маємо включення $J \subseteq L$. Оскільки $\bigcap\limits_{I\in\mathfrak{F}} I \in \mathfrak{F}$, то $J \in \mathfrak{F}$. Звідси і з того, що $J \subseteq L$, за аксіомою $T1$ для радикального фільтру $\mathfrak{F}$, випливає $L \in \mathfrak{F}$. Таким чином, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_J$. Оскільки $\mathfrak{F}$ – радикальний фільтр кільця R, то $\mathfrak{F}_J$ – радикальний фільтр кільця R. Звідси, за лемою 2, $J^2 = J$.

Достатність доводиться як і в теоремі 1.

Теорему доведено.

1. Brandal W., Barbut E. *Localizations of torsion theoris*// Pacific J. Math. – 1983. – Vol.107, N 1.– P.27–37.
2. Stenström B. Rings and modules of quotients. – Berlin - New York, Springer-Verlag, 1975.
3. Stenström B. *Rings of Quotients*// Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. – Berlin, Springer-Verlag. – 1975. – Vol. 217.
4. Brungs H.H., Törner G. *Chain Rings and Prime Ideals*// Arch. Math. – 1976. – Vol. 27, N 3. – P.253-260.
5. Thierrin G. *On duo rings* // Can. Math. Bull. – 1960. – Vol.3, N 2. – P.167-172.
6. Rooyen G. *On Subcommutative Rings* // Proc. Japan Acad. – Ser. A. – 1987. – Vol. 63, N 7. – P.268-271.
7. Latsis D., Garnier R. *Localization dans les anneaux duos* // C. R. Acad. Sc. – Ser. A. – 1976. – Vol. 282, N 24. – P.1403-1406.

Стаття надійшла до редколегії 08.05.98

УДК 512.544

SOLVABLE GROUPS WITH MINIMAL AND MAXIMAL CONDITIONS ON NON-"LOCALLY POLYCYCLIC"-BY-FINITE SUBGROUPS

O. D. Artemovych

Artemovych O. D. Solvable groups with minimal and maximal conditions on non-'locally polycyclic'-by-finite subgroups. We characterize the locally solvable groups (respectively the solvable groups) in which the set of non-'locally polycyclic'-by-finite subgroups satisfies the minimal condition (respectively the maximal condition).

0. Let G be a group and $\mathfrak{X}$ a class of groups. We say that G satisfies the minimal condition on non-$\mathfrak{X}$-subgroups (for short Min-$\overline{\mathfrak{X}}$) if for every descending chain $\{G_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ of subgroups of G there exists a number $n_0 \in \mathbb{N}$ such that the subgroups G_n are $\mathfrak{X}$-groups for all $n \geqslant n_0$. The maximal condition on non-$\mathfrak{X}$-subgroups of G (for short Max-$\overline{\mathfrak{X}}$) is defined dually, namely, one says that G satisfies Max-$\overline{\mathfrak{X}}$ if there is no infinite ascending chain of non-$\mathfrak{X}$-subgroups of G.

The groups with the minimal condition on non-abelian subgroups have been studied by S.N. Černikov [1] and V.P. Šunkov [2] and the groups with the maximal condition on non-abelian subgroups by D.I. Zaĭtsev and L.A. Kurdachenko [3]. Surveys of known results in this direction can be found in [1,4].

Let us recall that a group G is a minimal non-$\mathfrak{X}$-group if it is not $\mathfrak{X}$-group, while all proper subgroups of G are $\mathfrak{X}$-subgroups. Recall that a group G is called indecomposable if any two proper subgroups of G generate a proper subgroup of G. As proved in [5] an indecomposable hypercentral group is isomorphic to either $\mathbb{C}_{p^n}$ or $\mathbb{C}_{p^\infty}$. If $G \neq G'$ we say that G is a non-perfect group.

In this paper we study the locally solvable groups (respectively the solvable groups) G in which the set of non-"locally polycyclic"-by-finite subgroups satisfies the minimal condition (respectively the maximal condition).

Throughout this paper p will always denote a prime number, τH the periodic part of locally nilpotent group H, $Z(G)$ the centre of group a G; $G', G'', \dots, G^{(n)}$ will indicate the terms of derived series of G, $G^p = \langle x^p \mid x \in G\rangle$, $\mathbb{C}_{p^n}$ and $\mathbb{C}_{p^\infty}$ will stand for the cyclic group of order p^n and for the quasicyclic p-group respectively.

Most of the standard notation can be found in [4].

1. Let $\mathcal{LPF}$ be the class of "locally polycyclic"-by-finite groups.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20E15, 20F16.

Lemma 1.1. *Let G be a $\overline{\mathcal{LPF}}$-group. Then:*
(i) every normal subgroup G is "locally polycyclic G-invariant"-by-abelian;
(ii) if G is non-perfect and indecomposable then every subgroup of G is "locally polycyclic"-by-abelian.

Proof. (i) Let N be a normal subgroup of G. Obviously N contains a locally polycyclic G-invariant subgroup H of finite index. We denote the quotient group G/H by $\overline{G}$. Then $\overline{N} = N/H$ is a finite normal subgroup of $\overline{G}$ and therefore

$$|\overline{G} : C_{\overline{G}}(\overline{N})| = |N_{\overline{G}}(\overline{N}) : C_{\overline{G}}(\overline{N})| < \infty.$$

Since $\overline{G}$ does not contain a subgroup of finite index, we obtain

$$\overline{G} = C_{\overline{G}}(\overline{N})$$

and consequently $\overline{N}$ is abelian.

(ii) Suppose now that G is indecomposable and non-perfect. Then

$$G'K \neq G$$

for every proper subgroup K of G. Hence $G'K$ contains a locally polycyclic G-invariant subgroup F of finite index and the quotient G'/F is abelian. From

$$K/(K \cap F) \cong KF/F \leqslant G'K/F$$

it follows (ii). The lemma is proved.

Lemma 1.2. *Let G be a non-perfect group with "locally polycyclic"-by-finite proper subgroups. If $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ then the commutator subgroup G' is locally polycyclic.*

Proof. Suppose that G' is not locally polycyclic. Then by Lemma 1.1 G' contains a G-invariant locally polycyclic subgroup F of finite index. Let $\overline{G} = G/F$. Since $\overline{G'}$ is finite and $\overline{G}/\overline{G'} \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ in view of Lemma 1.1 and Lemma 1.15 of [1] we conclude that $\overline{G}$ is abelian, a contradiction. The lemma is proved.

Corollary 1.3. *An indecomposable locally finite group G with "locally polycyclic"-by-finite proper subgroups is non-simple.*

Proof. Suppose that G is a simple group. By Corollary A1 of [6] G is linear and consequently G must be of Lie type (see [7-9]). Thus G is generated by two proper subgroups, a contradiction. The corollary is proved.

Remark 1.4. The Ol'shanski groups (see [10]) are finitely generated $\overline{\mathcal{LPF}}$-groups.

Proposition 1.5. *Let G be a non-perfect group. If every subgroup of G is "locally polycyclic"-by-finite then G is "locally polycyclic"-by-finite.*

Proof. If either G/G' is not indecomposable or $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^n}$ for some prime p and some positive integer n the group G is "locally polycyclic"-by-finite in view of [11].

Now, suppose that $G/G' \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$. If, moreover, G is indecomposable then by Lemma 1.1 it is locally polycyclic, a contradiction. Consequently G is not indecomposable and $G = \langle U, V \rangle$ for some proper subgroups U and V of G. This yields that, for example, $G = G'U$. Obviously, G' contains a locally polycyclic G-invariant subgroup A of finite index. Let $\overline{G} = G/A$. Then $\overline{G'}$ is a finite subgroup. By Theorem 1.16 of [1], $\overline{G}$ is abelian, a contradiction. The proposition is proved.

Theorem 1.6. *Let Λ be the class of groups which do not have infinite simple images. Then there are no $\overline{\mathcal{LPF}}$-groups in the class Λ.*

Proof. Let H be a finitely generated proper subgroup of G. Since every element of G is contained in a proper normal subgroup of G, we obtain that H is contained in a normal "locally polycyclic"-by-finite subgroup in view of [11]. By Lemma 1.1, K contains a locally polycyclic G-invariant subgroup A of finite index with the abelian quotient group G/A. Therefore $HA/A \cong H/(A\cap H)$ is abelian and consequently H is polycyclic. Hence G is a locally polycyclic group, as desired.

Corollary 1.7. *Any locally solvable group with proper "locally polycyclic"-by-finite subgroups is "locally polycyclic"-by-finite.*

2. Proposition 2.1. *A locally solvable group G satisfies the minimal condition on non-"locally polycyclic"-by-finite subgroups if and only if it is "locally polycyclic"-by-finite.*

Proof. In view of Corollary 1.7 suppose that G has a proper subgroup G_1 which is not "locally polycyclic"-by-finite. Then G_1 contains a proper non-"locally polycyclic"-by-finite subgroup. Repeating in this manner we obtain an infinite descending chain of non-"locally polycyclic"-by-finite proper subgroups. This contradiction proves the proposition.

Lemma 2.2. *Let G be a non-perfect non-hypercentral group with the "locally polycyclic"-by-finite commutator subgroup G'. If G satisfies Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$ then either G is a "locally polycyclic"-by-finite group or G/G' is finitely generated.*

Proof. It is well known that $\overline{G} = G/G' = \overline{N} \times \overline{D}$, where $\overline{D}$ is the periodic part of $\overline{G}$ and $\overline{N}$ is a reducible abelian subgroup of $\overline{G}$. Let D (respectively N) be the inverse image of $\overline{D}$ (respectively $\overline{N}$) in G. Then D and N are normal in G.

1). Suppose that the periodic part $\overline{D}$ is non-trivial. It is clear that $\overline{D} \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ for some prime p and N is a "locally polycyclic"-by-finite subgroup. Let $H = \langle x_1, ..., x_n\rangle$ be a finitely generated subgroup of D. Since $G'H \neq D$ and the quotient group $H/(G' \cap H)$ is abelian and finite, we conclude that H is a polycyclic subgroup. Thus D is a locally polycyclic subgroup and by the results of [11] G is a "locally polycyclic"-by-finite group.

2). Now suppose that $\overline{D}$ is trivial. Then $\overline{N}^p \neq \overline{N}$ for some prime p. Let A be an inverse image of $\overline{N}^p$ in G. Since G satisfies Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$, we obtain that $|G : A| < \infty$ and there is a subgroup F of G such that $G = AF$, $F \geqslant G'$ and the quotient group F/G' is finitely generated. If $F \neq G$ then G/F is a p-divisible abelian group.

Suppose that $B = (G/F)/\tau(G/F)$ is non-trivial. Then by the results of [12] (see also [1, chapter 2, §6]) B contains a p-divisible subgroup H isomorphic to a p-divisible subgroup $\mathbb{Q}^{(p)} = \{\frac{a}{p^n} \mid a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ of the additive group of rational numbers $\mathbb{Q}$. Let L be a subgroup of H isomorphic to $\mathbb{Z}$. Since $\mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$, we see that $B/L \cong \overline{X} \times \overline{Y}$, where $\overline{X} \cong \mathbb{C}_{p^\infty}$ and $\overline{Y}$ is some subgroup of B/L. Hence an inverse image Y of $\overline{Y}$ in G is a "locally polycyclic"-by-finite group. As before we can prove that G is a "locally polycyclic"-by-finite group.

Now suppose that G/F is a periodic π-group. If $|\pi| = \infty$ then there are infinite subsets π_1 and π_2 such that $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ and $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Consequently $G/F = \overline{X_1} \times \overline{X_2}$, where $\overline{X_i}$ is the Sylow π_i-subgroup of G/F $(i = 1, 2)$. Let X_i be the inverse image of $\overline{X_i}$. Then X_i is a "locally polycyclic"-by-finite normal subgroup of G and by [11] $G = X_1X_2$ is also "locally polycyclic"-by-finite.

Assume that the set π is finite and the quotient G/F is infinite. Then either G is "locally polycyclic"-by-finite or $\overline{G} = G/F = \overline{S} \times \overline{L}$, where $\overline{S}$ is an infinite Sylow s-subgroup of G for some prime $s \in \pi$ and $\overline{L}$ is a finite s'-subgroup. If L is an inverse image of $\overline{L}$ in G then by W we denote the inverse image of $(G/L)^s$. If $|G : W| = \infty$ then G is "locally polycyclic"-by-finite. Therefore we assume that $|G : W| < \infty$. Then there is a subgroup F_1 of F such that $G = WF_1$, $F_1 \lhd G$ and F_1/F is finitely generated. From $F_1 = G$ it follows that G/G' is finitely generated. If $F_1 \neq G$ then G/F_1 is a divisible abelian s-group and consequently G is "locally polycyclic"-by-finite. The lemma is proved.

Corollary 2.3. *Let G be a solvable group. Then G satisfies Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$ if and only if G is either a "locally polycyclic"-by-finite group or a finitely generated group with Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$.*

Proposition 2.4. *Every finitely generated metabelian group G satisfies Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$.*

Proof. Suppose that the group G is not polycyclic. Let K be any non-"locally polycyclic"-by-finite subgroup of G. Then the subgroup $\overline{G'K} = G'K/(G' \cap K) = \overline{G'} \rtimes \overline{K}$ satisfies the maximal condition on normal subgroups Max-n by the Hall Theorem (see e.g. [4, theorem 15.3.1]). If $\overline{S}$ is a subgroup of $\overline{G'K}$ which contains $\overline{K}$, then $\overline{S} = (\overline{G'} \cap \overline{S}) \rtimes \overline{K}$ and consequently $(\overline{G'} \cap \overline{S}) \lhd \overline{G'K}$. This means that every series $\overline{K} \leqslant \overline{K_1} \leqslant \cdots \leqslant \overline{G'K}$ is finite. Hence G satisfies Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$, as desired.

Theorem 2.5. *Let G be a finitely generated solvable group. Then G satisfies Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$ if and only if at least one of following two cases takes places:*

(1) *G is a polycyclic group;*
(2) *every non-"locally polycyclic"-by-finite subgroup of G is finitely generated.*

Proof. ($\Rightarrow$). If G is a non-polycyclic group with Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$ then condition (2) follows from Lemma 2.2.

($\Leftarrow$). Let G be a non-polycyclic finitely generated solvable group of derived lenght $n \geqslant 1$ in which every non-"locally polycyclic"-by-finite subgroup is finitely generated. Since the subgroup $G^{(n-1)}K$ is finitely generated, we obtain that

$$\overline{G^{(n-1)}K} = G^{(n-1)}K/((G^{(n-1)}K') \cap K) = \overline{G^{(n-1)}} \rtimes \overline{K}$$

satisfies Max-n by the Hall Theorem (see e.g. [4, theorem 15.3.1]). This means that every series $K \leqslant K_1 \leqslant \cdots \leqslant G^{(n-1)}K$ is finite. Similarly,

$$\overline{G^{(n-2)}K} = G^{(n-2)}K/((G^{(n-2)}(G^{(n-1)}K)') \cap G^{(n-1)}K) = \overline{G^{(n-2)}} \rtimes \overline{G^{(n-1)}K}$$

satisfies Max-n and thus every series $G^{(n-1)}K \leqslant S_1 \leqslant \cdots \leqslant G^{(n-2)}K$ is finite. In the same manner by finite steps we can prove that every series $K \leqslant K_1 \leqslant \cdots \leqslant G'K$ is finite. Hence G satisfies Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$. The theorem is proved.

Corollary 2.6. *Let G be a non-polycyclic finitely generated metabelian group. Then every proper subgroup of G is either "locally polycyclic"-by-finite or finitely generated.*

Corollary 2.7. *Let G be a periodic solvable groups. Then G satisfies Max-$\overline{\mathcal{LPF}}$ if and only if G is a "locally polycyclic"-by-finite group.*

1 Черников С. Н. Группы с заданными свойствами систем подгрупп. – М., Наука, 1980. – 384 с.

2 Шунков В. П. *Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп* // В кн.: Алгебра. Матрицы и матричные группы. – Красноярск, 1970. – С.3-54.

3 Зайцев Д. И., Курдаченко Л. А. *Группы с условием максимальности для неабелевых подгрупп* // Укр. мат. ж. – 1991. – Т.43, N 7-8. – С.926-930.

4 Robinson D. J. S. A course in the theory of groups. – New York e.a., Springer, 1980. – 481 p.

5 Артемович О. Д. *Неразложимые метабелевы группы* // Укр. мат. ж. – 1990. – Т.42, N 9. – С.1252-1254.

6 Hartley B. *Centralizing properties in simple locally finite groups and large finite classical groups* // J. Austral Math. Soc.(Series A). – 1990. – T.49, N 3. – P.502-513.

7 Hartley B., Shute G. *Monomorphisms and direct limits of finite groups of Lie type* // Quart. J. Math. Oxford. – 1984. – 35(2). – P.49-71.

8 Tomas S. *The classification of the simple periodic linear groups* // Arch. Math. – 1983. – Vol.41, N 1. – P.103-106.

9 Tomas S. *An identification theorem for the locally finite non-twisted Chevalley groups* // Arch. Math. – 1983. – Vol.40, N 1. – P.21-31.

10 Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. – М., Наука, 1989. – 448 с.

11 Baer R. *Local Noethersche Gruppen* // Math. Zeitschrift. – 1957. – 66, N 2. – S.341-363.

12 Черников С. Н. *К теории полных групп* // Матем. сб. – 1948. –Т.22(64), N 3. – С.319-348.

Стаття надійшла до редколегії 30.10.98

УДК 515.544

РОЗВ'ЯЗНІ ПЕРІОДИЧНІ ГРУПИ З МАЙЖЕ НІЛЬПОТЕНТНИМИ ВЛАСНИМИ ФАКТОР-ГРУПАМИ

О. В. Тураш

Turash O. V. Periodic soluble groups with nilpotent-by-finite proper quotients. Periodic soluble groups with nilpotent-by-finite proper quotients are characterized. We describe also periodic soluble groups such that all their proper quotients are (nilpotent with class $\leqslant c$)-by-finite.

0. Вступ.

Нехай $\mathcal{X}$ — абстрактний клас груп. Нескінченна розв'язна група G називається $JN(\mathcal{X})$-групою, якщо сама група G не є $\mathcal{X}$-групою, але всі її власні фактор-групи є $\mathcal{X}$-групами.

У цій праці ми характеризуємо нескінченні розв'язні періодичні групи з майже нільпотентними власними фактор-групами (скорочено періодичні $JN(NF)$-групи), а також нескінченні розв'язні періодичні групи, всі власні фактор-групи котрих є скінченними розширеннями нільпотентних груп класу нільпотентності $\leqslant c$ (скорочено періодичні $JN(N_cF)$-групи).

Всюди нижче: p — просте число,
G' — комутант групи G;
$\zeta_i G$ — i-й гіперцентр групи G;
$Z(G)$ — центр групи G;
$\gamma_i G$ — i-й централ групи G;
$|H|$ — порядок скінченної групи H.
Позначення стандартні і їх можна знайти, наприклад, в [1].

1. У цій частині охарактеризовані періодичні $JN(NF)$-групи.

Лема 1.1. *Нехай G — $JN(NF)$-група. Тоді G не містить неодиничних скінченних підгруп.*

Доведення. Від супротивного. Припустимо, що G містить неодиничну скінченну нормальну підгрупу. Тоді група G також містить підгрупу скінченного індексу N, котра є розширенням скінченної групи за допомогою нільпотентної. З результату Ф. Холла [1, Ч. 1, ст. 117] випливає, що фактор-група $N/\zeta_i N$ скінченна для деякого додатного цілого i. Отже, G — майже нільпотентна група, а це неможливо. Лему доведено.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20E15, 20F18.

Лема 1.2. *Нехай G — $JN(NF)$-група. Тоді підгрупа Фіттінга A групи G абелева без скруту або елементарна абелева p-група для деякого простого числа p.*

Доведення. Від супротивного. Нехай N — нільпотентна неабелева нормальна підгрупа групи G. Тоді фактор-група G/N' майже нільпотентна. Тому існує така підгрупа P групи G скінченного індексу, що фактор-група P/N' — нільпотентна, а звідси за теоремою Ф.Холла [1, Ч. 1, ст. 117] випливає, що P — нільпотентна. Отже, група G сама майже нільпотентна, а це неможливо за умовою. Таким чином, кожна нільпотентна нормальна підгрупа групи G абелева, і тому підгрупа Фіттінга A також абелева.

Припустимо, що A не є групою без скруту. Нехай S — нижній шар її періодичної частини. Зрозуміло, що S — елементарна абелева p-група для деякого p. Нехай aS — деякий елемент із $(A/S) \cap Z(B/S)$ (тут B така нормальна підгрупа скінченного індексу групи G, що B/S — нільпотентна група і $A \leqslant B$). Тоді для кожного елемента x підгрупи B

$$[a, x] \in T,$$

а отже,

$$1 = [a, x]^p = [a^p, x].$$

Центр $Z(B)$ підгрупи B одиничний, оскільки в іншому випадку фактор-група $G/Z(B)$ майже нільпотентна і, як наслідок, G також майже нільпотентна, а це суперечить умові. Тому $a^p = 1$, а, отже, $a \in T$ і підгрупа $(A/S) \cap Z(B/S)$ одинична. Таким чином, $A = S$. Лему доведено.

Надалі для спрощення будемо говорити, що $JN(NF)$-група G має характеристику 0 (відповідно характеристику p), якщо її підгрупа Фіттінга $F(G)$ є група без скруту (відповідно p-група).

Нагадаємо, що група A діє незвідно на групі B, якщо в B не існує неодничних A-інваріантних підгруп. Група A діє точно на групі B, якщо нейтральний елемент групи B є єдиним нерухомим елементом стосовно цієї дії.

Модуль A над групою G називається політривіальним, якщо в A існує ланцюг G-інваріантних підгруп скінченної довжини, фактори якого є тривіальними G-модулями.

Лема 1.3. *Нехай G — $JN(NF)$-група, A — її підгрупа Фіттінга. Тоді кожен неодиничний елемент із B/A діє регулярно на A, де B — така нормальна підгрупа скінченного індексу групи G, що фактор-група B/A нільпотентна.*

Доведення. Нехай xA — неодиничний елемент фактор-групи B/A. Відображення

$$\tau : A \longrightarrow A,$$

визначене за правилом $\tau(a) = [a, x], \quad a \in A$, буде G-гомоморфізмом, а тому ядро $\operatorname{Ker}\tau$ і образ $\operatorname{Im}\tau$ нормальні підгрупи групи G. Припустимо, що ядро $\operatorname{Ker}\tau$ неодиничне. Тоді фактор-група $G/\operatorname{Ker}\tau$ майже нільпотентна, а значить, G містить нормальну підгрупу B_1 скінченного індексу з нільпотентною фактор-групою $B_1/\operatorname{Ker}\tau$. Отже, $\operatorname{Im}\tau \cong A/\operatorname{Ker}\tau$ — політривіальний B-модуль. Зрозуміло, що $\operatorname{Im}\tau$ — неодинична підгрупа, оскільки $C_G(A) = A$. Таким чином, група $B/\operatorname{Im}\tau$ майже нільпотентна. Але в групі G існує нормальна підгрупа B_2 скінченного індексу така, що $B_2/\operatorname{Im}\tau$ — нільпотентна група, а тому B_2 також нільпотентна, і, як наслідок, група G майже нільпотентна, що суперечить умові. Отже, підгрупа $\operatorname{Ker}\tau$ одинична і це означає, що x діє регулярно на A. Лему доведено.

Лема 1.4. *Нехай G — $JN(NF)$-група характеристики p, B — нормальна підгрупа G скінченного індексу. Якщо B містить підгрупу Фіттінга $F(G)$ групи G і фактор-група $B/F(G)$ нільпотентна, то*
(i) $B/F(G)$ не містить елементів порядку p;
(ii) підгрупа $F(G)$ виділяється в B напівпрямим множником і $F(G)$ — мінімальна нормальна підгрупа групи G.

Доведення. (1). Нехай $xF(G)$ — який-небудь елемент із $B/F(G)$, порядок котрого є степенем числа p. Оскільки $F(G)$ — елементарна абелева p-група, то нормальна підгрупа $< F(G), x >$ групи B нільпотентна за теоремою Баумслага [2]. Але $F(G) = F(B)$, а тому $< F(G), x >= F(G)$. Отже, елемент $xF(G)$ одиничний.

(2). Нехай $zF(G)$ — який-небудь елемент простого порядку q із $B/F(G)$, причому, $q \neq p$. З леми 1.3 випливає, що z діє регулярно на $F(G)$, а тому централізатор $C_{F(G)}(z)$ одиничний. Отже,
$$F(G) = [F(G), z] \times C_{F(G)}(z) = [F(G), z] \qquad (*)$$
(див. [3, Лема 1]. Для кожної G-інваріантної підгрупи N із $F(G)$ фактор-група B/N майже нільпотентна. Тому існує підгрупа B_1 така, що фактор-група B_1/N нільпотентна і $|B : B_1| < \infty$. Із (*) випливає, що $F(G) = [F(G), B_1]$ і $N = F(G)$. Оскільки фактор $B/F(G)$ нільпотентний, то за наслідком 1 [4] $F(G)$ виділяється в B напівпрямим множником. Лему доведено.

Теорема 1.5. *Нехай G — періодична група. Тоді G — $JN(NF)$-група тоді і тільки, коли $G = L \rtimes A$, де A — нескінченна елементарна абелева p-група, а L - нескінченна група, котра містить нільпотентну підгрупу B без елеметів порядку p скінченного індексу, B діє регулярно і незвідно на A.*

Доведення. Необхідність випливає з лем 1.2 і 1.4.

Доведемо достатність. Оскільки A — мінімальна нормальна підгрупа групи G і $C_G(A) = A$, то кожна власна фактор-група G майже нільпотентна. Сама G не є майже нільпотентною, оскільки $[L, A] \neq 1$.

2. У цій частині охарактеризуємо періодичні $JN(N_cF)$-групи. Надалі c — додатне ціле число.

Теорема 2.1. *Нехай G — періодична група, котра є скінченним розширенням нільпотентної групи класу $> c$. Група G — $JN(N_cF)$-група тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:*
(i) існує нормальна нільпотентна підгрупа N класу $> c$ скінченного індексу, центр $Z(N)$ котрої є локально циклічною p-групою;
(ii) $|\gamma_{c+1}N| = p$;
(iii) група G не містить нормальних підгруп, перетин котрих з N одиничний.

Доведення. Необхідність. Оскільки група G не містить двох неодиничних нормальних підгруп з одиничним перетином, то центр $Z(N)$ — локально циклічна p-група.

Припустимо, що підгрупа $\gamma_{c+2}(N)$ – неодинична. Оскільки фактор-група $G/\gamma_{c+2}N$ є скінченним розширенням нільпотентної групи класу $\leqslant c$, то фактор N/N' скінченний, і крім того, клас нільпотентності a комутанта N' на одиницю менший, ніж клас нільпотентності підгрупи N. Якщо $a < c+1$, то розглянемо $\gamma_2 N$ замість N. Міркуючи аналогічно, покажемо, що існує нормальна підгрупа N скінченного індексу така, що $\gamma_{c+2}N$ одиничний. Отже, $\gamma_{c+1}N \leqslant Z(N)$.

Нехай P — підгрупа порядку p із центру $Z(N)$. Оскільки G/P — скінченне розширення нільпотентної підгрупи P_1 класу нільпотентності $\leqslant c$, то $(P_1 \cap N)/P$ — нільпотентна група класу $\leqslant c$. Отже, $\gamma_{c+1}N = P$ і тому $\gamma_{c+1}N$ має порядок p.

Умова (iii) випливає з теореми Ремака [5, теор. 4.3.9].

Достатність. Оскільки група G не містить нормальних підгруп, перетин котрих з підгрупою N одиничний і $\gamma_{c+1}N \leqslant Z(N)$ мінімальна нормальна підгрупа G, то кожна власна фактор-група групи G є скінченним розширенням нільпотентної групи класу $\leqslant c$. Сама ж група G не є такою, оскільки підгрупа N має клас нільпотентності $c+1$. Теорему доведено.

Теорема 2.2. *Нехай G — періодична група, котра не містить нільпотентних підгруп скінченного індексу. Тоді наступні умови рівносильні:*

(1) G — $JN(N_cF)$-група;

(2) $G = L \rtimes A$, де A — нескінченна елементарна абелева p-група, а L - нескінченна група, котра містить нільпотентну підгрупу B без елеметів порядку p скінченного індексу, B діє регулярно і незвідно на A;

(3) G — $JN(NF)$-група.

Доведення. Це твердження випливає з теореми 1.5.

1. Robinson D. J. S. A course in the theory of group. – Springer, New York e.a., 1982.
2. Baumslag G. *Wreath products and p-groups* // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1959. – 55. – P.224-231.
3. Franciosi S., de Giovanni F. *On torsion groups with nilpotent automorphis groups* // Commut. Algebra. – 1986. – 14. – P.1909-1935.
4. Robinson D. J. S. *Spliting theorem for infinite group* // Symposia Math. – 1976. – 17. – P.441-470.
5. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. – М., Наука, 1977. – 240 с.

Стаття надійшла до редколегії 13.07.98

УДК 517.53

ДО АПРОКСИМАЦІЇ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Л. Я. Микитюк, М. М. Шеремета

Mykytyuk L. Ya., Sheremeta M. M. On the approximation of Dirichlet series by exponential polinomials. Approximation on vertical lines of absolutely convergent in the half-plane $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$ Dirichlet series with positive exponents is investigated.

1^0. Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, $D_0(\lambda)$ – клас рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

що мають абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$, а $\overline{D}_\beta(\lambda)$ – клас рядів Діріхле (1), для яких абсциса збіжності $\sigma_з = \alpha$ для деякого $\alpha > \beta$. Якщо в ряді (1) $a_n = 0$ при $n \geqslant k+1$ і $a_k \neq 0$, то функцію F називатимемо експоненціальним многочленом степеня k, а клас усіх експоненціальних многочленів, степінь яких не перевищує k, позначимо через $\Pi_k(\lambda)$.

Для $F \in \overline{D}_\beta(\lambda)$, як і в [1], покладемо $E_n(F,\beta) = \inf\{||F-P||_\beta : P \in \Pi_n(\lambda)\}$, де $||F-P||_\beta = \sup\{|F(\beta+it) - P(\beta+it)| : -\infty < t < +\infty\}$. В [1] доведено, що якщо послідовність λ має додатний крок, тобто $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$ для всіх $n \geqslant 1$, а $F \in \overline{D}_\beta(\lambda)$ при деякому $\beta < 0$, то для того, щоб $F \in D_0(\lambda)$, необхідно і досить, щоб

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{E_n(F,\beta)} = |\beta|. \tag{2}$$

Тут ми покажемо, що в наведеному вище твердженні умову додатності кроку послідовності показників можна замінити умовою $\ln n = o(\lambda_n), \quad n \to \infty$.

Теорема 1. *Нехай $\ln n = o(\lambda_n), \quad n \to \infty$, а $F \in \overline{D}_\beta(\lambda)$ при деякому $\beta < 0$. Тоді для того, щоб $F \in D_0(\lambda)$, необхідно і досить, щоб справджувалась рівність (2).*

В [1] для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності у термінах порядку вказаний також зв'язок між спаданням $E_n(F,\beta)$ та зростанням $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : -\infty < t < +\infty\}$. Ми дослідимо цей зв'язок в будь-якій шкалі зростання і в термінах максимального члена $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 0\}$.

Через $\Omega(0)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, 0)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, 0)$. Для $\Phi \in \Omega$ нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді [2] функція Ψ є неперервною і зростаючою до 0 на $(-\infty, 0)$.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Теорема 2. *Нехай $\beta < 0$, $\Phi \in \Omega(0)$, $\ln n = o(\lambda_n|\Psi(\varphi(\lambda_n))|)$, $n \to \infty$ і ряд Діріхле (1) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Тоді для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma, F) \leqslant (1 + o(1))\Phi((1 + o(1))\sigma), \quad \sigma \uparrow 0, \tag{3}$$

необхідно і досить, щоб

$$\ln \left(E_n(F, \beta)\, e^{|\beta|\lambda_{n+1}}\right) \leqslant (1 + o(1))\lambda_n|\Psi(\varphi((1 + o(1))\lambda_n))|, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

Наші доведення значно простіші, ніж наведені в [1].

2^0. Для доведення теорем будуть потрібні дві леми.

Лема 1. *Нехай $\sigma_p > -\infty$ – абсциса рівномірної збіжності ряду Діріхле (1) і $\beta < \sigma_p$. Тоді для всіх $n \geqslant 0$*

$$|a_{n+1}| \exp\{\beta\lambda_{n+1}\} \leqslant E_n(F, \beta), \quad n \to \infty, \tag{5}$$

Доведення. Оскільки для довільного $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp\{it\} dt = 0,$$

то для кожного експоненціального многочлена $P \in \Pi_k(\lambda)$ і довільних $\beta \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} P(\beta + it) \exp\{it\lambda_{n+1}\} dt = 0.$$

Покладемо

$$S_m(s) = \sum_{k=1}^{m} a_k \exp\{s\lambda_k\}.$$

Тоді для будь-яких натуральних чисел $n < m$ і довільного $P \in \Pi_k(\lambda)$ виконується рівність

$$a_{n+1} \exp\{\beta\lambda_{n+1}\} = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (S_m(\beta + it) - P(\beta + it)) \exp\{-it\lambda_{n+1}\} dt$$

і, отже,

$$|a_{n+1}| \exp\{\beta\lambda_{n+1}\} \leqslant ||S_m - P||_\beta.$$

Оскільки $\beta < \sigma_p$, то (S_m) рівномірно збігається до F у півплощині $\{s : \operatorname{Re} s \leqslant \beta\}$. Тому $||S_m - P||_\beta \to ||F - P||_\beta$, $m \to \infty$, і отже, завдяки довільності m,

$$|a_{n+1}| \exp\{\beta\lambda_{n+1}\} \leqslant ||F - P||_\beta$$

для кожного експоненціального многочлена $P \in \Pi_k(\lambda)$. Звідси легко випливає потрібна нерівність.

Лема 2. *Якщо $\beta < \sigma_a$, то*

$$E_n(F, \beta) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\beta\lambda_k\}.$$

Доведення. Нехай $P = S_n$ – часткова сума ряду (1). Тоді

$$E_n(F,\beta) \leqslant ||F - S_n||_\beta \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\beta\lambda_k\}.$$

3^0. Справедливість теореми 1 ми отримаємо з дещо загальнішої теореми. Покладемо

$$R_*(F,\beta) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{E_n(F,\beta)}, \quad R^*(F,\beta) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{E_n(F,\beta)}$$

і

$$\sigma_*(F) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}, \quad \sigma^*(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|}.$$

Теорема 3. *Нехай $\sigma_a > -\infty$. Тоді для кожного $\beta < \sigma_a$ виконуються нерівності $\sigma_a \leqslant R_*(F,\beta) + \beta \leqslant \sigma_*(F)$ і $\sigma_a \leqslant R^*(F,\beta) + \beta \leqslant \sigma^*(F)$.*

Доведення. Нехай $\sigma \in (\beta, \sigma_a)$. Тоді за лемою 2

$$E_n(F,\beta) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\beta\lambda_k\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} \exp\{(\beta-\sigma)\lambda_k\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{(\beta-\sigma)\lambda_{n+1}\} \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} = M(\sigma) \exp\{(\beta-\sigma)\lambda_{n+1}\},$$

де, завдяки нерівності $\sigma < \sigma_a$,

$$M(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_k| \exp\{\sigma\lambda_k\} < +\infty.$$

Звідси

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{E_n(F,\beta)} \leqslant \sigma - \beta + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \ln \frac{1}{M(\sigma)},$$

тобто, завдяки довільності σ, легко отримуємо нерівності $\sigma_a - \beta \leqslant R_*(F,\beta) \leqslant R^*(F,\beta)$. Якщо ж використаємо лему 1, то дістанемо нерівності $R_*(F,\beta) \leqslant \sigma_*(F) - \beta$ і $R^*(F,\beta) \leqslant \sigma^*(F) - \beta$, що і завершує доведення теорема 3.

Якщо $\ln n = o(\lambda_n)$, $n \to \infty$, то [3, стор. 10] $\sigma_a = \sigma_*(F)$ і за теоремою 3, $R_*(F,\beta) = \sigma_a - \beta$, звідки легко випливає твердження теореми 1.

4^0. Для доведення теореми 2 припустимо, що

$$\ln \left(E_n(F,\beta)\, e^{|\beta|\lambda_{n+1}}\right) \leqslant -\lambda_{n+1}\Psi(\varphi(\lambda_{n+1})),\ n \geqslant n_0.$$

Тоді за лемою 1 $\ln|a_{n+1}| \leqslant -\lambda_{n+1}\Psi(\varphi(\lambda_{n+1})), n \geqslant n_0$. З іншого боку, якщо $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$, $n \geqslant n_0$, то, оскільки $(t\Psi(\varphi(t))' = \varphi(t)$, за лемою 2 для всіх досить великих

n маємо

$$E_n(F,\beta) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \exp\{-\lambda_k \Psi(\varphi(\lambda_k)) + \beta\lambda_k\} = \int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \exp\{-t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t\} dn(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty} n(t) \exp\{-t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t\}(|\beta| + \varphi(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant |\beta| \int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \exp\{-t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t + \ln n(t)\}dt \leqslant |\beta| \int\limits_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t\}dt.$$

Але за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|\beta| \int_x^{\infty} \exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(t)) - |\beta|t\}dt}{\exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(x)) - |\beta|x\}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-|\beta| \exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(x)) - |\beta|x\}}{\exp\{-(1+\varepsilon)t\Psi(\varphi(x)) - |\beta|x\}(-|\beta| + \varphi(t))} = 1.$$

Тому

$$E_n(F,\beta) \leqslant (1+o(1)) \exp\{-(1+\varepsilon)\lambda_{n+1}\Psi(\varphi(\lambda_{n+1})) - |\beta| l_{n+1}\}, \quad n \to \infty.$$

Отже, ми, фактично, показали, що для того, щоб

$$\ln \left(E_n(F,\beta)\, e^{|\beta|\lambda_{n+1}}\right) \leqslant -(1+o(1))\lambda_{n+1}\Psi(\varphi((1+o(1))\lambda_{n+1})),\ n \to \infty,$$

необхідно і досить, щоб

$$\ln |a_n| \leqslant -(1+o(1))\lambda_n \Psi(\varphi((1+o(1))\lambda_n)),\ n \to \infty.$$

З іншого боку, відомо [2], що для того, щоб $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$, $\sigma \geqslant \sigma_0$, необхідно і досить, щоб $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$, $n \to \infty$.

З останніх двох тверджень легко отримуємо твердження теореми 2.

1. Nautiyal A., Shukla D. P. *On the approximation of an analytic function by exponential polynomials*// Indian J. pure appl. Math. – 1983. – Vol. 14, N 6. – P. 722-727.
2. Шеремета М. Н., Федыняк С. И. *О производной ряда Дирихле*// Сиб. мат. ж. – 1998. – Т 39, N 1.– С.206-223.
3. Леонтьев А. Ф. Ряды експонент. – М., Наука, 1976. – 536 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.11.98

УДК 517.537.72

ОЦІНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДУ ДІРІХЛЕ ЗНИЗУ

О. М. Сумик

Sumyk O. M. Estimates of the maximal term of Dirichlet series from below. Sufficient conditions are established on the coefficients of Dirichlet series with positive increasing to $+\infty$ exponents, under which the logarithm of the maximal term is estimated from below by a pregiven convex function.

Нехай $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$, а ряд Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$. Для $\sigma < A$ нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду (1). Через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' неперервна, додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty, A)$. Нехай φ – функція, обернена до Φ', а $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. Тоді функція φ неперервна і зростає до A на $(0, +\infty)$, а функція Ψ неперервна і зростає до A на $(-\infty, A)$ (див. [1]). В [1] доведено, що якщо $\ln |a_n| \leqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 0$, то $\ln \mu(\sigma, F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma < A$. Тут ми розглянемо випадок, коли $\ln |a_n| \geqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 0$, і для $\ln \mu(\sigma, F)$ одержимо оцінки знизу. Вони залежать як від щільності показників ряду (1), так і від зростання функції Φ.

Для $\Phi \in \Omega(A)$ і чисел $0 \leqslant a < +\infty$, $0 \leqslant b < +\infty$ покладемо

$$G_1(a, b; \Phi) = \frac{ab}{b-a} \int_a^b \Phi(\varphi(t)) \frac{dt}{t^2}, \quad G_2(a, b; \Phi) = \Phi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt \right).$$

Тоді [2] $G_1(a, b; \Phi) < G_2(a, b; \Phi)$, а безпосереднім наслідком теореми 3.1 з [3] є така теорема.

Теорема А. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega(A)$, ряд Діріхле (1) має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = A$ і $\ln |a_n| \geqslant -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 0$. Тоді, якщо $\sigma \in [\varphi(\lambda_n), \varphi(\lambda_{n+1})]$, то*

$$\ln \mu(\sigma, F) \geqslant \Phi(\sigma) \frac{G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)}{G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)}. \tag{2}$$

Для того, щоб оцінити знизу вираз, що стоїть у правому боці (2), покладемо

$$G_{**}(x) = \frac{G_1(a, x; \Phi)}{G_2(a, x; \Phi)} \quad (x > a), \quad G^{**}(x) = \frac{G_1(x, b; \Phi)}{G_2(x, b; \Phi)} \quad (0 \leqslant x < b).$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Лема. *Якщо функція Φ' неперервно диференційовна, то функція G_{**} спадна на $(a,+\infty)$, а функція G^{**} зростаюча на $[0,b)$.*

Доведення. Покладемо $G(x,y)=G_1(x,y;\Phi)/G_2(x,y;\Phi)$. Оскільки $G_j(a,b;\Phi)=G_j(b,a;\Phi)$ для всіх $a,b\in[0,+\infty)$ і $j=1,2$, то $G(x,y)=G(y,x)$ для $x,y\in[0,+\infty)$.

Елементарними перетвореннями встановлюємо, що

$$\frac{\partial G_1(y,x;\Phi)}{\partial x}=\frac{y}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x)-\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right)$$

і

$$\frac{\partial G_2(y,x;\Phi)}{\partial x}=\Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right)\frac{1}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x)-\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right).$$

Тому

$$\frac{\partial G(y,x)}{\partial x}=\frac{\partial G_1(y,x;\Phi)}{\partial x}\frac{1}{G_2(y,x;\Phi)}-\frac{G_1(y,x;\Phi)}{G_2^2(y,x;\Phi)}\frac{\partial G_2(y,x;\Phi)}{\partial x}=$$
$$=\frac{1}{G_2^2(y,x;\Phi)}\left\{\frac{y}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x)-\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right)\Phi\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right)-\right.$$
$$-\frac{yx}{x-y}\int\limits_y^x\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt\,\Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right)\frac{1}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x)-\right.$$
$$\left.\left.-\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right)\right\}=\frac{1}{G_2^2(y,x;\Phi)}\frac{y}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x)-\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right)g(x,y),$$

де

$$g(x,y)=\Phi\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right)-\frac{x}{x-y}\int\limits_y^x\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt\,\Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt\right),$$

а, з огляду на зростання функції φ,

$$(x-y)\varphi(x)-\int\limits_y^x\varphi(t)\,dt>0\tag{3}$$

для всіх $x\neq y$.

Залишається дослідити функцію g. Оскільки функція Φ' неперервно диференційовна, то $\Phi'' \geqslant 0$ і, завдяки (3), маємо

$$g'_x(x,y) = \Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\frac{1}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) -$$
$$-\frac{1}{(x-y)^2}\left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\Phi'_x\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) -$$
$$-\frac{x}{x-y}\int\limits_y^x \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt\,\Phi''_{xx}\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\frac{1}{(x-y)^2}\,((x-y)\varphi(x) -$$
$$-\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\Bigg) = -\frac{x}{(x-y)^3}\int\limits_y^x \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}\,dt\,\Phi''_{xx}\left(\frac{1}{x-y}\int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right)\times$$
$$\times\left((x-y)\varphi(x) - \int\limits_y^x \varphi(t)\,dt\right) < 0$$

для всіх $x \neq y$. Тому при фіксованому y функція g спадна на $[0,+\infty)$, і, оскільки $g(x,y) \to 0$ при $x \to y$, то $g(x,y) < 0$ для всіх $x > y$ та $g(x,y) > 0$ для всіх $0 \leqslant x < y$. Отже, $\dfrac{\partial G(y,x)}{\partial x} < 0$, якщо $y < x$ і $\dfrac{\partial G(y,x)}{\partial x} > 0$, якщо $y > x$. Звідси, і з симетричності функції G отримуємо, що $G'_{**}(x) = \dfrac{\partial G(a,x)}{\partial x} < 0$ для всіх $x > a$ і тому функція G_{**} спадає на $(a,+\infty)$, а $(G^{**})'(x) = \dfrac{\partial G(x,b)}{\partial x} > 0$ для всіх $0 \leqslant x < b$, тобто G^{**} зростає на $[0,b)$. Лему повністю доведено.

Безпосередньо з леми випливає така теорема.

Теорема B. *Нехай функція f додатна, неперервна, зростає до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ і $f(x) > x$. Якщо $\lambda_{n+1} \leqslant f(\lambda_n)$, то*

$$\frac{G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)}{G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)} \geqslant \frac{G_1(\lambda_n,f(\lambda_n);\Phi)}{G_2(\lambda_n,f(\lambda_n);\Phi)}$$

і

$$\frac{G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)}{G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)} \geqslant \frac{G_1(f^{-1}(\lambda_{n+1}),\lambda_{n+1};\Phi)}{G_2(f^{-1}(\lambda_{n+1}),\lambda_{n+1};\Phi)}.$$

Надалі будемо розглядати тільки випадок, коли $f(x) = Kx$, тобто $\lambda_{n+1} \leqslant K\lambda_n$ для всіх $n \geqslant 1$, де $K \equiv \mathrm{const} > 1$. Функцію Φ виберемо так, щоб вона відповідала випадку скінченного R-порядку.

Теорема 1. *Якщо ряд Діріхле (1) цілий (тобто $A = +\infty$), $\lambda_{n+1} \leqslant\leqslant K\lambda_n, K > 1, (n \geqslant 1)$ і $\ln|a_n| \geqslant -\dfrac{\lambda_n}{\varrho}\ln\dfrac{\lambda_n}{eT\varrho}$, $0 < \varrho, T < +\infty$ для всіх $n \geqslant 0$, то для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$*

$$\ln\mu(\sigma,F) \geqslant \frac{e\ln K}{(K-1)K^{1/(K-1)}}Te^{\varrho\sigma}. \tag{4}$$

Доведення. Виберемо $\Phi(\sigma) = Te^{\varrho\sigma}$. Тоді

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}, \quad \Psi(\sigma) = \sigma - \frac{1}{\varrho}, \quad x\Psi(\varphi(x)) = \frac{x}{\varrho}\ln\frac{x}{eT\varrho},$$

а

$$G_1(a,b;\Phi) = \frac{1}{\varrho}\frac{ab}{b-a}\ln\frac{b}{a}, \quad G_2(a,b;\Phi) = \frac{1}{e\varrho}\exp\left\{\frac{b\ln b - a\ln a}{b-a}\right\}.$$

Тому з нерівності (2), завдяки зростанню функції G^{**}, одержуємо

$$\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{Te^{\varrho\sigma}} \geqslant \frac{G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)}{G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)} \geqslant \frac{G_1(\lambda_{n+1}/K,\lambda_{n+1};\Phi)}{G_2(\lambda_{n+1}/K,\lambda_{n+1};\Phi)} =$$
$$= e\frac{\ln K}{K-1}\lambda_{n+1}\exp\left\{-\frac{K\ln\lambda_{n+1} - \ln(\lambda_{n+1}/K)}{K-1}\right\} = e\frac{\ln K}{K-1}K^{-1/(K-1)}, \tag{5}$$

тобто отримаємо (4).

Зауваження. Оцінка (4) неполіпшувана, бо нерівність (2) перетворюється у рівність при $\sigma = \dfrac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}}\varphi(t)\,dt$ (див.[3]), якщо $\ln|a_n| = -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant 1$, а нерівність (5) перетворюється у рівність у випадку, коли $\lambda_{n+1} = K\lambda_n$ для всіх $n \geqslant 1$.

На завершення доведемо одну загальну теорему про оцінку максимального члена знизу.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми A, функція $\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ є незростаючою на $(-\infty, A)$ і $\lambda_{n+1} \leqslant K\lambda_n$ для всіх $n \geqslant 1$, $K \equiv const > 1$. Тоді для всіх $\sigma < A$*

$$\ln\mu(\sigma,F) \geqslant \frac{\ln K}{K-1}\Phi(\sigma). \tag{6}$$

Доведення. З огляду на незростання функції $\Phi(\varphi(t))/t$ маємо

$$\frac{G_1(\lambda_{n+1}/K,\lambda_{n+1};\Phi)}{G_2(\lambda_{n+1}/K,\lambda_{n+1};\Phi)} =$$
$$= \left\{\frac{\lambda_{n+1}}{K-1}\int\limits_{\lambda_{n+1}/K}^{\lambda_{n+1}}\frac{\Phi(\varphi(t))}{t}\frac{dt}{t}\right\}\Bigg/\Phi\left(\frac{K}{(K-1)\lambda_{n+1}}\int\limits_{\lambda_{n+1}/K}^{\lambda_{n+1}}\varphi(t)\,dt\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left\{\frac{\lambda_{n+1}}{K-1}\frac{\Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))}{\lambda_{n+1}}\int\limits_{\lambda_{n+1}/K}^{\lambda_{n+1}}\frac{dt}{t}\right\}\Bigg/\Phi\left(\frac{K\varphi(\lambda_{n+1})}{(K-1)\lambda_{n+1}}\int\limits_{\lambda_{n+1}/K}^{\lambda_{n+1}}dt\right) =$$
$$= \left\{\frac{\ln K}{K-1}\Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))\right\}/\Phi(\varphi(\lambda_{n+1})) = \frac{\ln K}{K-1}.$$

1. Шеремета М. Н., Федыняк С. И. *О производной ряда Дирихле* // Сиб. мат. ж. – 1998. – Т. 39, N 1. – С.206-223.

2. Заболоцький М. В., Шеремета М. М. *Узагальнення теореми Ліндельофа* // Укр. мат. ж. – 1998. – Т. 50, N 9. – С.1177-1192.

3. Шеремета М. М., Сумик О. М. *Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій* // Математичні студії. – 1999. – Т. 11, N 1. – С.41-47.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.98

УДК 517.535

АНАЛОГИ ТЕОРЕМИ БОРЕЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ДОДАТНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

О. М. Трусевич

Trusevych O. M. Analogues of Borel's theorem for a class of positive functional series. We obtain conditions for a regular convergent functional series $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n\}$ under which Borel's type relation

$$\ln F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad \sigma \to +\infty,$$

holds outside of a set, here $\mu(\sigma) = \max\{a_n \exp\{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n\} : n \geqslant 0\}$.

Відомо [1–3], що задача отримання оцінок зверху для досить широкого спектра функціональних рядів зводиться до подібної задачі для додатних збіжних при $\sigma \geqslant 0$ рядів вигляду

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n}, \tag{1}$$

де $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant n \to +\infty)$, $\beta_n \in \mathbb{R}_+$, $h(\sigma)$ — додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція. Власне, в [1] за виконання більш жорстких умов, ніж описувані в [2,3] умови, (котрі можна трактувати, як умови на $h(\sigma)$), узагальнюється поняття порядку росту рядів подібних до (1), а також встановлюються формули обчислення порядку через коефіцієнти a_n і показники λ_n і β_n ряду. У [2,3] встановлюються умови справедливості при $\sigma \to +\infty$ зовні виняткових множин співвідношення

$$F(\sigma) = (1 + o(1))\mu(\sigma), \tag{2}$$

де $\mu(\sigma) = \max\{a_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n} : n \geqslant 0\}$ — максимальний член ряду (1).

При цьому в [2] вперше виявлено, що умови, достатні для того, щоб справджувалось співвідношення (2), можуть містити обмеження на швидкість зростання лише послідовності (λ_n).

У цій замітці встановлено подібний з якісної точки зору факт, який стосується співвідношення типу Бореля

$$\ln F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma). \tag{3}$$

Справедлива така теорема.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30B50.

Теорема. *Нехай $h(\sigma)$ — неспадна, додатна, опукла, двічі неперервно диференційовна на $[0,+\infty)$ функція, а послідовності (λ_n) і (β_n) такі, як і вище. Якщо виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty, \tag{4}$$

то співвідношення (3) справджується при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \in [0,+\infty) \setminus E$), де E — деяка множина скінченної міри.

Зауваження 1. При $\beta_n = 0$ ($n \geqslant 0$) з теореми отримуємо основний результат із статті [4], встановлений для цілих рядів Діріхле.

Доведення теореми. Наслідуючи П. Розенблума [5], при фіксованому $\sigma \geqslant 0$ визначимо дискретну випадкову величину X з розподілом ймовірностей

$$P\{X = \lambda_n + h'(\sigma)\beta_n\} = \frac{a_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n}}{F(\sigma)}.$$

Безпосередньо перевіряємо, що математичне сподівання $MX = g'(\sigma)$, а дисперсія $DX = g''(\sigma) - g_0(\sigma)$, де $g(\sigma) = \ln F(\sigma)$, а

$$g_0(\sigma) = \frac{h''(\sigma)}{F(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\beta_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n}.$$

При фіксованому $\sigma \geqslant 0$ введемо $n_\sigma(t) \stackrel{def}{=} \sum_{\lambda_n + h'(\sigma)\beta_n \leqslant t} 1$. Зауважимо, що $n_\sigma(t) \leqslant n(t) \stackrel{def}{=} \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Застосовуючи нерівність Чебишова $P\{|X - MX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \dfrac{DX}{\varepsilon^2}$ з $\varepsilon = \sqrt{CDX}$, $C = C(\sigma) > 1$, отримуємо

$$F(\sigma) \leqslant \frac{C}{C-1} \sum_{|\lambda_n + \beta_n h'(\sigma) - g'(\sigma)| < p(\sigma)} a_n e^{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n},$$

де $p(\sigma) = \sqrt{C(g''(\sigma) - g_0(\sigma))}$. Звідси

$$F(\sigma) \leqslant \frac{C}{C-1}\mu(\sigma) n_\sigma(g'(\sigma) + p(\sigma)) \leqslant \frac{C}{C-1}\mu(\sigma) n(g'(\sigma) + p(\sigma)). \tag{5}$$

Відзначимо, що за умовою $h''(\sigma) \geqslant 0$, тому $g_0(\sigma) \geqslant 0$ і, отже,

$$p(\sigma) \leqslant \sqrt{Cg''(\sigma)}. \tag{6}$$

Зауважимо, що для довільної диференційовної, додатної, зростаючої на $[0,+\infty)$ функції $\tau(\sigma)$ множина

$$E(\tau) \stackrel{def}{=} \{\sigma \geqslant 0 : \tau'(\sigma) \geqslant \psi(\tau(\sigma))\}$$

має скінченну міру у випадку, якщо додатна функція $\psi(t)$ така, що

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty. \tag{7}$$

Справді,

$$\text{meas } E(\tau) = \int_{E(\tau)} d\sigma \leqslant \int_{E(\tau)} \frac{\tau'(\sigma)}{\psi(\tau(\sigma))} d\sigma \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty.$$

Тому, при $\sigma \notin E \overset{def}{=} E(g) \cup E(g')$ одночасно виконуються нерівності

$$g'(\sigma) \leqslant \psi_1(g(\sigma)), \quad g''(\sigma) \leqslant \psi_2(g'(\sigma)) \tag{8}$$

для деяких функцій ψ_j, що задовольняють умову (7).

Зауважимо тепер (див. [4]), що умова (4) рівносильна збіжності інтегралу

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt < +\infty,$$

звідки негайно отримуємо, що знайдеться зростаюча неперервна функція $\psi(t)$, для котрої одночасно виконується (7) та

$$\ln n(t) = o(\psi^{-1}(t)) \quad (t \to +\infty). \tag{9}$$

Оскільки, при $\psi_2(t) = t^{3/2} + 1$ і $C(\sigma) \leqslant (g'(\sigma))^{1/4}$ з (6) і (8) при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$) випливає

$$g'(\sigma) + p(\sigma) \leqslant (1 + o(1))g'(\sigma),$$

то з (5) і (9) за умови $C(\sigma) \to +\infty$ ($\sigma \to +\infty$) при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$) отримаємо

$$\ln F(\sigma) \leqslant \ln \frac{C}{C-1} + \ln \mu(\sigma) + \ln n(2g'(\sigma)) = \ln \mu(\sigma) + o\Big(\psi^{-1}(2g'(\sigma))\Big).$$

Вибираючи в (8) $\psi_1(x) = \frac{1}{2}\psi(x)$, негайно отримуємо справедливість твердження теореми.

Теорему доведено.

1. Осколков В. А. *О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами* // Матем. сб.– 1976.– Т.100, №2.– С.312–334.
2. Величко С. Д., Скасків О. Б. *Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів* // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.– 1989.– Вип. 32.– С.50–51.
3. Скасків О. Б., Трусевич О. М. *Максимальний член і сума регулярно збіжного функціонального ряду* // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.– 1998.– Вип. 49.– С.75–79.
4. Скаскив О. Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию* // Матем. заметки.– 1985.– Т.37, №1.– С.41–47.
5. Rosenbloom P. C. *Probability and entire functions* // Stud. Math. Anal. Related Topics, Stanford: Calif. Univ. Press, 1962.– P.325–332.

Стаття надійшла до редколегії 03.11.98

УДК 517.53

АНАЛОГ ТЕОРЕМИ ХЕЙМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО l-ІНДЕКСУ

В. О. Кушнір

Kushnir V. O. An analogue of Hayman theorem for analytic functions of bounded l-index. Let G be an arbitrary complex domain, and l a positive continuous function in G such that

$$l(z) > \frac{\beta}{dist(z, \partial G)}, \quad z \in G, \tag{1}$$

where $\beta > 1$ is a constant. For $r \in [0, \beta]$ we define

$$\lambda_1(r) = \inf\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}$$

and

$$\lambda_2(r) = \sup\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}.$$

By $Q_\beta(G)$ we denote the class of positive continuous functions that in addition to (1) for all $r \in [0, \beta]$ satisfy the condition $0 < \lambda_1(r) \leqslant \lambda_2(r) < +\infty$. A criterion of boundedness of l-index for analytic function in an arbitrary complex domain is obtained.

Нехай G – довільна область із $\mathbb{C}$, f – аналітична в області G функція, яка має на $\partial\mathbb{G}$ принаймні одну особливу точку, а l – додатна неперервна в G функція така, що

$$l(z) > \frac{\beta}{dist(z, \partial G)}, \quad z \in G, \tag{1}$$

де $\beta > 1$ – фіксоване число. Функція f називається [1] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{2}$$

Найменше з таких чисел N називатимемо l-індексом і позначатимемо через $N(f; l)$. Якщо f – ціла функція, а l^* – довільна додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція, то для $l(z) = l^*(|z|)$ виконання умови (1) очевидне, а з (2) випливає означення цілої функції обмеженого l^*-індексу [2], звідки, в свою чергу, при $l^*(|z|) \equiv 1$ отримаємо класичне означення цілої функції обмеженого індексу [3]. У. Хейман [4] показав, що для того щоб ціла функція f

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D15.

мала обмежений індекс, необхідно і досить, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$, $C > 0$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність $|f^{(p+1)}(z)| \leqslant C \max\{|f^{(k)}(z)| \,:\, 0 \leqslant k \leqslant p\}$. М. М. Шеремета [5] переніс теорему Хеймана на цілі функції обмеженого l^*-індексу.

Тут ми доведемо аналог теореми Хеймана для аналітичних в будь-якій області $G \subset \mathbb{C}$ функцій.

Для $r \in [0, \beta]$ покладемо

$$\lambda_1(r) = \inf\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}$$

і

$$\lambda_2(r) = \sup\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}.$$

Очевидно, що $\lambda_1(r) \leqslant 1 \leqslant \lambda_2(r)$. Клас додатних неперервних в G функцій l, котрі, крім (1), задовольняють умову $0 < \lambda_1(r) \leqslant \lambda_2(r) < +\infty$ для всіх $r \in [0, \beta]$, позначимо через $Q_\beta(G)$.

Зауважимо, що якщо $l \in Q_\beta(G)$ і $z_0 \in G$, то для всіх $r \in [0, \beta]$ з нерівності $|z - z_0| \leqslant \dfrac{r}{l(z_0)}$ випливають нерівності

$$\lambda_1(r) l(z_0) \leqslant l(z) \leqslant \lambda_2(r) l(z_0). \tag{3}$$

Аналогом теореми Хеймана є така теорема.

Теорема. *Нехай $\beta > 1$ і $l \in Q_\beta(G)$. Для того, щоб аналітична в G функція f мала обмежений l-індекс, необхідно і досить, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$, $C > 0$ такі, що для кожного $z \in G$ виконується нерівність*

$$\frac{|f^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}(z)} \leqslant C \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z)} \,:\, 0 \leqslant k \leqslant p\right\}. \tag{4}$$

Доведення. Якщо f — аналітична в G функція обмеженого l-індексу, то з (2) при $p = N$ і $C = (N + 1)!$ отримуємо (4), тобто необхідність умови (4) є очевидною.

Для доведення іі достатності нам будуть потрібні дві леми.

Лема 1 [5]. *Нехай функції f_1 і f_2 аналітичні в області $G \in \mathbb{C}$, а $\gamma = (z = z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ - аналітична крива, що лежить в G. Тоді або $f_1(z(t)) \equiv f_2(z(t))$, або $f_1(z(t)) = f_2(z(t))$ тільки для скінченної кількості точок $t_k \in [0, T]$.*

Доведення наступної леми міститься в доведенні теореми 2 із [1].

Лема 2. *Нехай $\beta > 1$, $l \in Q_\beta$ і f - аналітична в області G функція. Якщо*

$$\max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant P_1(\beta) \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{\beta l(z_0)}\right\}, \quad P_1(\beta) = \mathrm{const},$$

то f має обмежений l-індекс.

Отже, нехай виконується (4), $z_0 \in G$ і $K = \left\{ z : |z - z_0| \leqslant \frac{\beta}{l(z_0)} \right\}$. Тоді, з огляду на умову (1), $K \subset G$, а завдяки (3), для кожного $z \in K$ виконується

$$\frac{|f^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}(z_0)} \leqslant \lambda_2^{p+1}(\beta)\frac{|f^{(p+1)}(z)|}{l^{p+1}(z)} \leqslant$$
$$\leqslant C\lambda_2^{p+1}(\beta)\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant p\right\} \leqslant$$
$$\leqslant C\lambda_2^{p+1}(\beta)\max\left\{\lambda_1^{-k}(\beta)\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z_0)} : 0 \leqslant k \leqslant p\right\} \leqslant B\,g(z), \tag{5}$$

де $B = C\lambda_2^{p+1}(\beta)\lambda_1^p(\beta)$ і $g(z) = \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z_0)} : 0 \leqslant k \leqslant p\right\}$. Позначимо

$$\gamma_1 = \left\{ z : |z - z_0| = \frac{1}{2\beta l(z_0)} \right\}, \quad \gamma_2 = \left\{ z : |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)} \right\}.$$

Виберемо довільним чином точки $z_1 \in \gamma_1$, $z_2 \in \gamma_2$ і з'єднаємо їх кусково аналітичною кривою $\gamma = (z = z(t), 0 \leqslant t \leqslant T)$, що лежить в K і на котрій $g(z) \neq 0$. Вибираємо γ так, щоб її довжина $|\gamma|$ не перевищувала $(2\beta^2 - 1)/(\beta l(z_0))$. Зрозуміло, що функція $g(z(t))$ неперервна на $[0, T]$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що функція $z = z(t)$ аналітична на $[0, T]$. Покажемо, що $g(z(t))$ неперервно диференційовна на $[0, T]$ за винятком, можливо, скінченної кількості точок. За лемою 1 для довільних k_1, k_2, $0 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant p$, або $\frac{|f^{(k_1)}(z(t))|}{l^{k_1}(z_0)} \equiv \frac{|f^{(k_2)}(z(t))|}{l^{k_2}(z_0)}$, або рівність $\frac{|f^{(k_1)}(z(t))|}{l^{k_1}(z_0)} = \frac{|f^{(k_2)}(z(t))|}{l^{k_2}(z_0)}$, можлива тільки для скінченної кількості точок $t_k \in [0, T]$. Отже, проміжок $[0, T]$ можна розбити на скінченну кількість відрізків, на кожному з котрих $g(z(t)) \equiv \frac{|f^{(k)}(z(t))|}{l^k(z_0)}$ при деякому k, $0 \leqslant k \leqslant p$. Тобто $g(z(t))$ неперервно диференційовна, за винятком скінченної кількості точок, і з огляду на (5) маємо

$$\frac{dg(z(t))}{dt} \leqslant \max\left\{\frac{d}{dt}|f^{(k)}(z(t))|/l^k(z_0) : 0 \leqslant k \leqslant p\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k+1)}(z(t))||z'(t)|}{l^k(z_0)} : 0 \leqslant k \leqslant p\right\} =$$
$$= l(z_0)|z'(t)|\max\left\{\frac{|f^{(k+1)}(z(t))|}{l^{k+1}(z_0)} : 0 \leqslant k \leqslant p\right\} \leqslant B\,g(z(t))|z'(t)|l(z_0).$$

Тому

$$\left|\ln\frac{g(z_2)}{g(z_1)}\right| = \left|\int_0^T \frac{dg(z(t))}{g(z(t))}\right| \leqslant Bl(z_0)\int_0^T |z'(t)|dt = Bl(z_0)|\gamma| \leqslant B\frac{2\beta^2 - 1}{\beta}.$$

Якщо точку $z_2 \in \gamma_2$ вибрати так, щоб $|f(z_2)| = \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)}\right\}$, то звідси маємо

$$\max\left\{|f(z)| \ : \ |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)}\right\} \leqslant g(z_2) \leqslant g(z_1)\exp\{2B\frac{\beta^2 - 1}{\beta}\}. \tag{6}$$

Оскільки $z_1 \in \gamma_1$, то для всіх $j = \overline{1,p}$ згідно з нерівністю Коші маємо

$$\frac{|f^{(j)}(z_1)|}{l^j(z_0)} \leqslant j!(2\beta)^j \max\left\{|f(z)| : |z - z_1| = \frac{1}{2\beta l(z_0)}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant j!(2\beta)^j \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{\beta l(z_0)}\right\},$$

тобто

$$g(z_1) \leqslant p!(2\beta)^p \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{\beta l(z_0)}\right\}.$$

Тому з (6)

$$|f(z_2)| = \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{\beta}{l(z_0)}\right\} \leqslant g(z_2) \leqslant$$
$$\leqslant g(z_1)\exp\{2B\frac{\beta^2 - 1}{\beta}\} \leqslant$$
$$\leqslant p!(2\beta)^p \exp\{2B\frac{\beta^2 - 1}{\beta}\} \max\left\{|f(z)| : |z - z_0| = \frac{1}{\beta l(z_0)}\right\},$$

і за лемою 2 f є функцією обмеженого l - індексу. Теорему доведено.

1. Кушнір В. О., Шеремета М.М. Аналітичні функції обмеженого l-індексу // Мат. студії (в друці).
2. Кузык А. Д., Шеремета М. Н. *Целые функции ограниченного l-распределения значений* // Мат. заметки. – 1986. – 39, N 1. – С.3 - 13.
3. Lepson B. *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index* // Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math Soc., Providence. – 1968. – 11. – P.298 - 307.
4. Hayman W. K. *Differential inequalities and local valency* // Pacif. J. Math. – 1973. – Vol. 44. – P. 117-137.
5. Шеремета М. Н. *О целых функциях и рядах Дирихле ограниченного l-индекса* // Известия вузов. Матем. – 1992. – N 9. – С.81-87.

Стаття надійшла до редколегії 27.01.99

УДК 517.547.3

ІНТЕГРАЛЬНІ СЕРЕДНІ ЛОГАРИФМІВ ДОБУТКІВ БЛЯШКЕ

Я. В. Васильків, А. А. Кондратюк

Vasyl'kiv Ya. V., Kondratyuk A. A. Integral means of Blaschke product logarithms. Criteria for the boundedness of q–th integral means $(1 < q < +\infty)$ of the Blaschke product logarithms with zeros concentrated on a finite system of rays are established.

Нехай $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\{a_\nu\}$ — послідовність відмінних від нуля точок з $\mathbb{D}$ таких, що

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}(1 - |a_\nu|) < +\infty, \tag{1}$$

а

$$B(z) = \prod_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\bar{a}_\nu}{|a_\nu|} \frac{a_\nu - z}{1 - \bar{a}_\nu z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

— добуток Бляшке з нулями в точках a_ν. Через $\mathbb{D}^*$ позначимо область $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty}[a_\nu, a_\nu/|a_\nu|)$. Розглянемо функцію

$$\log B(z) = \log B(0) + \int_0^z \frac{B'(\xi)}{B(\xi)} d\xi, \quad z \in \mathbb{D}^*,$$

де інтеграл береться по відрізку $[0, z]$,

$$\log B(0) = \log|B(0)| = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \log|a_\nu| = \int_0^1 \log t \, dn(t, B), \tag{2}$$

$n(t, B)$ — кількість нулів функції $B(z)$ в крузі радіуса $0 < t < 1$.

З умови Бляшке (1) випливає [1, с. 51], що

$$\lim_{t\to 1} \log t \, n(t, B) = \lim_{t \to 1}(1 - t) n(t, B) = 0.$$

Тоді, інтегруючи в (2) частинами, одержимо

$$\log B(0) = -\int_0^1 n(t, B) t^{-1} \, dt.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30D50.

Нехай також

$$m_q(r, \log B) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \log B \left(re^{i\theta} \right) \right|^q d\theta \right\}^{1/q}, \; 1 \leqslant q < +\infty, \; 0 < r < 1,$$

— інтегральні середні логарифма добутку Бляшке.

А. Зігмунд (див. в [2]) поставив таку задачу: описати такі послідовності нулів $\{a_\nu\}$, що функція $m_2(r, u)$, $u = \log|B|$, обмежена на $(0, 1)$.

Використовуючи метод рядів Фур'є для аналітичних функцій [3–5], цю задачу частково розв'язали в 1969 р. Г. Р. МакЛейн та Л. А. Рубел [2]. Зокрема, вони встановили, що для обмеженості функцій $m_2(r, u)$ на $(0, 1)$ досить, а у випадку, коли нулі добутку Бляшке $B(z)$ зосереджені на скінченній системі променів і необхідно, щоб $n(r, B) = O\left((1-r)^{-1/2}\right)$, $r \to 1$.

Деякі результати, що характеризують поведінку q–тих інтегральних середніх ($1 \leqslant q < +\infty$) логарифма модуля добутків Бляшке та Цудзі—Джрбашяна були отримані К. Лінденом [6–8]. Недавно А. А. Кондратюк та В. В. Єйко [9,10] показали, що для довільного $q \in [1, +\infty)$ знайдеться стала $M_1(q) > 0$ така, що

$$(1-r)^{1/q'} m_q(r, u) \leqslant M_1(q) \int\limits_r^1 n(t, B) t^{-1} dt, \quad 0 < r < 1, \quad 1/q + 1/q' = 1, \tag{3}$$

а для добутків Бляшке $B(z)$ з додатними нулями такими, що

$$n(r, B)(1-r) \leqslant \beta \int\limits_r^1 n(t, B) dt, \quad 0 < r < 1, \tag{4}$$

де $\beta \in (0, 1)$ — деяка додатна стала, при деякому $M_2(q) > 0$ є правильна обернена нерівність

$$m_q(r, u)(1-r)^{1/q'} \geqslant M_2(q) \int\limits_r^1 n(t, B) t^{-1} dt, \; 0 < r < 1, \; 1 < q < +\infty.$$

При цьому показано [10], що умову (4) відкинути не можна. Окрім того, вони встановили, що для обмеженості на $(0, 1)$ інтегральних середніх $m_q(r, u)$, $u = \log|B|$, $1 < q \leqslant 2$, добутків Бляшке $B(z)$ з додатними нулями необхідно і досить, щоб

$$n(r, B) = O\left((1-r)^{-1/q}\right), \quad r \to 1.$$

Інтегральні середні логарифма добутку Бляшке характеризуються такими теоремами.

Теорема 1. *Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке. Тоді для довільного $1 < q < +\infty$ знайдеться стала $M_3(q) > 0$ така, що при $r \to 1$*

$$m_q(r, \log B) \leqslant M_3(q) \int\limits_0^1 (1-t)^{-1/q'} n(rt, B) t^{-1} dt, \quad 1/q + 1/q' = 1. \tag{5}$$

Теорема 2. *Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке, нулі якого зосереджені на скінченній системі k променів. Тоді для довільного $1 < q < +\infty$ знайдеться стала $M_4(q) > 0$ така, що при $r \to 1$*

$$m_q(r, \log B) \geqslant M_4(q)k^{-1}\int_0^r (1-t)^{-1/q'} n(t,B)dt,\ 1/q + 1/q' = 1. \tag{6}$$

Наслідок 1. *Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке, нулі якого зосереджені на скінченній системі променів, $1 < q < +\infty$. Тоді умова*

$$\int_0^1 n(t,B)(1-t)^{-1/q'}dt < +\infty,\quad 1/q + 1/q' = 1,$$

є необхідною і достатньою для обмеженості функцій $m_q(r, \log B)$ при $r \to 1$.

Наслідок 2. *Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке.*
а) Якщо $1 < q < +\infty$,

$$n(r,B) = O\left((1-r)^{-1/q} l(r)\right),\quad r \to 1, \tag{7}$$

де $l(r)$ — деяка додатна на $(0,1)$ функція така, що

$$\int_0^1 (1-t)^{-1} l(t)dt < +\infty, \tag{8}$$

то

$$m_q(r, \log B) = O(1),\quad r \to 1. \tag{9}$$

б) Навпаки, нехай для добутку $B(z)$ з нулями на скінченній системі променів виконується (9), $1 < q < +\infty$. Тоді знайдеться додатна функція $l(t) = l_q(t)$ така, що $\lim\limits_{t\to 1} l(t) = 0$, виконується (8) і, при цьому, є правильною (7).

Наслідок 3. *Нехай*

$$n(r,B) = O\left((1-r)^{-\alpha}\right),\ r \to 1,\ 0 < \alpha \leqslant \alpha_0. \tag{10}$$

а) Якщо $\alpha_0 < 1/q$, $1 < q < +\infty$, то виконується (9).
б) Якщо ж $\alpha_0 \geqslant 1/q$, $1 < q < +\infty$, то існують добутки Бляшке $B(z)$, для яких виконується (10) і $\lim\limits_{r\to 1} m_q(r, \log B) = +\infty$.

Для доведення теорем 1 та 2 нам будуть потрібні такі результати.

Нехай X простір з σ–скінченною мірою $\lambda \geqslant 0$. Через $L^q(\lambda)$ $(1 \leqslant q < +\infty)$ позначимо простір, інтегровних в q–ому степені числових функцій f змінної $x \in X$ стосовно міри λ. Для функції $f \in L^q(\lambda)$ $(1 \leqslant q < +\infty)$ через

$$\|f\|_{L^q(\lambda)} = \left(\int_X |f(x)|^q d\lambda\right)^{1/q}$$

позначимо її норму. Зокрема, якщо $X = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$ і $d\lambda = \frac{d\theta}{2\pi}$, то будемо вживати позначення $f \in L^q$ та

$$\|f\|_q = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^q d\theta \right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < +\infty,$$

а також

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Окрім того, для функції $f \in L^1$ через $\tilde{f}(e^{i\theta}) = (H * f)(e^{i\theta})$ позначимо згортку розподілу Гільберта

$$H = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -i \operatorname{sign} k \, e^{ik\psi}, \quad \psi \in [0, 2\pi], \quad \operatorname{sign} 0 = 0,$$

з функцією $f(e^{i\theta})$. Тобто

$$c_k(\tilde{f}) = -i \operatorname{sign} k \, c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{sign} 0 = 0. \tag{11}$$

Теорема М. Рісса *[11, с. 239]. Якщо $f \in L^q$, то $\tilde{f} \in L^q$ і*

$$\|\tilde{f}\|_q \leqslant M_5(q) \|f\|_q, \qquad 1 < q < +\infty,$$

де $M_5(q) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2q}$, якщо $1 < q \leqslant 2$ і $M_5(q) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q}$, якщо $2 \leqslant q < +\infty$.

Інтегральна нерівність Мінковського *[12, с. 24]. Якщо λ і ω — дві σ-скінченні міри, $1 \leqslant q < +\infty$ і $f(x,t)$ $\omega \times \lambda$ — вимірна, то*

$$\left\| \int_X f(x,t) \, d\omega \right\|_{L^q(\lambda)} \leqslant \int_X \|f(x,t)\|_{L^q(\lambda)} d\omega.$$

Ця стаття є повним викладом та уточненням результатів, анонсованих в [13].

Доведення теореми 1. Для кожного фіксованого $r \in (0,1)$ через $\tilde{u}\left(re^{i\theta}\right) = (H * u)\left(re^{i\theta}\right)$ позначимо згортку розподілу Гільберта з функцією $u\left(re^{i\theta}\right) = \log\left|B\left(re^{i\theta}\right)\right|$. Нехай також

$$p(z) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{|a| \leqslant t} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta - \varphi)}\right) d\mu, \tag{12}$$

$z = re^{i\theta}$, $a = |a|e^{i\varphi}$, $0 < r < 1$, де $\mathcal{P}(r,w) = \operatorname{Re}\left((r+w)(r-w)^{-1}\right)$ — ядро Пуасона, $\mu = \sum_\nu \delta(a - a_\nu)$, $\delta(\xi)$ — міра Дірака. Коефіцієнти Фур'є функцій $\log B(re^{i\theta})$ та $u(re^{i\theta})$ будемо позначати через $c_k(r, \log B)$ та $c_k(r, u)$ відповідно.

Згідно з [14]

$$
\begin{aligned}
&c_0(r,\log B) = c_0(r,u),\\
&c_k(r,\log B) = \gamma_k r^k + \int\limits_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t,B)}{t}dt, \quad k\in\mathbb{N},\\
&c_{-k}(r,\log B) = \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_{-k}(t,B)}{t}dt, \qquad k\in\mathbb{N},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

де γ_k визначаються з розвинення

$$\log B(z) = \log B(0) + \sum_{k=1}^{+\infty}\gamma_k z^k$$

в деякому околі точки $z=0$,

$$n_k(r,B) = \int_{|a|\leqslant r} e^{-ik\varphi}d\mu, \qquad k\in\mathbb{Z}, \qquad n_0(r,B)=n(r,B).$$

Окрім того [2],

$$
\begin{aligned}
&c_0(r,u) = -\int\limits_r^1 n(t,B)\frac{dt}{t},\\
&c_k(r,u) = \frac{1}{2}\gamma_k r^k + \frac{1}{2}\int\limits_0^r \left[\left(\frac{r}{t}\right)^k + \left(\frac{t}{r}\right)^k\right]\frac{n_k(t,B)}{t}dt, \quad k\in\mathbb{N},\\
&c_{-k}(r,u) = \bar{c}_k(r,u), \qquad k\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Враховуючи співвідношення (12), а також розвинення

$$\mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} e^{ik(\theta-\varphi)},$$

знаходимо

$$
\begin{aligned}
c_k(r,p) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right)e^{-ik\theta}d\theta = \int\limits_0^r \frac{dt}{t}\int\limits_{|a|\leqslant t}\left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} e^{-ik\varphi}d\mu =\\
&= \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|}\frac{n_k(t,B)}{t}dt, \qquad k\in\mathbb{Z}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Співвідношення (11),(13) — (15) приводять нас до тотожності

$$c_k(r,\log B) \equiv c_k(r,u) + i\,c_k(r,\tilde{u}) - i\,c_k(r,\tilde{p}),$$

справедливої для всіх $k\in\mathbb{Z}$, $r\in(0,1)$, звідки

$$\log B(re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}) + i\,\tilde{u}(re^{i\theta}) - i\,\tilde{p}(re^{i\theta}), \tag{16}$$

для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi]$ при кожному фіксованому $r \in (0,1)$. Тоді, застосувавши нерівність Мінковського, для довільних $q \in (1, +\infty)$, $r \in (0,1)$, дістаємо

$$m_q(r, \log B) \leqslant m_q(r, u) + m_q(r, \tilde{u}) + m_q(r, \tilde{p}). \tag{17}$$

З огляду на теорему М. Рісса, маємо

$$m_q(r, \tilde{u}) + m_q(r, \tilde{p}) \leqslant M_5(q) \left(m_q(r, u) + m_q(r, p) \right),$$

а звідси, з урахуванням нерівностей (3) та (17), для всіх $0 < r < 1$ знаходимо

$$m_q(r, \log B) \leqslant M_6(q)(1-r)^{-1/q'} \int\limits_r^1 n(t, B) t^{-1} dt + M_5(q) m_q(r, p), \ 1/q + 1/q' = 1, \tag{18}$$

де $M_6(q) = M_1(q)(1 + M_5(q))$.

Для оцінки останнього доданку в правій частині нерівності (18) двічі застосуємо інтегральну нерівність Мінковського і зробимо заміну змінної $t = r\tau$, в результаті чого одержимо

$$\begin{aligned} m_q(r,p) &\leqslant \int\limits_0^r \frac{dt}{t} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_{|a| \leqslant t} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta - \varphi)}\right) d\mu \right)^q d\theta \right\}^{1/q} \\ &\leqslant \int\limits_0^r \frac{dt}{t} \int\limits_{|a| \leqslant t} d\mu \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi)}\right) \right)^q d\theta \right\}^{1/q} \\ &= \int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\tau} \int\limits_{|a| \leqslant r\tau} d\mu \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\mathcal{P}\left(1, \tau e^{i(\theta-\varphi)}\right) \right)^q d\theta \right\}^{1/q}, \end{aligned}$$

$1 < q < +\infty$, $a = |a| e^{i\varphi}$. Зауважимо, що внутрішній інтеграл в останній нерівності не залежить від φ. Тому, враховуючи нерівність

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\mathcal{P}\left(1, te^{ix}\right) \right)^q dx \right\}^{1/q} &\leqslant \left(\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \mathcal{P}\left(1, te^{ix}\right) \right)^{1/q'} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{P}\left(1, te^{ix}\right) dx \right\}^{1/q} = \\ &= (1+t)^{1/q'} (1-t)^{-1/q'} \leqslant 2^{1/q'} (1-t)^{-1/q'}, \ 1 < q < +\infty, \ 1/q + 1/q' = 1, \ 0 < t < 1, \end{aligned}$$

знаходимо

$$m_q(r, p) \leqslant 2^{1/q'} \int\limits_0^1 (1-t)^{-1/q'} n(rt, B) t^{-1} dt, \quad 0 < r < 1,$$

що разом з нерівністю (18) та очевидним співвідношенням

$$(1-r)^{-1/q'} \int\limits_r^1 n(t, B) t^{-1} dt = o\left(\int\limits_0^1 (1-t)^{-1/q'} n(rt, B) t^{-1} dt \right), \quad r \to 1,$$

дає (5).

Доведення теореми 2. Нехай $u(z) = \log|B(z)|$. Враховуючи зображення (16) та нерівність Мінковського, одержимо

$$m_q(r,\tilde{p}) \leqslant m_q(r, u + i\tilde{u}) + m_q(r, \log B), \ 1 < q < +\infty, \ 0 < r < 1. \tag{19}$$

Згідно з теоремою М. Рісса, маємо

$$m_q(r,\tilde{u}) \leqslant M_5(q) m_q(r,u), \quad 0 < r < 1,$$

і тому

$$m_q(r, u + i\tilde{u}) \leqslant (1 + M_5(q)) m_q(r,u) \leqslant (1 + M_5(q)) m_q(r, \log B), \tag{20}$$

бо $m_q(r,u) \leqslant m_q(r, \log B)$. Тоді, підставивши (20) в (19), одержимо

$$m_q(r,\tilde{p}) \leqslant M_7(q) m_q(r, \log B), \quad 0 < r < 1, \tag{21}$$

де $M_7(q) = (2 + M_5(q))$. Отже, нам залишилось дати оцінку знизу при $r \to 1$ функцій $m_q(r,\tilde{p})$, $1 < q < +\infty$.

Нехай нулі добутку Бляшке $B(z)$ зосереджені на скінченній системі k променів: $\left\{te^{i\varphi_j}\right\}_{j=1}^{k}$, $0 \leqslant \varphi_1 < \cdots < \varphi_k < 2\pi$, $0 < t < 1$; $n_j(r)$ — їх кількість (з урахуванням кратності) на промені $\left\{te^{i\varphi_j}\right\}$, $0 < t \leqslant r < 1$. Очевидно, що $\sum_{j=1}^{k} n_j(r) = n(r,B)$. У цьому випадку функція $p(z)$ (див. співвідношення (12)) набуде вигляду

$$p(z) = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_0^r \frac{n_j(t)}{t} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi_j)}\right) dt, \quad z = re^{i\theta}.$$

Приймемо

$$g(re^{i\theta}) = \frac{\pi r}{M_5(q')k(\pi r^2 + 4)} \sum_{j=1}^{k} \int\limits_0^r \left(\left|\frac{1 + \rho re^{i(\theta-\varphi_j)}}{1 - \rho re^{i(\theta-\varphi_j)}}\right|^{1/q'}\right)^{\sim} d\rho.$$

Добре відомо [12, с. 118], що функція $F(z) = (1+z)(1-z)^{-1}$, $z \in \mathbb{D}$, належить до просторів Харді $H^\alpha(\mathbb{D})$, $0 < \alpha < 1$, і

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|F\left(\rho re^{ix}\right)\right|^\alpha dx \leqslant M_8(\alpha)|F(0)|^\alpha = M_8(\alpha), \tag{22}$$

де $M_8(\alpha) = (\cos(\pi\alpha/2))^{-1}$. Окрім того, функція $|F(z)|^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, субгармонійна. Тому [12, с. 72]

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|F\left(\rho re^{ix}\right)\right|^\alpha \mathcal{P}\left(r, te^{ix}\right) dx \geqslant |F(\rho t)|^\alpha \geqslant (1 - \rho t)^{-\alpha}, \ 0 < t < r, \ 0 < \rho < r. \tag{23}$$

Застосувавши теорему М. Рісса до функції $g(z)$, а також, врахувавши нерівності Мінковського та нерівності

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{1 + \rho re^{ix}}{1 - \rho re^{ix}}\right| dx \leqslant 1 + \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{1 - \rho r}, \quad \int\limits_0^r \log \frac{2}{1 - \rho r} d\rho \leqslant r^{-1} \log 2e \leqslant 2r^{-1},$$

знаходимо

$$m_{q'}(r,g) \leqslant \frac{\pi r}{k(\pi r^2+4)} \sum_{j=1}^{k} \int_0^r d\rho \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1+\rho r e^{i(\theta-\varphi_j)}}{1-\rho r e^{i(\theta-\varphi_j)}} \right| d\theta \right\}^{1/q'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi r}{\pi r^2+4} \int_0^r \left(1+\frac{2}{\pi}\log\frac{2}{1-\rho r}\right)^{1/q'} d\rho \leqslant \frac{\pi r}{\pi r^2+4}\left(r+\frac{2}{\pi}\int_0^r \log\frac{2}{1-\rho r}d\rho\right) \leqslant 1.$$

Тому, з урахуванням нерівності Гельдера, для всіх $1<q<+\infty$, $0<r<1$, одержуємо

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}\left(re^{i\theta}\right) g\left(re^{i\theta}\right) d\theta \right| \leqslant m_q(r,\tilde{p}) m_{q'}(r,g) \leqslant m_q(r,\tilde{p}). \tag{24}$$

Далі, враховуючи [11, с. 225], що

$$\left(\tilde{f}\left(e^{i\theta}\right)\right)^{\sim} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{ix}\right)dx - f\left(e^{i\theta}\right)$$

та нерівність (22), одержимо

$$-\tilde{g}\left(re^{i\theta}\right) \geqslant \frac{\pi r}{M_5(q')k(\pi r^2+4)} \left(\sum_{j=1}^{k} \int_0^r \left| \frac{1+\rho r e^{i(\theta-\varphi_j)}}{1-\rho r e^{i(\theta-\varphi_j)}} \right|^{1/q'} d\rho - krM_8(1/q') \right). \tag{25}$$

Тоді, з огляду на співвідношення дуальності [12, с. 117], зі співвідношень (24),(25) та (23) випливає, що

$$m_q(r,\tilde{p}) \geqslant -\int_0^{2\pi} p\left(re^{i\theta}\right)\tilde{g}\left(re^{i\theta}\right)\frac{d\theta}{2\pi} \geqslant \frac{\pi r}{M_5(q')k(\pi r^2+4)} \left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k} \int_0^r \frac{n_j(t)}{t} dt \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} \left| \frac{1+\rho r e^{i(\theta-\varphi_\nu)}}{1-\rho r e^{i(\theta-\varphi_\nu)}} \right|^{1/q'} \mathcal{P}\left(r, te^{i(\theta-\varphi_j)}\right)\frac{d\theta}{2\pi} - krM_8(1/q')\int_0^r \frac{n(t,B)}{t}dt \right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\pi r}{M_5(q')k(\pi r^2+4)} \left(\int_0^r \frac{n(t,B)}{t}dt \int_0^r \frac{d\rho}{(1-\rho t)^{1/q'}} - krM_8(1/q')\int_0^r \frac{n(t,B)}{t}dt \right). \tag{26}$$

Зауважимо, що

$$\int_0^r \frac{d\rho}{(1-\rho t)^{1/q'}} \geqslant \int_0^t \frac{d\rho}{(1-\rho t)^{1/q'}} \geqslant \frac{t}{\left(2(1-t)\right)^{1/q'}}, \tag{27}$$

$$\int_0^r \frac{n(t,B)}{t}dt = o\left(\int_0^r \frac{n(t,B)}{(1-t)^{1/q'}}dt\right), \quad r\to 1, \tag{28}$$

і

$$\frac{\pi r}{\pi r^2+4} > 1/5 \quad \text{при} \quad 1/2 \leqslant r < 1. \tag{29}$$

Співвідношення (26) — (29) разом з (21) дають (6) зі сталою $M_4(q) = (20M_5(q') + +10)^{-1}, 1/q + 1/q' = 1$.

Доведення наслідку 1. Цей наслідок негайно випливає з нерівностей (5) та (6).

Доведення наслідку 2. Твердження пункту а) цього наслідку легко випливає зі співвідношень (5),(7),(8) та

$$(1-t)^{-1/q'} n(t,B) = O\left((1-t)^{-1} l(t)\right), \quad t \to 1.$$

Доведемо твердження пункту б) цього наслідку. Зауважимо, що

$$\int_0^1 n(t,B)dt = \sum_{\nu=1}^{+\infty}(1-|a_\nu|) < +\infty.$$

Тому, для всіх $r \in (0,1)$ маємо

$$n(r,B)(1-r) \leqslant \int_r^1 n(t,B)dt,$$

або

$$n(r,B)(1-r)^{1/q} \leqslant (1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t,B)dt \stackrel{\mathrm{def}}{=} l(r), \ 1/q + 1/q' = 1,$$

тобто

$$n(r,B) \leqslant (1-r)^{-1/q} l(r). \tag{30}$$

Враховуючи (30), необхідне твердження буде встановлено, якщо ми покажемо, що $\lim\limits_{r\to 1} l(r) = 0$ і функція $l(r)$ задовольняє умові (8). Справді, з умови

$$\int_0^1 n(t,B)(1-t)^{-1/q'}dt < +\infty \tag{31}$$

випливає, що

$$n(r,B)(1-r)^{1/q} \leqslant q^{-1} \int_r^1 n(t,B)(1-t)^{-1/q'}dt \to 0, \quad r \to 1.$$

Тоді, застосувавши правило Лопіталя, одержимо

$$\lim_{r\to 1} l(r) = \lim_{r\to 1}(1-r)^{-1/q'} \int_r^1 n(t,B)dt = q' \lim_{r\to 1} n(r,B)(1-r)^{1/q} = 0.$$

Далі, інтегруючи частинами, дістаємо

$$\int_0^1 \frac{l(t)}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{\int_t^1 n(\tau,B)d\tau}{(1-t)^{1+1/q'}}dt = q'\left[\int_0^1 \frac{n(t,B)}{(1-t)^{1/q'}}dt - \int_0^1 n(t,B)dt\right] \leqslant$$

$$\leqslant q' \int_0^1 n(t,B)(1-t)^{-1/q'}dt,$$

що разом з (31) дає (8).

Доведення наслідку 3. Твердження пункту а) цього наслідку негайно випливає з твердження пункту а) наслідку 2 при $l(r) = (1-r)^{1/q-\alpha_0}$.

Для доведення твердження пункту б) цього наслідку досить взяти добуток Бляшке $B(z)$ з нулями, розташованими на скінченній системі променів такий, що

$$C_1(1-r)^{-1/q} \leqslant n(r,B) \leqslant C_2(1-r)^{-\alpha}, \quad 1 < q < +\infty, \quad r \to 1,$$

де C_1, C_2 — деякі додатні сталі, та врахувати співвідношення (6).

1. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. – М., Мир, 1971. – 312 с.
2. MacLane G. R., Rubel L. A. *On the growth of the Blaschke products* // Canadian J. Math. – 1969. – 21. – P. 595–600.
3. Rubel L. A., Taylor B. A. *A Fourier series method for meromorphic and entire functions* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – 96. – P. 53–96.
4. Rubel L. A. Entire and meromorphic functions. – Springer, 1996. – 187 p.
5. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов, Вища школа, 1988. – 195 с.
6. Linden C. N. *Integral means and zeros distributions of Blaschke products* // Canadian J. Math. – 1972. – 24. – P. 755–760.
7. Linden C. N. *Integral logarithmic means for regular functions* // Pacific J. Math. – 1989. – 138. – P. 119–127.
8. Linden C. N. *The characterization of orders for regular functions* // Math. Proc. Camb. Soc. – 1992. – 11. – P. 299–307.
9. Yeyko V., Kondratyuk A. *Growth of integral logarithmic means for Blaschke products.* // Міжнародна математична конференція присв'ячена пам'яті Ганса Гана (10–15 жовтня 1994 р., Чернівці)/ Чернівці: Рута, 1994. – с. 168.
10. Ейко В. В., Кондратюк А. А. *Об интегральных логарифмических средних произведений Бляшке* // Матем. заметки. – 1998. – т. 64, вып. 2. – С. 199–206.
11. Дынькин Е. М. *Методы теории сингулярных интегралов (Преобразование Гильберта и теория Кальдерона-Зигмунда)* // Итоги наук и техн. Соврем. проблемы мат. Фундам. напр. / ВИНИТИ., 1987. – Т. 15. – С. 197–295.
12. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. – М., Мир, 1984. – 469 с.
13. Васильків Я. В., Кондратюк А. А. *Інтегральні середні логарифмів добутків Бляшке* // В зб.: Сучасні проблеми математики. В 4-ох частинах./ Чернівці–Київ. – 1998. – Ч. 1. – С. 96–98.
14. Калинець Р. З., Кондратюк А. А. *Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p[0,2\pi]$-метриці* // Укр. мат. журн. – 1998. – т. 50, N 7. – С. 889–896.

Стаття надійшла до редколегії 10.07.98

УДК 517.524

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ЗАЛИШКІВ ПАРНОЇ ЧАСТИНИ РОЗВИНЕННЯ У ГІЛЛЯСТИЙ ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ ВІДНОШЕННЯ ЛАУРІЧЕЛЛИ

Н. П. Гоєнко

Goyenko N. P. On convergence of tails of even part of branched continued fraction expansion for ratio of Lauricella functions. In this paper we construct the even part of branched continued fraction expansion for ratio of the Lauricella functions $F_D^{(N)}(a, b_1, b_2, \dots, b_N)/F_D^{(N)}(a+1, b_1+1, b_2, \dots, b_N; c+1; z)$ with parameter $a \neq 0$. Using Slezynski–Pringsheim type convergence criterion of branched continued fractions, convergence of tails of even part in the polydisk $\{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| < r,\ j = \overline{1,N}\}$ and the ray $\{z \in \mathbb{C}^N : z_1 = z_2 = \cdots = z_N\}$ is investigated.

Розглянемо гіпергеометричну функцію Лаурічелли

$$F_D^{(N)}(a, b_1, \dots, b_N; c; z) = \sum_{k_1, \dots, k_N = 0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+\cdots+k_N}(b_1)_{k_1}\cdots(b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+\cdots+k_N}} \frac{z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}}{k_1!\cdots k_N!},$$

де a, $b_1, \dots, b_N$, c — комплексні сталі, причому $c \neq 0, -1, -2, \dots$; $z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ — символ Похгаммера, $(\alpha)_0 = 1$.

У праці [1] побудовано розвинення відношення гіпергеометричних функцій

$$\frac{F_D^{(N)}(a, b_1, \dots, b_N; c; z)}{F_D^{(N)}(a+1, b_1+1, b_2, \dots, b_N; c+1; z)} \tag{1}$$

з параметром $a \neq 0$ у гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$s_0(z) + \cfrac{t_0(z)}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{s_{i(1)}(z)}{1 + \ddots + \cfrac{t_{i(n-1)}(z)}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{s_{i(n)}(z)}{1 + \ddots}}}}, \tag{2}$$

де

$$s_0(z) = \frac{a}{c}(1 - z_1), \quad t_0(z) = 1 - \frac{a}{c}, \quad t_{i(n)}(z) = \frac{c - a + n}{a(1 - z_{i_n})}, \quad s_{i(n)}(z) = \frac{(b_{i_n} + p_{i(n)})z_{i_n}}{a(1 - z_{i_n})}, \tag{3}$$

$i(n) = i_1 i_2 \dots i_n$ — мультиіндекс, $i_k = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,n}$, $n = \overline{1,\infty}$, $p_{i(n)} = \alpha_{i(n)} + \delta_{i_n}^1$, $\alpha_{i(1)} = 0$, $\alpha_{i(n)}$ — кількість чисел i_n в мультиіндексі $i(n-1)$, якщо $n \geqslant 2$, δ_i^j — символ Кронекера.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 33C65.

Побудуємо парну частину ГЛД (2). Для цього розглянемо гіллястий ланцюговий дріб

$$b_0(z) + c_0(z)\left(d_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{c_{i(n)}(z)}{d_{i(n)}(z)}\right)^{-1} \tag{4}$$

і визначимо його підхідні дроби:

$$g_1 = b_0(z) + c_0(z)/d_0(z),$$

$$g_k = b_0(z) + c_0(z)\left(d_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{k-1} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{c_{i(n)}(z)}{d_{i(n)}(z)}\right)^{-1}, \quad k = \overline{2,\infty}.$$

Нехай

$$F_n(\zeta) = s_0(z) + \cfrac{t_0(z)}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{s_{i(1)}(z)}{1 + \ddots + \cfrac{t_{i(n-1)}(z)}{1 + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{s_{i(n)}(z)}{1+\zeta}}}}, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Тоді підхідні дроби ГЛД (2) мають вигляд:

$$f_1 = s_0(z) + t_0(z), \quad f_{2n} = F_n(0), \quad f_{2n+1} = F_n(t_{i(n)}(z)), \quad n = \overline{1,\infty}.$$

ГЛД (4) називається парною частиною дробу (2), якщо $g_k = f_{2k}$, $k = \overline{1,\infty}$.

Твердження 1. *Нехай ГЛД (2) є розвиненням відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли (1) з параметром $a \neq 0$. Тоді парною частиною гіллястого ланцюгового дробу (2) є ГЛД (4), елементи котрого обчислюються за формулами:*

$$\begin{aligned}
&b_0(z) = \frac{a}{c}(1 - z_1), \quad c_0(z) = 1 - \frac{a}{c}, \quad d_0(z) = 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{b_{i_1} + 1}{a(1 - z_{i_1})} z_{i_1},\\
&c_{i(n)}(z) = -\frac{(c - a + n)(b_{i_n} + p_{i(n)}) z_{i_n}}{a^2(1 - z_{i_n})^2},\\
&d_{i(n)}(z) = 1 + \frac{c - a + n}{a(1 - z_{i_n})} + \sum_{i_{n+1}=1}^{N} \frac{(b_{i_{n+1}} + p_{i(n+1)}) z_{i_{n+1}}}{a(1 - z_{i_{n+1}})}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Доведення. У праці [2] доведено, що парною частиною ГЛД (2) є гіллястий ланцюговий дріб

$$s_0(z) + \cfrac{t_0(z)}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} s_{i(1)}(z) + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{u_{i(1)}(z)}{v_{i(1)}(z) + \ddots + \sum\limits_{i_n=1}^{N} \cfrac{u_{i(n)}(z)}{v_{i(n)}(z) + \ddots}}}, \tag{6}$$

де

$$u_{i(n)}(z) = -s_{i(n)}(z) t_{i(n)}(z), \quad v_{i(n)}(z) = 1 + t_{i(n)}(z) + \sum_{i_{n+1}=1}^{N} s_{i(n+1)}(z).$$

Гіллясті ланцюгові дроби (6) і (4) мають однакову структуру. Враховуючи вирази (3) для $t_{i(n)}(z)$ і $s_{i(n)}(z)$, шляхом елементарних обчислень одержимо формули (5) для елементів $c_{i(n)}(z)$, $d_{i(n)}(z)$ парної частини ГЛД (2). Твердження доведено.

Дослідимо збіжність нескінченних залишків ГЛД (4):

$$Q_{i(n)}(z) = d_{i(n)}(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(z)}{d_{i(k)}(z)}, \quad n = \overline{1,\infty}, \quad i_p = \overline{1,N}, \quad p = \overline{1,n}.$$

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти ГЛД (4) визначаються за формулами (5) і r_0 – найменший додатний корінь рівняння $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$.*

Тоді для будь-якого дійсного додатного числа r, $0 < r < r_0^2$, існує таке натуральне число $n_0 = n_0(r)$, що для кожного $n > n_0$ і довільного мультиіндексу $i(n)$ нескінченний залишок ГЛД (4) $Q_{i(n)}(z)$ збігається абсолютно в області

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C}^N : |z_j| < r, \ j = \overline{1,N} \right\}. \tag{7}$$

Доведення. Зауважимо, що для найменшого додатного кореня r_0 рівняння четвертого степеня, яке фігурує у формулюванні теореми, справедлива оцінка: $\dfrac{1}{3} < r_0^2 < \dfrac{1}{2}$.

Із ознаки збіжності інтегральних ланцюгових дробів, встановленої Т. М. Антоновою [3, с.18], випливає, що гіллястий ланцюговий дріб

$$d_{i(n)}(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=n+1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)}(z)}{d_{i(k)}(z)},$$

збігається абсолютно, якщо існують додатні функції $g_{i(k)}(z)$, $k = \overline{n,\infty}, i_p = \overline{1,N}, p = \overline{1,k}$, для котрих виконуються нерівності

$$|d_{i(k)}(z)| \geqslant g_{i(k)}(z) + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|c_{i(k+1)}(z)|}{g_{i(k+1)}(z)}, \quad k = \overline{n,\infty}, \quad i_p = \overline{1,N}, \quad p = \overline{1,k}. \tag{8}$$

Враховуючи формули (5) для $c_{i(k)}(z)$, $d_{i(k)}(z)$ і покладаючи

$$g_{i(k)}(z) := \frac{|c - a + k|\sqrt{|z_{i_k}|}}{|a||1 - z_{i_k}|}, \quad k = \overline{n,\infty}, \quad i_p = \overline{1,N}, \quad p = \overline{1,k},$$

нерівності (8) запишемо у вигляді

$$\left| 1 + \frac{c - a + k}{a(1 - z_{i_k})} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{(b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}) z_{i_{k+1}}}{a(1 - z_{i_{k+1}})} \right| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|c - a + k|\sqrt{|z_{i_k}|}}{|a||1 - z_{i_k}|} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}|\sqrt{|z_{i_{k+1}}|}}{|a||1 - z_{i_{k+1}}|}. \tag{9}$$

Оцінимо зверху праву частину нерівності (9) у припущенні, що $z \in D$. Враховуючи, що

$0 < r < 1$ і $\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N} p_{i(k+1)} = k+1$, маємо

$$\frac{|c-a+k|\sqrt{|z_{i_k}|}}{|a||1-z_{i_k}|} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{|b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}|\sqrt{|z_{i_{k+1}}|}}{|a||1-z_{i_{k+1}}|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|c-a|+k)\sqrt{r}}{|a|(1-r)} + \frac{\sqrt{r}}{|a|(1-r)}\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j| + k + 1\right) \leqslant \frac{2\sqrt{r}}{|a|(1-r)}k + \psi,$$

де

$$\psi := \frac{\sqrt{r}}{|a|(1-r)}\left(1 + |c-a| + \sum_{j=1}^{N}|b_j|\right).$$

В цій же області для лівої частини нерівності (9) виконується така оцінка знизу

$$\left|1 + \frac{c-a+k}{a(1-z_{i_k})} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{(b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)})z_{i_{k+1}}}{a(1-z_{i_{k+1}})}\right| \geqslant \left|1 + \frac{c-a+k}{a(1-z_{i_k})}\right| -$$

$$- \sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{|b_{i_{k+1}} + p_{i(k+1)}||z_{i_{k+1}}|}{|a||1-z_{i_{k+1}}|} \geqslant \frac{k-|c|}{|a|(1+r)} - \frac{r}{1-r} - \frac{r}{|a|(1-r)}\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j| + k + 1\right) =$$

$$= \frac{1-2r-r^2}{|a|(1-r^2)}k - \varphi,$$

де

$$\varphi := \frac{|c|}{|a|(1+r)} + \frac{r}{|a|(1-r)}\left(1 + |a| + \sum_{j=1}^{N}|b_j|\right).$$

Умови (9) виконуються, якщо

$$\frac{1-2r-r^2}{|a|(1-r^2)}k - \varphi \geqslant \frac{2\sqrt{r}}{|a|(1-r)}k + \psi.$$

Нехай

$$n_0 := \left[\frac{|c|(1-r) + (1+r)\sqrt{r}\left(1 + |c-a| + \sum\limits_{j=1}^{N}|b_j| + \sqrt{r}\left(1 + |a| + \sum\limits_{j=1}^{N}|b_j|\right)\right)}{1 - 2\sqrt{r} - 2r - 2r\sqrt{r} - r^2}\right] + 1.$$

Тоді для елементів $c_{i(k)}(z)$ і $d_{i(k)}(z)$ ГЛД (4), де $k > n_0$, в області (7) справджуються нерівності (8).

Отже, для кожного $n > n_0$ і довільного мультиіндексу $i(n)$ нескінченний залишок ГЛД (4) $Q_{i(n)}(z)$ збігається абсолютно в області (7).

Дослідимо збіжність залишків ГЛД (4) на промені $\left\{z \in \mathbb{C}^N : z_1 = z_2 = \cdots = z_N\right\}$.

Теорема 2. *Для кожної точки* $z^0=(\xi,\dots,\xi)\in\mathbb{C}^N,\xi\in G,G=\left\{w\in\mathbb{C}:|1+w|>2\sqrt{|w|}\right\}$, *існує таке натуральне число* $n_1=n_1(\xi)$, *що всі нескінченні залишки ГЛД (4)* $Q_{i(n)}(z^0)$, $n>n_1$, *збігаються абсолютно.*

Доведення. Враховуючи, що $z_1=z_2=\dots=z_N=\xi$, ліву частину нерівностей (7) оцінимо знизу

$$\left|1+\frac{c-a+k}{a(1-\xi)}+\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{(b_{i_{k+1}}+p_{i(k+1)})\xi}{a(1-\xi)}\right|=$$

$$=\left|\frac{1+\xi}{a(1-\xi)}k+1+\frac{1}{a(1-\xi)}\left(c-a+\xi\Big(1+\sum_{j=1}^{N}b_j\Big)\right)\right|\geqslant\frac{|1+\xi|}{|a||1-\xi|}k-u,$$

де

$$u:=\left|1+\frac{1}{a(1-\xi)}+\left(c-a+\xi\Big(1+\sum_{j=1}^{N}b_j\Big)\right)\right|.$$

Для правої частини нерівностей (9) справедлива оцінка зверху

$$\frac{|c-a+k|\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}+\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{|b_{i_{k+1}}+p_{i(k+1)}|\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}\leqslant\frac{(k+|c-a|)\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}+$$

$$+\frac{\Big(\sum_{j=1}^{N}b_j+k+1\Big)\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}=\frac{2\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}k+v,$$

де $v=\dfrac{\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}\left(|c-a|+\sum_{j=1}^{N}|b_j|+1\right)$. Якщо виконується нерівність $\dfrac{|1+\xi|}{|a||1-\xi|}k-u\geqslant\dfrac{2\sqrt{|\xi|}}{|a||1-\xi|}k+v$, то для $k>n_1$, де

$$n_1:=\left[\frac{\left|c+\xi(1+\sum_{j=1}^{N}b_j-a)\right|+\sqrt{|\xi|}(|c-a|+\sum_{j=1}^{N}|b_j|+1)}{|1+\xi|-2\sqrt{|\xi|}}\right]+1,$$

елементи $c_{i(k)}(z^0)$, $d_{i(k)}(z^0)$ ГЛД (4) задовольняють умови (8). Отже, залишки $Q_{i(n)}(z)$, $n>n_1$, ГЛД (4) збігаються абсолютно для кожного $z^0=(\xi,\dots,\xi)$, $\xi\in G$.

1. Молнар Н. П., Манзій О. С. *Розвинення гіпергеометричних функцій Аппеля F_1 та Лаурічелли $F_D^{(N)}$ у гіллясті ланцюгові дроби*// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-матем. – 1997. – Вип. 48. – С. 17-26.
2. Боднар Д. І., Дмитришин Р. І. *Оцінки похибок апроксимацій багатовимірних g-дробів* // Вісн. ДУ "Львівська політехніка" – 1998. – N 321. – С. 6-9.
3. Антонова Т. М. Достатні ознаки збіжності і стійкості інтегральних ланцюгових дробів. – Дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Львів, 1996. – 141 с.

Стаття надійшла до редколегії 08.09.98

УДК 517.956.25

ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В ОКОЛІ РЕБРА

М. І. Плеша

Plesha M. I. On the behaviour of solutions of Dirichlet problem for second order quasilinear elliptic equation in neighbourhood of edge. We consider the Dirichlet problem for the quasilinear elliptic nondivergence equations of second order in a domain with edges. Barrier functions are constructed for the problem and, by comparison principle, the bound of solution near edges is obtained. Using Kondratjev's method of rings we find bounds for the derivatives of solution in a neighborhood of edges. Moreover, we obtain a priori estimates of the second generalized derivatives (in terms of the Sobolev weighted norm) of solutions.

У даній праці досліджено поведінку розв'язків задачі

$$a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_ix_j} + a(x,u,u_x) = 0, \quad x \in G, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial G \tag{2}$$

в околі ребра межі області $G \subset \mathbb{R}^n$. Тут і далі вважається, що за індексами, котрі повторюються, ведеться сумування від 1 до n. В. О. Кондратьєв у праці [1] дослідив питання регулярності узагальненого розв'язку задачі Діріхле для еліптичних *лінійних* рівнянь другого порядку в областях з ребром на межі. Метою даної праці є виведення за допомогою методики, розробленої в [1]–[4], апріорної оцінки (у ваговій соболєвській нормі) для узагальнених похідних другого порядку розв'язку задачі (1), (2) в околі ребра. Користуючись нагодою, хочу висловити свою подяку доктору фізико-математичних наук М. В. Борсуку за постійну увагу до моєї роботи.

Зробимо такі припущення. Нехай $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, — обмежена область, межа якої $\partial G = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, де Γ_1, Γ_2 — достатньо гладкі $(n-1)$-вимірні поверхні, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2 = \ell$. Припустимо, що початок координат P перебуває на ребрі ℓ і поверхні Γ_1 і Γ_2 в деякому околі $U(P)$ точки P є частинами двох гіперплощин, що перетинаються під кутом $\omega_0 \in (0,\pi)$, причому Γ_1 і Γ_2 в цьому околі є симетричні щодо гіперплощини $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_1 = 0\}$. Це припущення не є обтяжливим, бо в протилежному випадку можна здійснити відповідне дифеоморфне перетворення околу області G. Введемо такі позначення: $x = (y,z)$, де $y = (y_1, y_2) \overset{def}{=} (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}) \overset{def}{=} (x_3, \ldots, x_n)$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35J25.

$r = |y| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $G_a^{b,c} = \{x \in G: 0 \leqslant a < r < b; |x_i| < c, i > 2\}$; $G_a^b \equiv G_a^{b,b}$; $v_x^2 = \sum\limits_{i=1}^n v_{x_i}^2$; $v_{xx}^2 = \sum\limits_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2$; $C^s(\overline{G})$ — банахів простір функцій, котрі мають неперервні похідні на $\overline{G}$ до порядку $s \geqslant 0$ включно, якщо s – ціле, і до порядку $[s]$ включно, якщо s – неціле, та похідні порядку $[s]$ задовольняють умову Гельдера з показником $s - [s]$, $|v|_{k,G}$ — норма елемента $v \in C^k(\overline{G})$; $W^{k,p}(G)$ — соболєвський простір функцій, що складається з тих елементів $L_p(G)$, котрі мають усі узагальнені похідні до порядку k включно, інтегровні по G зі степенем p, $||v||_{k,p;G}$ — норма елемента $v \in W^{k,p}(G)$; $W^{k,p}_{\text{loc}}(\overline{G} \setminus \ell)$ — простір функцій, котрі належать до $W^{k,p}(G')$ для всіх підобластей G' таких, що $\overline{G'} \subset \overline{G} \setminus \ell$; $V^k_{p,\alpha}(G)$ — ваговий соболєвський простір функцій v, для котрих скінченна норма

$$||v||_{V^k_{p,\alpha}(G)} = \left(\iint\limits_G \sum_{|\beta|=0}^{k} |r_x|^{p(|\beta|-k+\alpha/p)} |D^\beta v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \geqslant 0$ — ціле, $p \geqslant 1$, r_x — відстань від точки x до ℓ; $W^k_\alpha(G) \overset{def}{=} V^k_{2,\alpha}(G)$.

Означення. *Розв'язком задачі (1), (2) називається функція $u \in C^0(\overline{G}) \cap W^{2,q}_{\text{loc}}(\overline{G} \setminus \ell)$, $q \geqslant n$, котра задовольняє рівняння (1) майже всюди в G та граничну умову (2).*

Позначимо $\mathfrak{M} = \{(x, v, w)\colon x \in \overline{G},\ u \in \mathbb{R},\ w \in \mathbb{R}^n\}$. Додатково вимагатимемо виконання таких умов:

(A) $a_{ij} \in C^0(\mathfrak{M})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$; *функція $a(x, v, w)$, $x \in G$, $v \in \mathbb{R}$, $w \in \mathbb{R}^n$ є каратеодорівською, тобто вимірною по $x \in G$ для всіх $(v, w) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і неперервною по (v, w) для майже всіх $x \in G$;*

(B) $a_{ij}(0, 0, 0) = \delta_i^j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, *де δ_i^j — символ Кронекера;*

(C) існують числа $\mu > 0$, $\nu > 0$ такі, що виконується нерівність

$$\nu\xi^2 \leqslant a_{ij}(x, v, w)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall(x, v, w) \in \mathfrak{M}$$

(умова рівномірної еліптичності);

(D) існують числа $\beta > -1$, $\mu_1 \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 0$ та функції $f \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ такі, що

$$|a(x, v, w)| \leqslant \mu_1|w|^2 + b(x)|w| + f(x), \quad (x, v, w) \in \mathfrak{M}, \tag{3}$$

причому b^2, $f \in W^0_\alpha(G)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$, $b(x) + f(x) \leqslant k_1|x|^\beta$ для всіх $x \in G$;

(E) коефіцієнти рівняння (1) задовольняють ще такі умови (див. [5]-[8]), котрі разом з умовами (A)-(D) забезпечують апріорну оцінку розв'язку

$$|u|_{1+\gamma_0, G'} \leqslant M_1(G') \tag{4}$$

для довільної гладкої підобласті G' такої, шо $\overline{G'} \subset \overline{G} \setminus \ell$, зі сталими $\gamma_0 \in (0, 1)$ і $M_1(G') > 0$, котрі залежать від величин ν, μ, μ_1, k_1, $M_0 \overset{def}{=} |u|_{0,G}$, β, n, q, $||b^2||_{0,2;G'}$, $||f||_{0,2;G'}$ і відстані від G' до ℓ.

Теорема 1. *Нехай u — розв'язок задачі (1), (2) і виконуються умови (A)-(E). Тоді справедливі оцінки*

$$|u(x)| \leqslant C_0 r^{1+\gamma}, \qquad x \in G_0^{2d}, \tag{5}$$

$$|\nabla u(x)| \leqslant C_0 r^\gamma, \qquad x \in G_0^{2d}, \tag{6}$$

де C_0, d, γ — додатні числа, котрі визначаються величинами n, ω_0, ν, μ, μ_1, β, q, k_1, M_0 і областю G.

Доведення. Спочатку (аналогічно, як в [4]) побудуємо бар'єрну функцію. Згідно з умовою на область, існує число $d > 0$ (без обмеження загальності можна вважати, що $2d < 1$) таке, що

$$G_0^{2d} \subset \{x = (y, z)\colon y_2 > h|y_1|\}, \tag{7}$$

де h — довільне число таке, що $0 < h < \operatorname{ctg}\dfrac{\omega_0}{2}$. Розглянемо тепер таку функцію

$$w(x) \equiv w(y,z) = (y_2^2 - h^2 y_1^2) y_2^{\gamma-1} + \sum_{i=1}^{n-2} |z_i|^{\gamma+2}, \qquad \gamma \in [0,1].$$

Зазначимо кілька її властивостей:

$$w(x) \in C^1(\overline{G_0^{2d}}) \cap C^2(G_0^{2d});$$

$$0 \leqslant w(x) \leqslant (n-1)|x|^{\gamma+1}, \quad x \in G_0^{2d}; \tag{8}$$

$$|\nabla w(x)| \leqslant \big(4(1+h^2) + (n-2)(\gamma+2)^2\big)^{1/2} |x|^\gamma, \quad x \in G_0^{2d}. \tag{9}$$

Крім того, для довільного диференціального оператора

$$L_0 \equiv a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad x \in G_0^{2d},$$

коефіцієнти якого задовольняють умову

$$\nu\xi^2 \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2 \qquad \forall x \in G_0^{2d}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

справджується оцінка

$$L_0 w(x) \leqslant -\frac{\nu h^2}{2} |x|^{\gamma-1}, \qquad x \in G_0^{2d}, \quad \forall \gamma \in (0, \gamma_1], \tag{10}$$

де значення $\gamma_1 \in (0,1)$ визначається величинами ν, μ, h. Справді, властивості (8) і (9) випливають безпосередньо з означення функції w і (7). Для доведення (10) знайдемо значення оператора L_0 на функції w

$$L_0 w(x) = -h^2 y_2^{\gamma-1} \varphi(\gamma) + (\gamma+2)(\gamma+1) \sum_{i=1}^{n-2} a^{(i+2)(i+2)} |z_i|^\gamma,$$

де $\varphi(\gamma) \equiv 2(a^{11} - 2a^{12}t + a^{22}t^2) - (3a^{22} - 4a^{12}t + a^{22}h^{-2})\gamma - a^{22}(h^{-2} - t^2)\gamma^2$, $t \equiv \dfrac{y_1}{y_2}$, $|t| < \dfrac{1}{h}$. Оскільки $\varphi(0) = 2(a^{11}(x) - 2a^{12}(x)t + a^{22}(x)t^2) \geqslant 2\nu$, а функція $\varphi(\gamma)$ — квадратична, то знайдеться число $\gamma_1 > 0$, що залежить лише від ν, μ, h і таке, що $\varphi(\gamma) > \nu$ для всіх $\gamma \in (0, \gamma_1]$. Отже, для $\gamma \in (0, \gamma_1]$ маємо

$$\begin{aligned} L_0 w(x) &\leqslant -\nu h^2 |x|^{\gamma-1} + (\gamma+2)(\gamma+1) \sum_{i=1}^{n-2} a^{(i+2)(i+2)} |z_i|^\gamma \leqslant \\ &\leqslant -\nu h^2 |x|^{\gamma-1} + 2d\mu(\gamma_1+2)(\gamma_1+1)(n-2)|x|^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

звідки випливає (10) при умові, що число d задовольняє нерівність

$$d < \frac{\nu h^2}{4\mu(\gamma_1+2)(\gamma_1+1)(n-2)}. \tag{11}$$

З доведених властивостей функції w випливає, що її можна взяти за бар'єрну функцію.

Перейдемо до доведення нерівностей (5) і (6). Розглянемо лінійний еліптичний оператор

$$L_1 \equiv a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad x \in G_0^{2d},$$

$$\text{де } a^{ij}(x) \equiv a_{ij}(x, u(x), u_x(x)), \qquad a^i(x) \equiv \frac{b(x)u_{x_i}(x)}{|\nabla u(x)|},$$

$b(x)$ — функція з умови (D), вважаючи, що $a^i(x) = 0$ в точках x, для котрих $|\nabla u(x)| = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Введемо допоміжну функцію

$$v(x) = -1 + \exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x)), \qquad x \in G$$

і знайдемо значення оператора L_1 на цій функції

$$L_1 v(x) = \nu^{-1}\mu_1(a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \nu^{-1}\mu_1 a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + b(x)|\nabla u(x)|)\exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x)) =$$
$$= \nu^{-1}\mu_1(-a(x,u,u_x) + \nu^{-1}\mu_1 a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j} + b(x)|\nabla u(x)|)\exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x)).$$

Звідси, враховуючи умову (C) і нерівність (3), $L_1 v(x) \geqslant -\nu^{-1}\mu_1 f(x)\exp(\nu^{-1}\mu_1 u(x))$. Тому одержимо

$$L_1 v(x) \geqslant -\nu^{-1}\mu_1 k_1 |x|^\beta \exp(\nu^{-1}\mu_1 M_0), \qquad x \in G_0^{2d}. \tag{12}$$

Оцінимо зверху значення $L_1 w$, враховуючи (7)–(10) і умови на f, таким чином

$$L_1 w(x) \leqslant -\frac{\nu h^2}{2}|x|^{\gamma-1} + \frac{b(x)}{|\nabla u(x)|}\big[(h^2(1-\gamma)y_1^2 y_2^{\gamma-2} + (1+\gamma)y_2^\gamma)u_{y_2} - 2h^2 y_1 y_2^{\gamma-1}u_{y_1} +$$
$$+(\gamma+2)\sum_{i=1}^{n-2}|z_i|^{\gamma+1}u_{z_i}\big] \leqslant -\frac{\nu h^2}{2}|x|^{\gamma-1} + b(x)\big(2(1+h) + (\gamma_1+2)(n-2)2d\big)|x|^\gamma \leqslant$$
$$\leqslant \left(-\frac{\nu h^2}{2} + (2(1+h) + (\gamma_1+2)(n-2))k_1(2d)^{\beta+1}\right)|x|^{\gamma-1}, \qquad x \in G_0^{2d}, \quad \gamma \in (0, \gamma_1].$$

Нехай тепер число d задовольняє нерівність

$$(2d)^{\beta+1} < \frac{\nu h^2}{4(2(1+h) + (\gamma_1+2)(n-2))k_1}. \tag{13}$$

Тоді

$$L_1 w(x) \leqslant -\frac{1}{4}\nu h^2 |x|^{\gamma-1}, \qquad x \in G_0^{2d}. \tag{14}$$

Виберемо число $\mathcal{A}$ таке, що виконується нерівність

$$\mathcal{A} \geqslant 4k_1\mu_1\nu^{-2}h^{-2}d^{\beta+1-\gamma}\exp(\nu^{-1}\mu_1 M_0), \tag{15}$$

вважаючи при цьому, що $0 < \gamma \leqslant \min(\gamma_1, \beta + 1)$. Тоді з (12) та (14) дістаємо

$$L_1(\mathcal{A}w(x)) \leqslant L_1 v(x), \qquad x \in G_0^{2d}.$$

Порівняємо тепер функції v та w на ∂G_0^{2d}. Перш за все

$$\mathcal{A}w(x) \geqslant 0 = v(x), \qquad x \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \partial G_0^{2d}.$$

Водночас, як доведено в [7] (див. наслідок 2.2), u неперервна за Гельдером та $|u(x)| \leqslant M_2|x|^{\gamma_0}$, $x \in \overline{G}$, де $\gamma_0 \in (0,1)$ визначається величинами n, ν^{-1}, μ та областю G, а M_2 — тими самими величинами, а також M_0, k_1, μ_1, β. Отже, скориставшись відомою нерівністю $e^t - 1 \leqslant t/(1-t)$ при $t < 1$ маємо

$$v(x) \leqslant -1 + \exp(\nu^{-1}\mu_1 M_2 (2d)^{\gamma_0}) \leqslant 2\nu^{-1}\mu_1 M_2 (2d)^{\gamma_0}, \qquad x \in G_0^{2d}, \tag{16}$$

якщо число d виберемо настільки малим, що виконується нерівність

$$d < \frac{(2\nu^{-1}\mu_1 M_2)^{-1/\gamma_0}}{2}. \tag{17}$$

Далі, оцінюємо наші функції на бічній поверхні циліндричної частини межі області G_0^{2d}, тобто на $\Omega_{2d} \equiv \{x \in G_0^{2d} : r = 2d\}$. Для цього перейдемо до циліндричної системи координат

$$y_1 = r\cos\omega, \quad y_2 = r\sin\omega, \quad z = z; \qquad 0 \leqslant \omega < 2\pi;$$

тоді $w(x) = r^{\gamma+1}(\sin\omega)^{\gamma-1}(\sin^2\omega - h^2\cos^2\omega) + \sum\limits_{i=1}^{n-2}|z_i|^{\gamma+2}$. Крім того, для $x \in \overline{G_0^{2d}}$ справджується $0 < \dfrac{\pi - \omega_0}{2} \leqslant \omega \leqslant \dfrac{\pi + \omega_0}{2}$ і $\sin^2\omega > h^2\cos^2\omega$, тому

$$\begin{aligned} w(x) &\geqslant (2d)^{1+\gamma}(\sin\omega)^{\gamma-1}(\sin^2\omega - h^2\cos^2\omega) \geqslant \\ &\geqslant (2d)^{1+\gamma}\sin^{\gamma}\left(\frac{\pi-\omega_0}{2}\right)\left(\sin^2\left(\frac{\pi-\omega_0}{2}\right) - h^2\cos^2\left(\frac{\pi-\omega_0}{2}\right)\right) = \\ &= (2d)^{1+\gamma}\cos^{\gamma}(\omega_0/2)\bigl(\cos^2(\omega_0/2) - h^2\sin^2(\omega_0/2)\bigr) \geqslant \\ &\geqslant (2d)^{1+\gamma_1}\cos^{\gamma_1}(\omega_0/2)\bigl(\cos^2(\omega_0/2) - h^2\sin^2(\omega_0/2)\bigr) > 0, \qquad x \in \Omega_{2d}. \end{aligned} \tag{18}$$

Беручи число $\mathcal{A}$ настільки великим, щоб виконувалася нерівність

$$\mathcal{A} \geqslant 2\mu_1\nu^{-1}M_2(2d)^{\gamma_0-\gamma_1-1}\cos^{-\gamma_1}(\omega_0/2)\bigl(\cos^2(\omega_0/2) - h^2\sin^2(\omega_0/2)\bigr)^{-1}, \tag{19}$$

з (16) і (18) одержимо

$$\mathcal{A}w(x) \geqslant v(x), \qquad x \in \Omega_{2d}.$$

Залишилося порівняти функції $w(x)$ і $v(x)$ на поверхнях $K_i^{\pm} \equiv \{x \in \partial G_0^{2d} : z_i = \pm 2d\}$, $(i = 1, \dots, n-2)$. Для них маємо

$$w(x) = r^{\gamma+1}(\sin\omega)^{\gamma-1}(\sin^2\omega - h^2\cos^2\omega) + \sum_{i=1}^{n-2} z_i^{\gamma+2} \geqslant (2d)^{\gamma+2} \geqslant (2d)^{\gamma_1+2}, \qquad x \in K_i^{\pm}$$

$(i = 1, \dots, n-2)$. Тому, якщо $\mathcal{A}$, задовольняє ще умові

$$\mathcal{A} \geqslant 2\nu^{-1}\mu_1 M_2 (2d)^{\gamma_0-\gamma_1-2}, \tag{20}$$

то

$$\mathcal{A}w(x) \geqslant v(x), \qquad x \in K_i^{\pm} \quad (i = 1, \dots, n-2).$$

Таким чином, якщо число d вибране згідно з (7), (11), (13), (17), число $\mathcal{A}$ згідно з (15), (19), (20), то маємо

$$L_1 v(x) \geqslant L_1(\mathcal{A}w(x)), \quad x \in G_0^{2d}; \quad v(x) \leqslant \mathcal{A}w(x), \quad x \in \partial G_0^{2d}$$

і можна застосувати принцип порівняння [9] (§3.1, 9.1), з якого випливає, що $v(x) \leqslant \mathcal{A}w(x)$, $x \in \overline{G_0^{2d}}$. Повертаючись до функції $u(x)$, одержимо

$$u(x) = \nu\mu^{-1}\ln(1 + v(x)) \leqslant \nu\mu_1 \ln(1 + \mathcal{A}w(x)) \leqslant \mathcal{A}\nu\mu^{-1}w(x), \qquad x \in \overline{G_0^{2d}}.$$

Так само доводиться оцінка знизу $u(x) \geqslant -\mathcal{A}\nu\mu^{-1}w(x)$, $x \in \overline{G_0^{2d}}$, якщо за допоміжну взяти функцію $v(x) = 1 - \exp(-\nu^{-1}\mu_1 u(x))$. Звідси випливає оцінка

$$|u(x)| \leqslant C_0|x|^{\gamma+1}, \qquad x \in G_0^{2d}.$$

Тепер доведемо (5) і (6) методом кілець Кондратєва, спираючись на результати [7] для гладких областей. Нехай $x^0 \in \overline{G_0^d}$ — довільна точка ребра, тобто $x^0 = (0, z^0)$, $|z_i^0| \leqslant d$ $(i = 1, \dots, n-2)$. Нехай $\rho \in (0, d)$ і розглянемо множини $G_\rho^{2\rho}(z_0) \equiv \{x \in \overline{G_0^{2d}}\colon \rho \leqslant r \leqslant 2\rho; |z_i - z_i^0| \leqslant 2\rho, i = 1, \dots, n-2\}$. Зробимо у рівнянні (1) заміну змінних

$$y = \rho y', \quad z - z^0 = \rho(z' - z^0).$$

Функція $v(x') = \rho^{-1-\gamma}u(\rho y', \rho z' + (1-\rho)z^0)$ в шарі $G_1^2(z^0)$ задовольняє рівняння

$$a^{ij}(x')v_{x_i' x_j'} = F(x'), \qquad x' \in G_1^2(z^0),$$

де

$$a^{ij}(x') \equiv a_{ij}(\rho y', \rho z' + (1-\rho)z^0, \rho^{1+\gamma}v(x'), \rho^{\gamma}v_{x'}(x'));$$
$$F(x') \equiv -\rho^{1-\gamma}(a(\rho y', \rho z' + (1-\rho)z^0, \rho^{1+\gamma}v(x'), \rho^{1+\gamma}v_{x'}(x')).$$

На підставі припущення (C)

$$\operatorname{vrai}\max_{G_1^2(z^0)} |v| + \operatorname{vrai}\max_{G_1^2(z^0)} |\nabla' v| \leqslant M_1.$$

При цьому M_1 визначається лише величинами ν, μ, μ_1, k_1, M_0, β, n, q, $||b^2||_{0,2;G_1^2(z^0)}$, $||f||_{0,2;G_1^2(z^0)}$, G. Оскільки M_1 залежить від своїх аргументів неперервно (див. [7], стор. 67) то існує C, котре визначається лише величинами ν, μ, μ_1, k_1, M_0, β, γ, n, q, $||b^2||_{0,2;G}$, $||f||_{0,2;G}$, G, що $M_1 < C$ для всіх z^0. Повертаючись до попередніх змінних одержимо $|u(x)| \leqslant C\rho^{\gamma+1}$ і $|\nabla u(x)| \leqslant C\rho^{\gamma}$, $x \in G_\rho^{2\rho}(z^0)$, $\rho \in (0, d)$. Покладаючи $r = \frac{3}{2}\rho$, одержимо $|u(x)| \leqslant C_0 r^{\gamma+1}$ і $|\nabla u(x)| \leqslant C_0 r^{\gamma}$, $x \in \tilde{G}(z^0)$, де $\tilde{G}(z^0) \equiv \{x \in \overline{G_0^{2d}}\colon 0 \leqslant |z_i - z_i^0| \leqslant r \leqslant 2d, i = 1, \dots, n-2\}$. Оскільки C_0 не залежать від z^0 одержимо (5) і (6) у всій області G_0^{2d}. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай u — розв'язок задачі (1), (2) і виконуються умови теореми 1. Тоді $u \in W_\alpha^2(G_0^d)$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ для деякого $d > 0$ та справедлива оцінка*

$$\iint\limits_{G_0^d} \left(r^\alpha u_{xx}^2 + r^{\alpha-2}u_x^2 + r^{\alpha-4}u^2\right) dx \leqslant C \iint\limits_{G_0^{2d}} \left(u^2(x) + u_x^2 + r^\alpha(b^2(x) + f^2(x))\right) dx, \tag{21}$$

де $C > 0$ — стала, котра залежить тільки від n, ν, μ, μ_1, β, q, k_1, M_0, C_0, G.

Доведення. Оскільки функції $a_{ij}(x, v, w)$ неперервні, то можемо записати, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$|a_{ij}(x, v, w) - a_{ij}(0,0,0))| < \varepsilon, \tag{22}$$

як тільки $|x| + |v| + |w| < \delta(\varepsilon)$. Остання нерівність виконується завдяки (5) та (6), для всіх $x \in G_0^{2d}$, якщо d настільки мале, що крім умов, необхідних для виконання теореми 1, вимагатимемо

$$(n-1)^{1/2} 2d + C_0(2d)^{\gamma+1} + C_0(2d)^{\gamma} < \delta(\varepsilon). \tag{23}$$

Нехай $\rho \in (0, d/2)$ і $\eta(x)$ — зрізаюча функція, така що $\eta(x) \equiv 1$ при $x \in G_\rho^{2\rho,d}$, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ при $x \in G_{\rho/2}^{4\rho,2d} \setminus G_\rho^{2\rho,d}$ і $\eta(x) \equiv 0$ при $x \notin G_{\rho/2}^{4\rho,2d}$. Запишемо тепер рівняння (1) у вигляді

$$-\Delta w(x) = F_1(x) \tag{24}$$

де $w(x) = u(x)\eta(x)$, а

$$F_1(x) = [a_{ij}(x, u, u_x) - a_{ij}(0,0,0)] w_{x_i x_j} + a(x, u, u_x)\eta - a_{ij}(x, u, u_x)(2u_{x_i}\eta_{x_j} + u\eta_{x_i x_j}).$$

Зробимо в рівнянні (24) заміну змінних

$$y = \rho y', \quad z = z'.$$

Функція $v(x') = w(\rho y', z')$ в шарі $G_{1/2}^{4,2d}$ задовольняє рівняння

$$-\sum_{i=1}^{2} v_{y_i' y_i'} - \rho^2 \sum_{i=1}^{n-2} v_{z_i' z_i'} + Mv(x) = F^1(x') + Mv(x),$$

де $F^1(x') = \rho^2 F_1(\rho y', z')$, $M > 0$ — деяке число. Для цього рівняння можна застосувати теорему 2 [10], якщо M — достатньо велике ($M \geqslant M^0$, M^0 залежить від ν, μ G. За цією теоремою

$$\iint\limits_{G_{1/2}^{4,2d}} \left(\sum_{i=1}^{2} v_{y_i' y_i'}^2 + \rho^4 \sum_{i=1}^{n-2} v_{z_i' z_i'}^2 \right) dy' dz' \leqslant C_1 \iint\limits_{G_{1/2}^{4,2d}} (\rho^4 F_1^2 + M^2 v^2(x)) dy' dz',$$

де $C_1 > 0$ залежить від ν, μ, G. Повернемося до попередніх змінних:

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} \left(\sum_{i=1}^{2} w_{y_i y_i}^2 + \sum_{i=1}^{n-2} w_{z_i z_i}^2 \right) dy dz \leqslant C_2 \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} (F_1^2 + \rho^{-4} w^2(x)) dy dz.$$

Крім того, $||w_{xx}||_{0,2;G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} = ||\Delta w||_{0,2;G_{\rho/2}^{4\rho,2d}}$ (див. наслідок 9.10 [9]), тому

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} w_{xx}^2 dx \leqslant C_3 \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} ([a_{ij}(x, u, u_x) - a_{ij}(0,0,0)]^2 w_{x_i x_j}^2 + a^2\eta^2 + u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + \rho^{-4} w^2(x)) dx.$$

Візьмемо в (22) ε таким, щоб $\varepsilon^2 C_3 < \frac{1}{2}$. Тоді, враховуючи (3), здобудемо

$$\iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} w_{xx}^2 dx \leqslant C_4 \iint\limits_{G_{\rho/2}^{4\rho,2d}} (u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + u_x^4\eta^2 + (b^4(x) + f^2(x))\eta^2 + \rho^{-4} w^2(x)) dx.$$

Беручи до уваги властивості зрізаючої функції і те, що $\rho/2 \leqslant r \leqslant 4\rho$ в області $G^{4\rho,2d}_{\rho/2}$, одержимо

$$\iint\limits_{G^{2\rho,d}_{\rho}} r^\alpha u^2_{xx} dx \leqslant C_5 \iint\limits_{G^{4\rho,2d}_{\rho/2}} (r^{\alpha-2}u^2_x + r^\alpha u^4_x + r^{\alpha-4}u^2 + b^4(x) + f^2(x))dx. \tag{25}$$

Оскільки з (5) і (6) маємо

$$\iint\limits_{G^{2d}_0} (r^{\alpha-2}u^2_x + r^\alpha u^4_x + r^{\alpha-4}u^2)dx \leqslant C_6 \int\limits_0^{2d} (r^{\alpha+2\gamma-1} + r^{\alpha+4\gamma+1})dr < \infty,$$

то покладаючи в (25) $\rho = 2^{-k}d$ можна підсумувати (25) за всіма $k = 1, 2, \ldots$. Звідси одержимо $u \in W^2_\alpha(G^d_0)$.

Розглянемо тепер рівняння (24) з $w = u\eta$, де $\eta(x)$ — зрізаюча функція, така що $\eta(x) \equiv 1$ при $x \in G^d_0$, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ при $x \in G^{2d}_0 \setminus G^d_0$, і $\eta(x) \equiv 0$ при $x \notin G^{2d}_0$, причому $F_1 \in W^0_\alpha(G^{2d}_0)$. Для цього рівняння застосуємо оцінки (27) і (33) теореми 1а [1]

$$\iint\limits_{G^{2d}_0} (r^\alpha (u\eta)^2_{yz} + r^{\alpha-2}(u\eta)^2_z)dx \leqslant C_7 \iint\limits_{G^{2d}_0} r^\alpha F^2_1 dx;$$

тут $C_7 > 0$ залежить від ν, n, α, M_0, ω_0. В наших позначеннях, враховуючи умови (C) і (3),

$$\begin{aligned}\iint\limits_{G^{2d}_0} (r^\alpha (u\eta)^2_{yz} + r^{\alpha-2}(u\eta)^2_z)dx \leqslant C_8 \iint\limits_{G^{2d}_0} r^\alpha \Big([a_{ij}(x,u,u_x) - a_{ij}(0,0,0)]^2 (u\eta)^2_{x_ix_j} + \\ + u^2_x\eta^2_x + u^2\eta^2_{xx} + u^4_x\eta^2 + b^4(x)\eta^2 + f^2(x)\eta^2\Big)\, dx,\end{aligned} \tag{26}$$

де $C_8 > 0$ залежить від C_6, μ, μ_1, q, k_1. Далі розглянемо довільний переріз області G^{2d}_0 площиною $z = \mathrm{const}$ і позначимо його через $G^{2d}_0(z)$. Розглянемо на цьому перерізі рівняння, що відповідає (1)

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,u,u_x)(u\eta)_{y_iy_j} = F_2(x),$$

де

$$F_2(x) = \sum_{i=1,j=3}^{n} a_{ij}(x,u,u_x)(u\eta)_{x_ix_j} - a(x,u,u_x)\eta + a_{ij}(x,u,u_x)(2u_{x_i}\eta_{x_j} + u\eta_{x_ix_j}).$$

На підставі теореми про гладкість розв'язку в околі кутової точки (теорема 4 [3]) одержуємо

$$\begin{aligned}\iint\limits_{G^{2d}_0(z)} (r^{\alpha-2}(u\eta)^2_y + r^{\alpha-4}(u\eta)^2)dy \leqslant C_9 \iint\limits_{G^{2d}_0(z)} (u^2\eta^2 + (u\eta)^2_{yz} + \\ + u^2_x\eta^2_x + u^2\eta^2_{xx} + r^\alpha(b^4(x) + f^2(x))\eta^2)dy,\end{aligned}$$

де C_9 — додатна константа, що залежить від величин n, ν, μ, μ_1, β, q, k_1, M_0, M_1, G. Зінтегрувавши цю нерівність за всіма z, одержимо

$$\iint\limits_{G_0^{2d}} (r^{\alpha-2}(u\eta)_y^2 + r^{\alpha-4}(u\eta)^2)dydz \leqslant C_9 \iint\limits_{G_0^{2d}} \big(u^2\eta^2 + (u\eta)_{yz}^2 + \\ + u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + r^\alpha(b^4(x) + f^2(x))\eta^2\big)dydz.$$

Ця нерівність разом з нерівностями (22) і (26) дає

$$\iint\limits_{G_0^{2d}} (r^\alpha(u\eta)_{xx}^2 + r^{\alpha-2}(u\eta)_x^2 + r^{\alpha-4}(u\eta)^2)dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{10} \iint\limits_{G_0^{2d}} \Big(u^2\eta^2 + r^\alpha(\varepsilon^2(u\eta)_{x_ix_j}^2 + u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + u_x^4\eta^2 + b^4(x)\eta^2 + f^2(x)\eta^2)\Big)\,dx.$$

Тоді з врахуванням (6) маємо

$$\iint\limits_{G_0^{2d}} (r^\alpha(u\eta)_{xx}^2 + r^{\alpha-2}(u\eta)_x^2 + r^{\alpha-4}(u\eta)^2)dx \leqslant C_{11} \iint\limits_{G_0^{2d}} \big(\varepsilon^2 r^\alpha(u\eta)_{xx}^2 + u^2\eta^2 + \\ + r^{\alpha-2}(n-1)^{\gamma+1}(2d)^{2\gamma+2}u_x^2\eta^2 + r^\alpha(u_x^2\eta_x^2 + u^2\eta_{xx}^2 + b^4(x)\eta^2 + f^2(x)\eta^2)\big)\,dx.$$

Візьмемо тепер ε і d такими, щоб виконувалися нерівності

$$\varepsilon < (2C_{11})^{-1/2}, \quad d < \frac{1}{2}(n-1)^{-1/2}(2C_{11})^{-1/(2\gamma+2)}. \tag{27}$$

Тоді, враховуючи властивості зрізки і те, що $\alpha \geqslant 0$, одержимо, що, коли d задовольняє (23), (27), а також умови (7), (11), (13), (17), то виконується (21). Теорему 2 доведено.

1. Кондратьев В. А. *О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области*// Дифференц. уравн. – 1970. – Т. 6, N 10. – С. 1831-1843.
2. Борсук М. В. *Неулучшаемые оценки решений задачи Дирихле для линейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы*// Матем. сб. – 1991. – Т. 182, N 10. – С. 1446-1462.
3. Борсук М. В. *Оценки решений задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического недивергентного уравнения второго порядка вблизи угловой граничной точки*// Алгебра и анализ. – 1991. – Т. 3, N 6. – С. 85-107.
4. Борсук М. В. *Оценки решений задачи Дирихле для эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в окрестности конической точки границы*// Дифференц. уравн. – 1994. – Т. 30, N 1. – С. 104-108.
5. Cordes H. O. *Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen*// Math. Ann. – 1956. – Vol. 131. – P. 278-312.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М., Наука, 1973.

7. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. *Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности*// Успехи матем. наук. – 1986. – Т. 41, Вып. 5. – С. 59-83.
8. Lieberman G. M. *The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations with continiosly differentiable boundary data* // Comm. Partial Differential Equations. – 1986. – Vol. 11, N 2. – P. 167-229.
9. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М., Наука, 1989.
10. Трескунов А. Л. *Точные оценки в L_p для одного класса вырождающихся уравнений 2-го порядка эллиптического типа*// Записки научных семинаров ЛОМИ. Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, I. – 1967. – Т. 5.

Стаття надійшла до редколегії 12.01.98

УДК 517.95

СИСТЕМИ ПАРАБОЛІЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

О. М. Бугрій

Buhrii O. M. System of parabolic variational inequalities without initial conditions in an unbounded domain. Some system of parabolic variational inequalities without initial conditions in an unbounded (with respect to all variables) domain is studied. The existence and uniqueness conditions of the solution are obtained. Behaviour of solution is $e^{\mu t}, \mu > 0$ if $t \to -\infty$ and $e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$ if $|x| \to +\infty$.

Задачі без початкових умов для еволюційних рівнянь та систем досліджувалися раніше багатьма авторами [1] – [8], [13]. Зокрема, варіаційні нерівності без початкових умов у класах обмежених, періодичних або майже періодичних за часом функцій розглянуто у [9],[10]. У даній праці досліджено систему параболічних варіаційних нерівностей у необмеженій (за просторовими і часовою змінними) циліндричній області. Отримано умови існування та єдиності розв'зку нерівності у класі функцій, котрі можуть зростати як $e^{\mu t}, \mu > 0$ при $t \to -\infty$, і як $e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$ при $|x| \to +\infty$. Зазначимо, що аналогічні дослідження для інших параболічних нерівностей та їх систем проведено раніше у [11],[12].

Нехай $\Omega \subset R^n$ – необмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$. Позначимо $\Omega_T = \{(x,t)|t = T, x \in \Omega\}$; $Q_T = \Omega \times (-\infty, T], T < +\infty$; $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$ для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$; $u(x,t), F(x,t)$ – вектори з R^N, $A_{ij}(x,t), B_i(x,t)(i,j = \overline{1,n}), C(x,t)$ – квадратні матриці розміру $N \times N$;

$$L^{2,N}(\Omega) = \prod_{i=1}^{N} L^2(\Omega), \quad H^{1,N}(\Omega) = \prod_{i=1}^{N} H^1(\Omega),$$

$$\overset{o}{H}{}^{1,N} = \{w \in H^{1,N}(\Omega) \,|\, w(x) = 0, x \in \partial\Omega\},$$

$$L^2_{\text{loc}}((-\infty, T]; B) = \{u(x,t) \,|\, u \in L^2([t_0, T]; B), \text{ майже для усіх } t_0 \in (-\infty, T]\},$$

де B – банахів простір.

Нехай V – замкнений підпростір, $\overset{o}{H}{}^{1,N}(\Omega) \subset V \subset H^{1,N}(\Omega)$; K – опукла замкнена множина в V, котра містить нульовий елемент;

$$W = \{w(x,t) \,|\, w \in L^2_{\text{loc}}((-\infty, T]; V), w_t \in L^2_{\text{loc}}((-\infty, T]; V^*)\}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35K85.

Розглянемо задачу про знаходження функції $u(x,t)$, котра задовольняє включенням

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u \in C((-\infty,T];L^{2,N}(\Omega)) \cap L^2((-\infty,T];V),$$

$u \in W, u \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty,T]$, і варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(v_t, v-u) + \sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)u_{x_i}, v_{x_j} - u_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(\tilde{B}_i(x,t)u_{x_i}, v-u) +$$

$$+ (C(x,t)u, v-u) + \mu|v-u|^2 - (F(x,t), v-u)\Big] e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega t_1} |v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_1}\,dx, \tag{1}$$

де $\tilde{B}_i(x,t) = B_i(x,t) - 2\lambda \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x,t)\frac{x_i}{|x|}$, для довільних $t_1, t_2 \in (\infty, T]$, $t_1 < t_2$ і для довільних функцій $v \in W$, $v \in K$ майже для всіх $t \in (\infty, T]$.

Накладемо на коефіцієнти нерівності (1) такі умови:

(A): кофіцієнти матриць $A_{ij}(x,t)$, $(i,j=\overline{1,n})$, належать простору $L^\infty(Q_T)$; $A_{ij}(x,t) = A_{ji}(x,t)$, $(i,j=\overline{1,n})$;

$$\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}(x,t)\xi^i, \xi^j) \geqslant a_0 \sum_{i=1}^{n}|\xi^i|^2, \quad a_0 > 0,$$

майже скрізь в Q_T і для всіх $\xi^i \in R^N, (i=\overline{1,n})$;

(B): елементи матриць $B_i(x,t)$, $(i=\overline{1,n})$, належать простору $L^\infty(Q_T)$;

(C): елементи матриці $C(x,t)$ належать простору $L^\infty(Q_T)$,

$$(C(x,t)\xi, \xi) \geqslant c_0|\xi|^2, \ \ c_0 > 0$$

майже скрізь в Q_T і для всіх $\xi \in R^N$.

Сформулюємо і доведемо тепер теореми існування та єдиності розв"язку варіаційної нерівності (1).

Теорема 1 (теорема єдиності). *Нехай для коефіцієнтів нерівності (1) виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**. *Тоді нерівність (1) не може мати більше одного розв'язку, котрий справджує умову*

$$\lim_{t\to+0}\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)e^{-2\lambda|x|+\alpha_0 t}\,dx = 0, \ \alpha_0 = \frac{4a_0c_0 - b_0}{2a_0},$$

де $b_0 = \sup\limits_{Q_T}\sum\limits_{i=1}^{n}\|\tilde{B}_i(x,t)\|^2$.

Доведення. Нехай $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$ – розв'язки нерівності (1). Визначимо оператор A рівністю

$$\langle Au, ve^{-2\lambda|x|}\rangle(t) = \int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}u_{x_i}, v_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n}(\tilde{B}_i u_{x_i}, v) + (Cu, v)\Big]e^{-2\lambda|x|}\,dx.$$

Очевидно, що оператор A є обмеженим оператором. Крім того,

$$\langle Au - Av, (u-v)e^{-2\lambda|x|}\rangle(t) = \int\limits_{\Omega_t} \Bigg[\sum_{i,j=1}^{n} (A_{ij}(u_{x_i} - v_{x_i}), u_{x_j} - v_{x_j}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (\tilde{B}_i(u_{x_i} - v_{x_i}), u - v) + (C(u-v), u-v) \Bigg] e^{-2\lambda|x|}\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega_t} \Bigg[\left(a_0 - \frac{b_0 \delta_0}{2} \right) \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i} - v_{x_i}|^2 +$$

$$+ \left(c_0 - \frac{1}{2\delta_0} \right) |u-v|^2 \Bigg] e^{-2\lambda|x|}\, dx = \frac{\alpha_0}{2} \int\limits_{\Omega_t} |u-v|^2 e^{-2\lambda|x|}\, dx. \tag{2}$$

Розглянемо деякі функції $u(x,t)$, $h(x,t)$, для котрих $u_t = h(x,t)$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (v_t - h, v - u)\, e^{-2\lambda|x| + 2\mu t}\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (v_t - u_t, v-u)\, e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\, dx\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} |v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} |v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\, dx - \mu \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |v-u|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\, dx\, dt.$$

Покладемо тут $u = u_i$, $h = f_i$, $(i = 1,2)$, $v = \dfrac{u_1 + u_2}{2}$, тобто, $v - u_1 = (u_2 - u_1)/2$, $v - u_2 = (u_1 - u_2)/2$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} (f_1 - f_2, u_1 - u_2) e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\, dx\, dt = \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} ((v_t - f_2) - (v_t - f_1), u_1 -$$

$$- u_2)\, e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\, dx\, dt \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_2}} |u_1 - u_2|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_{t_1}} |u_1 - u_2|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_1}\, dx - \mu \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u_1 - u_2|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\, dx\, dt. \tag{3}$$

Покладемо в (3) $f_i = F - Au^{(i)}$, $u_i = u^{(i)}$, $(i = 1,2)$. Тоді

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle Au^{(1)} - Au^{(2)}, (u^{(1)} - u^{(2)}) e^{-2\lambda|x|} \rangle e^{2\mu t}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \int\limits_{\Omega} |u^{(1)} - u^{(2)}|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\, dx\, dt - \mu \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} |u^{(1)} - u^{(2)}|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\, dx\, dt \leqslant 0.$$

Звідси і з оцінки (2), позначивши через

$$y(t) = \int\limits_{\Omega_t} |u^{(1)} - u^{(2)}|^2 e^{-2\lambda|x|}\, dx,$$

отримаємо, що

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(y' - \alpha_0 y\Big) e^{2\mu t}\, dt \leqslant 0$$

для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty, T]$, $t_1 < t_2$. Тому $y' - \alpha_0 y \leqslant 0$. Домноживши останню нерівність на $e^{\alpha_0 t}$, запишемо ії у вигляді $(e^{\alpha_0 t} y)' \leqslant 0$. Після інтегрування за t по довільному відрізку $[t_1, t_2] \subset (\infty, T]$ отримаємо, що $e^{\alpha_0 t_2} y(t_2) \leqslant e^{\alpha_0 t_1} y(t_1)$. Але вираз $e^{\alpha_0 t_1} y(t_1)$ прямує до нуля при $t \to +0$. Отже, $y(t_2) \leqslant 0$ майже скрізь на $(\infty, T]$. Але $y(t) \geqslant 0$ для всіх $t \in (\infty, T]$. Тоді $y(t) = 0$ майже всюди на $(\infty, T]$. Тому $u^{(1)}(x,t) = u^{(1)}(x,t)$ майже всюди в Q_T.

Теорема 2 (теорема існування). *Нехай виконуються всі умови теореми 1 і разом з тим елементи матриць A_{ij}, B_i, $(i,j = \overline{1,n})$, C та функція F є неперервні по t майже для усіх $x \in \Omega$.*

Якщо при $\alpha_0 - 2\mu > 0$

$$M_1 = \int\limits_{Q_\tau} |F|^2 e^{-2\lambda|x| + 2\mu t}\, dx\, dt < \infty, \tau \in (-\infty, T],$$

а при $\alpha_0 - 2\mu \leqslant 0$

$$M_2 = \int\limits_{Q_T} |F|^2 e^{-2\lambda|x| + (\alpha_0 - \varkappa)t}\, dx\, dt < \infty, \quad \varkappa > 0,$$

то існує розв'язок $u(x,t)$ варіаційної нерівності (1).

Доведення. Розглянемо в $Q_{t_0,T}$ задачу

$$u_t + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon} B(u) = F_{t_0}, \tag{4}$$

$$u(x, t_0) = 0, \quad t_0 \in (\infty, T], \tag{5}$$

де $\varepsilon > 0$, $B(u) = J(u - P_k(u))$, J – оператор двоїстості між V і V^*, P_k – оператор проектування на K,

$$F_{t_0}(x,t) = \begin{cases} F(x,t), & (x,t) \in Q_{t_0,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{0,t_0}. \end{cases}$$

Зазначимо, що оператор B є обмеженим, монотонним і неперервним оператором ([9], стор. 384). За теоремою 1.2 ([9], стор. 173) існує функція $u(x,t)$, яка є розв'язком задачі (5), (6) в $Q_{t_0,T}$ і яка справджує включення $e^{-\lambda|x|} u \in L^2((t_0,T); V)$, $e^{-\lambda|x|} u_t \in L^2((t_0,T); V^*)$.

Вибираючи тепер послідовно $t_0 = T-1, T-2, \ldots, T-k, \ldots$, отримаємо послідовність функцій $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$, котрі є розв'язками задач (4), (5). Продовжимо кожну функцію $u^{k,\varepsilon}(x,t)$ нулем в область Q_{T-k}. Тоді для довільних k і $\tau \in (\infty, T]$ справджується рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[(u_t^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon})+\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}u_{x_i}^{k,\varepsilon},u_{x_j}^{k,\varepsilon})+\sum_{i=1}^{n}(\tilde B_i u_{x_i}^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon})+$$

$$+(Cu^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon})-(F,u^{k,\varepsilon})\Big]e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\langle Bu^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon}e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\mu t}\,dt=0.$$

Звідси

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{k,\varepsilon}|^2e^{-2\lambda|x|+2\lambda\tau}\,dx+\int\limits_{Q_\tau}\Big[\Big(a_0-\frac{b_0\delta_0}{2}\Big)\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^{k,\varepsilon}|^2+\Big(c_0-\frac{1}{\delta_0}-\mu-$$

$$-\frac{\varkappa_0}{2}\Big)|u^{k,\varepsilon}|^2\Big]e^{-2\lambda|x|+2\lambda t}\,dx\,dt+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\langle Bu^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon}e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\lambda t}\,dt\leqslant C_1M_1. \qquad (6)$$

Нехай

$$y(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}d\tau\int\limits_{\Omega_\tau}|u^{k,\varepsilon}(x,t)|^2e^{-2\lambda|x|+2\lambda t}\,dx.$$

Тоді, $y'(\tau)+(\alpha_0-2\mu-\varkappa)y(\tau)\leqslant C_1M_1$.
Розглянемо два випадки
а) $\alpha_0-2\mu>0$. Тоді з (6) легко отримуємо оцінки:

$$\int\limits_{\Omega T}|u^{k,\varepsilon}(x,\tau)|^2e^{-2\lambda|x|+2\mu\tau}\,dx\leqslant\mu_1M,\ \ \tau\in(-\infty,T],$$

$$\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^{k,\varepsilon}(x,t)|^2+|u^{k,\varepsilon}(x,t)|^2\Big]e^{-2\lambda|x|+2\lambda t}\,dx\,dt\leqslant\mu_1M,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{T}\langle Bu^{k,\varepsilon},u^{k,\varepsilon}e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\lambda t}\,dt\leqslant\mu_1\varepsilon M. \qquad (7)$$

б) $\alpha_0-2\mu\leqslant0$. В цьому випадку

$$\Big(e^{(\alpha_0-2\lambda-\varkappa)\tau}y(\tau)\Big)'\leqslant\frac{1}{2\varkappa}e^{(\alpha_0-2\lambda-\varkappa)\tau}\int\limits_{Q_\tau}|F|^2e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt\leqslant C_2M_2.$$

Тому можна отримати такі ж оцінки (7), лише замість M_1 буде M_2.
Отже, існує підпослідовність послідовності $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$ (збережемо для цієї підпослідовності позначення $\{u^{k,\varepsilon}(x,t)\}$) така, що

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{k,\varepsilon}(x,t)\to e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{\varepsilon}(x,t)\quad *-\text{ слабко в } L^\infty((\infty,T];L^{2,N}(\Omega));$$

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{k,\varepsilon}(x,t)\to e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{\varepsilon}(x,t)\quad\text{слабко в } L^2((-\infty,T];V).$$

Тоді функція $u^\varepsilon(x,t)$ є розв'язком рівняння

$$u_t + A(t)u + \frac{1}{\varepsilon}B(u) = F(x,t), \tag{8}$$

справджує включення

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^\varepsilon \in L^\infty((\infty,T];L^2(\Omega)), e^{-\lambda|x|+\mu t}u^\varepsilon \in L^2((-\infty,T];V),$$
$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^\varepsilon_t \in L^2((-\infty,T];V^*),$$

і для неї виконуються оцінки (7).

Нехай $v \in W$, $v \in K$ майже для всіх $t \in (-\infty,T]$. Оскільки $B(v) = 0$, то з (8) і монотонності оператора B отримаємо, що

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Big[(v_t, v-u^\varepsilon) + \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}u^\varepsilon_{x_i}, v_{x_j} - u^\varepsilon_{x_j}) + \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i u^\varepsilon_{x_i}, v-u^\varepsilon) + (Cu^\varepsilon, v-u^\varepsilon) + \mu|v-u^\varepsilon|^2 -$$
$$-(F, v-u^\varepsilon)\Big] e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t_2} \langle B(v) - B(u^\varepsilon), (v-u^\varepsilon)e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\mu t}\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |v-u^\varepsilon|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |v-u^\varepsilon|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_1}\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |v-u^\varepsilon|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_2}\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |v-u^\varepsilon|^2 e^{-2\lambda|x|+2\mu t_1}\,dx \tag{9}$$

для довільних $t_1, t_2 \in (-\infty,T]$, $t_1 < t_2$.

Покажемо, що на $(-\infty,T]$ існує послідовність $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\} \subset \{u^\varepsilon(x,t)\}$ зі значеннями в $L^{2,N}(\Omega)$, одностайно неперервна на довільному відрізку $[T_1,T_2] \subset (-\infty,T]$. Справді, за лемою Фату і оцінкою (7_2) для послідовності $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ справедлива нерівність

$$\int\limits_{T_1-1}^{T_2} \liminf ||u^\varepsilon e^{-\lambda|x|}||^2_V e^{2\mu t}\,dt \leqslant \liminf \int\limits_{Q_{T_1-1,T_2}} \Big[\sum_{i=1}^n |u^\varepsilon_{x_i}|^2 + |u^\varepsilon|^2\Big] e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt \leqslant \mu_2.$$

Отже, $\liminf ||u^\varepsilon(x,t)e^{-\lambda|x|}||^2_V < \infty$ майже для всіх $t \in [T_1-1,T_2]$. Тоді існує таке $\hat{T} \in [T_1-1,T_2]$ і така підпослідовність $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\} \subset \{u^\varepsilon(x,t)\}$, що

$$\liminf ||u^\varepsilon(x,\hat{T})e^{-\lambda|x|}||^2 = \lim_{m\to\infty} ||u^{\varepsilon_m}(x,\hat{T})e^{-\lambda|x|}||^2.$$

Нехай $\hat{T} = T_1$. Тоді

$$||u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{-\lambda|x|}||^2 \leqslant \mu_2 \tag{10}$$

для усіх m.

Домноживши (8) на

$$\Big(u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)\Big)e^{-2\lambda|x|+2\mu t},$$

будемо мати:

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)e^{\mu(T_1+\delta)} - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu T_1}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\varepsilon_m}\int\limits_{T_1}^{T_1+\delta} \langle Bu^{\varepsilon_m}, (u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m})e^{-2\lambda|x|}\rangle e^{2\mu t}\,dt +$$

$$+2\int\limits_{Q_{T_1,T_1+\delta}} \Big[-\mu(u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)}, u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m}) +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}(A_{ij}u^{\varepsilon_m}_{x_i}, u^{\varepsilon_m}_{x_j}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m}_{x_i}) + \sum_{i=1}^{n}(\tilde{B}_i u^{\varepsilon_m}_{x_i}, u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m}) +$$

$$+(Cu^{\varepsilon_m}, u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m}) + \mu|u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m}|^2 +$$

$$-(F, u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu(T_1-t)} - u^{\varepsilon_m})\Big] e^{-2\lambda|x|+2\mu t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_2\int\limits_{Q_{T_1,T_1+\delta}} \Big[\sum_{i=1}^{n}|u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,t)|^2 e^{2\mu t} + \sum_{i=1}^{n}|u^{\varepsilon_m}_{x_i}(x,T_1)|^2 e^{2\mu T_1} +$$

$$+|u^{\varepsilon_m}(x,t)|^2 e^{2\mu t} + |u^{\varepsilon_m}(x,T_1)|^2 e^{2\mu T_1} + |F|^2 e^{2\mu t}\Big]\,dx\,dt.$$

Звідси, на підставі оцінок (7), (10), властивостей оператора B та умов, накладених на F, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)e^{\mu(T_1+\delta)} - u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu T_1}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx \leqslant C_3\delta, \tag{11}$$

де стала C_3 не залежить від ε_m, хоча, можливо, залежить від T_1.

Оскільки для функції $u^{\varepsilon_m}(x,t)$ справджується нерівність (9), в нерівності (3) можна взяти

$$t_1 = T_1,\ \ t_2 = t,\ \ u_1(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t),\ \ u_2(x,t) = u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu\delta},$$
$$f_1(x,t) = F(x,t) - A(t)u^{\varepsilon_m}(x,t),$$
$$f_2(x,t) = F(x,t+\delta)e^{\mu\delta} - A(t+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu\delta}.$$

Тоді отримаємо, що

$$\int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\mu t} - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu(t+\delta)}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} |u^{\varepsilon_m}(x,T_1)e^{\mu T_1} - u^{\varepsilon_m}(x,T_1+\delta)e^{\mu(T_1+\delta)}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx +$$

$$+2\mu\int\limits_{Q_{T_1,t}} |u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\mu t} - u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu(t+\delta)}|^2 e^{-2\lambda|x|}\,dx\,dt +$$

$$+2\int\limits_{Q_{T_1,t}}(F(x,t)e^{\mu t}-F(x,t+\delta)e^{\mu(t+\delta)},u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\mu t}-$$

$$-u^{\varepsilon_m}(x,t+\delta)e^{\mu(t+\delta)})\,dx\,dt-2\int\limits_{T_1}^{t}\langle A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-$$

$$-A(\tau)u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau},(u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau})e^{-2\lambda|x|}\rangle\,d\tau=$$

$$=J_1+J_2+J_3-J_4. \tag{12}$$

Задамося довільним $\varepsilon>0$ і розглянемо окремо кожну з чотирьох складових правої частини нерівності (12).

Доданок J_1 оцінюємо за допомогою (11). Доданок J_3 з неперервності на $[T_1,T_2]$, а, отже, і рівномірної неперервності функції F можна зробити меншим за ε при досить малих $\delta>0$. J_4 перетворити за допомогою нерівності (2) до вигляду

$$J_4=2\int\limits_{T_1}^{t}\langle A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-A(\tau+\delta)u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau},$$

$$(u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau})e^{-2\lambda|x|}\rangle\,d\tau+$$

$$+2\int\limits_{T_1}^{t}\langle(A(\tau+\delta)-A(\tau))u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau},(u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-$$

$$-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau})e^{-2\lambda|x|}\rangle\,d\tau\geqslant\alpha_0\int\limits_{T_1}^{t}d\tau\int\limits_{\Omega}|u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-$$

$$-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau}|^2e^{-2\lambda|x|}\,dx+2\int\limits_{T_1}^{t}\langle(A(\tau+\delta)-A(\tau))u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau},$$

$$(u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau})e^{-2\lambda|x|}\rangle\,d\tau$$

За рахунок неперервності за t елементів матриць $A_{ij},B_i(i,j=\overline{1,n})$, C ми можемо зробити другий доданок меншим за ε. Тоді з (12) будемо мати: для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta_1(0<\delta<\varepsilon)$, таке, що для усіх $\delta(0<\delta<\delta_1)$

$$\int\limits_{\Omega}|u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau}|^2e^{-2\lambda|x|}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_4\varepsilon+C_5\int\limits_{T_1}^{t}d\tau\int\limits_{\Omega}|u^{\varepsilon_m}(x,\tau+\delta)e^{\mu(\tau+\delta)}-u^{\varepsilon_m}(x,\tau)e^{\mu\tau}|^2e^{-2\lambda|x|}\,dx,$$

де сталі C_4,C_5 не залежать від $\varepsilon,\delta,\varepsilon_m$. Звідси, на підставі леми Гронуола-Белмана отримуємо одностайну неперервність послідовності $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)e^{\mu t}\}$. Отже, з цієї послідовності можна вибрати підпослідовність, котра рівномірно збігається на відрізку $[T_1,T_2]$.

Якщо розглянути тепер відрізки $[T-1,T]$, $[T-2,T]$, ..., $[T-m,T]$, ...,то можна виділити таку діагональну послідовність $\{u^{m,m}(x,t)\}$, для котрої

$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{m,m}(x,t) \to e^{-\lambda|x|+\mu t}u(x,t) \quad * - \text{слабко в } L^{\infty}((-\infty,T];L^{2,N}(\Omega));$$
$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{m,m}(x,t) \to e^{-\lambda|x|+\mu t}u(x,t) \quad \text{слабко в } L^{2}((-\infty,T];V);$$
$$e^{-\lambda|x|+\mu t}u^{m,m}(x,t) \to e^{-\lambda|x|+\mu t}u(x,t) \quad \text{рівномірно в } C([T_1,T];L^{2,N}(\Omega))$$

при $m\to\infty$ для довільного $T_1\in(-\infty,T)$. Поряд з цим очевидно, що функції $\{u^{m,m}(x,t)\}$ справджують нерівність (9) для довільних $t_1,t_2\in(-\infty,T]$, $t_1<t_2$ і $v\in W$, $v\in K$ майже для усіх $t\in(-\infty,T]$. Крім того з нерівності (7_3) випливає, що $B(u)=0$, тому $u\in K$ майже для усіх $t\in(-\infty,T]$. Тоді, аналогічно, як в [9], стор. 407, отримаємо, що функція $u(x,t)$ є розв"язком варіаційної нерівності (1).

1. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений* // Успехи матем. наук. – 1976. – Т. 31, вып 6. – С. 142-166.
2. Олейник О. А. *О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях* // Успехи матем. наук. – 1975. – Т. 30, вып. 2. – С. 219 - 220.
3. Олейник О. А., Радкевич Е. В. *Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена-Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений* // Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т. 8, вып. 4. – С. 59 - 70.
4. Бокало Н. М. // О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1989. – Вып.14. – С. 3-44.
5. Бокало Н. М. *Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности* // Сиб. матем. ж. – 1993. – Т. 34, N 4. – С. 33-40.
6. Бокало М. М., Сікорський В. М. *Задача без початкових умов для слабко нелінійних параболічних рівнянь, які сильно вироджуються в початковий момент часу* // Вісник Львів. у-ту. – 1997. – Вип. 48. – С. 35-44.
7. Ивасишен С. Д. // О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. матем. ж. – 1982. – Т. 34, N5. – С. 547-552.
8. Ивасишен С. Д. *О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий* // Дифференц. уравн. – 1978. – Т. 14, N 2. – С. 361 - 363.
9. Лионс Ж.- Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., Мир, 1972. – 608 с.
10. Панков А. А. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. – К., Наукова думка, 1985. – 184 с.

11. **Лавренюк С. П.** *Параболические вариационные неравенства без начальных условий* // Диференц. уравн. – 1996. – Т. 32, N 10.

12. Лавренюк С. П. *Системи параболічних варіаційних нерівності без початкових умов* // Укр. матем. ж. – 1997. – Т. 49, N 4. – С. 540-547.

13. Bokalo M., Dmytriv V. *Problem without initial conditions for one kind of quasilinear degenerate parabolic equations* // Matematychni Studii. – 1998. – Vol.9, N 1. – P. 16-20.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.1999

УДК 517.956.3

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНІЄЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ю. І. Говда

Govda Yu. I. Mixed problems for a hyperbolic system of second order equations. Two mixed problems for a hyperbolic system of six 2nd order equations $\partial^2\vec{U}/\partial t^2+\mathrm{L}_0\vec{U}+$lower order terms$=\vec{F}$, where L_0 is a nonelliptic differential operator,

$$\mathrm{L}_0\vec{U} \equiv -\begin{pmatrix} \beta\vec{\nabla}^2\vec{u}^1+\nu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)+\gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \\ \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)+\alpha\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \end{pmatrix}, \quad \vec{U}(x,t)=\begin{pmatrix} \vec{u}^1(x,t) \\ \vec{u}^2(x,t) \end{pmatrix},$$

$\vec{u}^i=\mathrm{colon}\big(u_1^i,u_2^i,u_3^i\big)$, $i=1,2$, are considered. The set of equations of locally gradient elasticity may be reduced to the investigated system. Conditions of well-posedness of mixed problems in the class of almost everywhere solutions were established. Well known results about solvability of Cauchy problem for the abstract hyperbolic 2nd order equation in Hilbert space were used.

У праці розглянуто дві мішані задачі для гіперболічної системи шести рівнянь другого порядку з нееліптичним диференціальним оператором за просторовими змінними. Використовуючи результати про розв'язність задачі Коші для абстрактного гіперболічного рівняння другого порядку в гільбертовому просторі, встановлюються умови коректності мішаних задач в класі розв'язків майже скрізь.

1. Постановка задачі. В циліндрі $Q=\big\{(x,t)\in\mathbb{R}^4 : x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3,\ 0<t<T\big\}$ розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}+\mathrm{L}\vec{U}+\mathrm{B}\vec{U}=\vec{F}, \tag{1}$$

де Ω – скінченна область, обмежена поверхнею Γ класу C^2; $\vec{U}$, $\vec{F}$ – відповідно шукана й відома вектор-функції, визначені в $\overline{Q}$,

$$\vec{U}(x,t)=\begin{pmatrix} \vec{u}^{\,1}(x,t) \\ \vec{u}^{\,2}(x,t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(x,t)=\begin{pmatrix} \vec{f}^{\,1}(x,t) \\ \vec{f}^{\,2}(x,t) \end{pmatrix},$$

$\vec{u}^{\,i}=\mathrm{colon}\big(u_1^i,u_2^i,u_3^i\big)$, $\vec{f}^{\,i}=\mathrm{colon}\big(f_1^i,f_2^i,f_3^i\big)$, $i=1,2$;

1991 *Mathematics Subject Classification.* 35L55.

$$\mathrm{L}\vec{U} \equiv -\begin{pmatrix} \beta\vec{\nabla}^2\vec{u}^1 + \nu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \\ \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \alpha\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\alpha_0 + \alpha_*\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\vec{u}^1 + \alpha_*\frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}^2 \\ \alpha_*\frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}^1 + \alpha_*\vec{u}^2 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

B – лінійний оператор, на який нижче буде накладена умова певної підпорядкованості оператору L; α, β, γ, ν, α_0, α_* – додатні сталі, причому $\gamma^2 \leqslant \alpha\nu$.

Зауважимо, що система рівнянь (1) є породжена моделлю локально градієнтного пружного тіла з врахуванням інерційності зміщень маси та механічного поступального руху [1]. Її характерною особливістю є те, що оператор L, який заданий співвідношенням (2), не є еліптичним.

На нижній основі циліндра ($t = 0$, $x \in \Omega$) задамо такі початкові умови

$$\vec{U}\big|_{t=0} = \vec{\Phi}(x), \qquad \frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \vec{\Psi}(x), \quad (3)$$

де

$$\vec{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} \vec{\varphi}^1(x) \\ \vec{\varphi}^2(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Psi}(x) = \begin{pmatrix} \vec{\psi}^1(x) \\ \vec{\psi}^2(x) \end{pmatrix},$$

$\vec{\varphi}^i =$colon $(\varphi_1^i, \varphi_2^i, \varphi_3^i)$, $\vec{\psi}^i =$colon $(\psi_1^i, \psi_2^i, \psi_3^i)$, $i = 1, 2$.

Для системи рівнянь (1) розглянемо крайові задачі з початковими умовами (3) і такими граничними умовами, що задані на бічній поверхні циліндра $S = \Gamma \times [0; T]$:

$$\vec{u}^1\big|_S = \vec{0}, \qquad \vec{u}^2\cdot\vec{n}\big|_S = 0; \quad (4_1)$$

$$\left(\beta\frac{\partial\vec{u}^1}{\partial n} + \left(\nu - \frac{\gamma^2}{\alpha}\right)(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1)\vec{n} + \sigma\vec{u}^1\right)\bigg|_S = \vec{0}, \quad \vec{\nabla}\cdot(\gamma\vec{u}^1 + \alpha\vec{u}^2)\big|_S = 0. \quad (4_2)$$

Тут $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до Γ; $\partial/\partial n$ – похідна в напрямку $\vec{n}$; σ – невід'ємна стала.

Умови коректності мішаних задач (1), (3), (4_i) для $i = 1, 2$ отримаємо, скориставшись відомими результатами [2,3] про коректність задачі Коші для абстрактного гіперболічного рівняння другого порядку в гільбертовому просторі. Для цього побудуємо самоспряжене розширення оператора L.

2. Енергетичні простори оператора L. Позначимо через $W_{2,0}^{\nabla}(\Omega)$ гільбертів простір, утворений поповненням за нормою $\|\cdot\|_{W_2^{\nabla}(\Omega)}$ простору $W_2^{\nabla}(\Omega)$ множини $\{\vec{u} \in [C^1(\overline{\Omega})]^3 : \vec{u}\cdot\vec{n}\big|_\Gamma = 0\}$ [4].

Розглянемо оператори $\mathrm{L}_i\colon [L_2(\Omega)]^6 \to [L_2(\Omega)]^6$ $(i = 1, 2)$ з областями визначення

$$D(\mathrm{L}_1) = \{\vec{U} : \vec{u}^1 \in [W_{2,0}^2(\Omega)]^3;\ \vec{u}^2 \in W_{2,0}^{\nabla}(\Omega),\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2 \in W_2^1(\Omega)\}$$

та

$$D(\mathrm{L}_2) = \{\vec{U} : \vec{u}^1 \in [W_2^2(\Omega)]^3;\ \vec{u}^2 \in W_2^{\nabla}(\Omega),\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2 \in W_2^1(\Omega);$$
$$\vec{u}^1,\ \vec{u}^2 \text{ задовольняють на } \Gamma \text{ умови } (4_2)\}$$

відповідно, що задані співвідношенням (2). При цьому під похідними від $\vec{u}^1$ розуміємо узагальнені похідні, а під $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2$ – узагальнену дивергенцію [4], і в оператор градієнта від $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2$ входять узагальнені похідні.

Враховуючи формулу для знаходження узагальненої дивергенції від добутку скалярної та векторної функцій [4], неважко переконатись у тому, що оператори L_i є симетричними додатно визначеними операторами ($i = 1, 2$). Через H_{L_i} позначимо енергетичний простір [5, с.65] оператора L_i, а через $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{L}_i}$ та $\|\cdot\|_{\mathrm{L}_i}$ відповідно – скалярний добуток і норму в ньому ($i = 1, 2$). Скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{L}_i}$ задаються співвідношеннями

$$(\vec{U},\vec{V})_{\mathrm{L}_1} = I(\vec{U},\vec{V}) + \int\limits_{\Omega} \Big[\alpha_0 \vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,1} + \alpha_* \Big(\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,1} + \frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}^{\,2}\cdot\vec{v}^{\,1} + \frac{\gamma}{\alpha}\vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,2} + \vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,1}\Big)\Big]\,dx,$$

$$(\vec{U},\vec{V})_{\mathrm{L}_2} = (\vec{U},\vec{V})_{\mathrm{L}_1} + \sigma\int\limits_{\Gamma} \vec{u}^{\,1}\cdot\vec{v}^{\,1}\,dx,$$

де

$$I(\vec{U},\vec{V}) = \int\limits_{\Omega}\Big[\beta\sum_{j=1}^{3}(\vec{\nabla}u_j^1)\cdot(\vec{\nabla}v_j^1) + \nu(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,1})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^{\,1}) +$$
$$+\gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^{\,1}) + \gamma(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,1})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^{\,2}) + \alpha(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}^{\,2})\Big]\,dx.$$

З умов, накладених на коефіцієнти оператора L, та з еквівалентних нормувань простору Соболєва $W_2^1(\Omega)$ [6, с.158] випливає еквівалентність норм $\|\cdot\|_{\mathrm{L}_i}$, $i = 1, 2$, та норми $|\!|\!|\cdot|\!|\!| = \sqrt{\|\cdot\|^2_{[W_2^1(\Omega)]^3} + \|\cdot\|^2_{W_2^{\nabla}(\Omega)}}$ простору $[W_2^1(\Omega)]^3 \times W_2^{\nabla}(\Omega)$. Таким чином, H_{L_i} збігається з поповненням за нормою $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ множини $D(\mathrm{L}_i)$, $i = 1, 2$. Звідси, беручи до уваги тверджeня [7, с.44] про множини щільні в $W_2^1(\Omega)$, отримуємо:

$$H_{\mathrm{L}_1} = \big[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big]^3 \times W_{2,0}^{\nabla}(\Omega), \quad H_{\mathrm{L}_2} = \big[W_2^1(\Omega)\big]^3 \times \widetilde{W}_2^{\nabla}(\Omega),$$

де $\widetilde{W}_2^{\nabla}(\Omega)$ – гільбертів простір, утворений замиканням в нормі $\|\cdot\|_{W_2^{\nabla}(\Omega)}$ множини $[C^1(\overline{\Omega})]^3$.

Зауваження 1. Можна довести, що, коли Ω (без припущення гладкості межі) задовольняє умову локальних зсувів [8, с.315], то $\widetilde{W}_2^{\nabla}(\Omega) = W_2^{\nabla}(\Omega)$.

Зауваження 2. На елементах простору $W_2^{\nabla}(\Omega)$ визначений лінійний неперервний оператор $\gamma_n\colon W_2^{\nabla}(\Omega) \to W_2^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, який функції $\vec{u}$ з $W_2^{\nabla}(\Omega)$ ставить у відповідність її нормальну складову на межі $\vec{u}\cdot\vec{n}\big|_{\Gamma}$ як елемент простору $W_2^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, причому для достатньо гладких функцій $\gamma_n\vec{u}$ дорівнює звуженню $\vec{u}\cdot\vec{n}$ на Γ [9, с.16].

Зауваження 3. З теореми 1.3 [9, с.19] випливає, що $\vec{u}$ є елементом простору $W_{2,0}^{\nabla}(\Omega)$ тоді і лише тоді, коли $\vec{u}$ належить $W_2^{\nabla}(\Omega)$ і для довільної функції $w \in W_2^1(\Omega)$ справедливо

$$\int\limits_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot[w\vec{u}]\,dx = 0.$$

3. Самоспряжене розширення оператора L. Розглянемо операторне рівняння

$$\mathrm{L}_i\vec{U} = \begin{pmatrix}\vec{g}^{\,1}\\ \vec{g}^{\,2}\end{pmatrix}, \tag{5_i}$$

$i = 1, 2$. Очевидно, що $\vec{U}$ є розв'язком рівняння (5_i) тоді і лише тоді, коли $\vec{u}^{\,1}$, $\vec{u}$ є розв'язками, відповідно, операторних рівнянь

$$\mathrm{l}_i'\vec{u}^{\,1} \equiv -\beta\vec{\nabla}^2\vec{u}^{\,1} - \left(\nu - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,1}) + \alpha_0\vec{u}^{\,1} = \vec{h},$$
$$\mathrm{l}_i''\vec{u} \equiv -\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) + \frac{\alpha_*}{\alpha}\vec{u} = \vec{g}^{\,2}, \quad i = 1, 2,$$

де

$$\vec{h} \equiv \vec{g}^{\,1} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{g}^{\,2}, \quad \vec{u} \equiv \gamma\vec{u}^{\,1} + \alpha\vec{u}^{\,2}, \quad D(\mathrm{l}_1') = [W_{2,0}^2(\Omega)]^3,$$

$$D(\mathrm{l}_2') = \{\vec{u}^{\,1} \in [W_2^2(\Omega)]^3 : \vec{u}^{\,1}\text{задовольняє на } \Gamma \text{ першу з умов}(4_2)\},$$

$$D(\mathrm{l}_1'') = \{\vec{u}^{\,2} \in W_{2,0}^{\nabla}(\Omega) : \vec{\nabla}\cdot\vec{u}^{\,2} \in W_2^1(\Omega)\}, \quad D(\mathrm{l}_2'') = \{\vec{u} \in W_2^{\nabla}(\Omega) : \vec{\nabla}\cdot\vec{u} \in \mathring{W}_2^1(\Omega)\}.$$

Можна показати, що для рівнянь $\mathrm{l}_i'\vec{u}^{\,1} = \vec{h}$ виконуються всі умови теореми 6.1 з праці [10]. Тому областями значень $R(\mathrm{l}_i')$ операторів l_i' для $i = 1, 2$ буде весь простір $[L_2(\Omega)]^3$.

Зрозуміло, що оператори $\mathrm{l}_i'' : [L_2(\Omega)]^3 \to [L_2(\Omega)]^3$ є симетричними і додатно визначеними $(i = 1, 2)$. Через $H_{\mathrm{l}_i''}$ позначимо енергетичний простір оператора l_i'', а через $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{l}_i''}$ та $\|\cdot\|_{\mathrm{l}_i''}$ — скалярний добуток і норму в ньому. При цьому скалярні добутки $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{l}_i''}$ задаються співвідношенням

$$(\vec{u},\vec{v})_{\mathrm{l}_i''} = \int\limits_\Omega \left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \frac{\alpha_*}{\alpha}\vec{u}\cdot\vec{v}\right] dx, \quad i = 1, 2.$$

З еквівалентності норм $\|\cdot\|_{\mathrm{l}_i''}$ та $\|\cdot\|_{W_2^{\nabla}(\Omega)}$ отримуємо: $H_{\mathrm{l}_1''} = W_{2,0}^{\nabla}(\Omega)$, $H_{\mathrm{l}_2''} \subset W_2^{\nabla}(\Omega)$.

Лема. *Оператори* l_i'' *є самоспряженими* $(i = 1, 2)$.

Доведення. Для симетричного додатно визначеного оператора існує жорстке самоспряжене розширення [11, с.220]. Таке розширення оператора l_i'' позначимо $\widetilde{\mathrm{l}}_i''$. Для доведення леми достатньо показати, що $D(\mathrm{l}_i'') = D(\widetilde{\mathrm{l}}_i'')\,(i = 1, 2)$. Зрозуміло, що $D(\mathrm{l}_i'') \subset D(\widetilde{\mathrm{l}}_i'')$. Доведемо, що $D(\mathrm{l}_i'') \supset D(\widetilde{\mathrm{l}}_i'')$. Нехай $\vec{v}$ – довільна функція з $D(\widetilde{\mathrm{l}}_i'')$. Враховуючи, що $D(\widetilde{\mathrm{l}}_i'') \subset H_{\mathrm{l}_i''}$, для довільної функції $\vec{u} \in \left[\dot{C}^2(\Omega)\right]^3 \subset D(\mathrm{l}_i'')$ маємо

$$\int\limits_\Omega (\widetilde{\mathrm{l}}_i''\vec{u})\cdot\vec{v}\,dx = \int\limits_\Omega (\mathrm{l}_i''\vec{u})\cdot\vec{v}\,dx = \int\limits_\Omega \left[(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}) + \frac{\alpha_*}{\alpha}\vec{u}\cdot\vec{v}\right] dx = \int\limits_\Omega \vec{u}\cdot(\widetilde{\mathrm{l}}_i''\vec{v})\,dx, \tag{6}$$

$$\int\limits_\Omega (\vec{\nabla}\cdot\vec{u})(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\,dx = \int\limits_\Omega \vec{u}\cdot\vec{w}\,dx, \tag{7}$$

де $w = \widetilde{\mathrm{l}}_i''\vec{v} - \frac{\alpha_*}{\alpha}\vec{v}$, $i = 1, 2$. Із довільності $\vec{u}$ в рівності (7) випливає, що $\vec{\nabla}\cdot\vec{v} \in W_2^1(\Omega)$, і, отже, $D(\widetilde{\mathrm{l}}_1'') \subset D(\mathrm{l}_1'')$, $D(\widetilde{\mathrm{l}}_2'') \subset \{\vec{u} \in \widetilde{W}_2^{\nabla}(\Omega) : \vec{\nabla}\cdot\vec{u} \in W_2^1(\Omega)\}$. Самоспряженість оператора l_1'' доведено.

З (6) випливає, що для довільної функції $\vec{u} \in [C^2(\overline{\Omega})]^3$, яка задовольняє умові $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\big|_\Gamma = 0$, справедливо

$$\int\limits_\Gamma (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})(\vec{n}\cdot\vec{u})\,dx = 0. \tag{8}$$

Тому для завершення доведення досить показати, що множина функцій $\{\vec{u}_\Gamma \in [C^2(\Gamma)]^3 : \exists \vec{u} \in [C^2(\overline{\Omega})]^3$, що $\vec{u}\big|_\Gamma = \vec{u}_\Gamma$ і $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\big|_\Gamma = 0\}$ щільна в $[L_2(\Gamma)]^3$.

Нехай $\vec{\varphi}$ – довільна функція з $[L_2(\Gamma)]^3$, а ε – довільна додатна стала. Тоді існує $\vec{\psi}_\Gamma \in [C^2(\Gamma)]^3$ така, що $\|\vec{\varphi} - \vec{\psi}_\Gamma\|_{[L_2(\Gamma)]^3} < \varepsilon$, для якої існує функція $\vec{\psi} \in [C^2(\overline{\Omega})]^3$, що є продовженням $\vec{\psi}_\Gamma$ в Ω [6, с.141]. Як випливає з [7, с.44], $\vec{\psi}$ можна наблизити в нормі простору $[W_2^1(\Omega)]^3$ функцією $\vec{\omega} \in [C^2(\overline{\Omega})]^3$ такою, що $\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}\big|_\Gamma = 0$. Враховуючи еквівалентні нормування простору $[W_2^1(\Omega)]^3$, маємо $\|\vec{\psi} - \vec{\omega}\|_{[L_2(\Gamma)]^3} < c\|\vec{\psi} - \vec{\omega}\|_{[W_2^1(\Omega)]^3} < c\varepsilon$. Тому справедлива оцінка: $\|\vec{\varphi} - \vec{\omega}\|_{[L_2(\Gamma)]^3} \leqslant \|\vec{\varphi} - \vec{\psi}_\Gamma\|_{[L_2(\Gamma)]^3} + \|\vec{\psi} - \vec{\omega}\|_{[L_2(\Gamma)]^3} < (1+c)\varepsilon$, з використанням якої на підставі рівності (8) отримуємо $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}\big|_\Gamma = 0$. Отже, $D(\widetilde{\mathrm{l}}_2'') \subset D(\mathrm{l}_2'')$. Лему доведено.

Із самоспряженості та додатної визначеності оператора l_i'', маємо: $R(\mathrm{l}_i'') = [L_2(\Omega)]^3$ для $i = 1,2$ [12, с.563]. Тому, враховуючи що $R(\mathrm{l}_i') = [L_2(\Omega)]^3$, отримуємо $R(\mathrm{L}_i) = [L_2(\Omega)]^6$ ($i = 1,2$). Звідси, беручи до уваги симетричність операторів L_i, випливає, що L_i є самоспряженими [12, с.562].

4. Формулювання основних теорем.

Означення. Нехай функція $\vec{U}$ справджує умови:
1) $\partial^2\vec{U}/\partial t^2 \in C([0;T],[L_2(\Omega)]^6)$;
2) $\partial\vec{U}/\partial t \in C([0;T], H_{\mathrm{L}_i})$;
3) $\vec{U}(\cdot,t) \in D(\mathrm{L}_i)$ для довільного $t \in [0;T]$;
4) $\vec{U}$ задовольняє початкові умови (3);
5) $\vec{U}$ на $[0;T]$ є розв'язком системи

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} + \mathrm{L}_i\vec{U} + \mathrm{B}\vec{U} = \vec{F}.$$

Тоді $\vec{U}$ будемо називати розв'язком майже скрізь задачі $(1),(3),(4_i)$; $i = 1,2$.

Враховуючи, що L_i є самоспряженим додатно визначеним оператором, з теореми 1.5 [2, с.301] та теореми 4.2 [3, с.152] випливає справедливість таких тверджень.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*
1) оператор $\mathrm{L}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{B}\colon [L_2(\Omega)]^6 \to [L_2(\Omega)]^6$ *є обмеженим;*
2) $\vec{F} \in C([0;T], H_{\mathrm{L}_i})$;
3) $\vec{\Phi} \in D(\mathrm{L}_i)$, $\vec{\Psi} \in H_{\mathrm{L}_i}$.
Тоді існує єдиний розв'язок майже скрізь задачі $(1),(3),(4_i)$; $i = 1,2$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*
1) $D(\mathrm{B}) \supset H_{\mathrm{L}_i}$ *і* $\|\mathrm{B}\vec{U}\|_{[L_2(\Omega)]^6} \leqslant c\|\vec{U}\|_{\mathrm{L}_i}$ *при* $\vec{U} \in H_{\mathrm{L}_i}$;
2) $\vec{F} \in W_1^1((0;T),[L_2(\Omega)]^6)$;
3) $\vec{\Phi} \in D(\mathrm{L}_i)$, $\vec{\Psi} \in H_{\mathrm{L}_i}$.
Тоді існує єдиний розв'язок майже скрізь задачі $(1),(3),(4_i)$, *і для нього справедлива*

оцінка

$$\left\|\frac{\partial^2\vec{U}(\cdot,t)}{\partial t^2}\right\|_{[L_2(\Omega)]^6}+\left\|\frac{\partial\vec{U}(\cdot,t)}{\partial t}\right\|_{L_i}+\|\,\mathrm{L}_i\vec{U}(\cdot,t)\|_{[L_2(\Omega)]^6}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|\,\mathrm{L}_i\vec{\Phi}\|_{[L_2(\Omega)]^6}+\|\vec{\Psi}\|_{\mathrm{L}_i}+\|\vec{F}(\cdot,0)\|_{[L_2(\Omega)]^6}+\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial\vec{F}(\cdot,\tau)}{\partial\tau}\right\|_{[L_2(\Omega)]^6}d\tau\right),\quad t\in[0;T];$$

$i=1,2.$

1. Бурак Я. Й., Говда Ю. І., Нагірний Т. С. *Термодинамічне моделювання локально-градієнтних термопружних систем з врахуванням інерційності пружних зміщень* // Доп. НАН України. – 1996. – N 2. – С.39-43.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М., Наука, 1967. – 464 с.
3. Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. – Баку, Элм, 1985. – 220 с.
4. Говда Ю. І. *Про енергетичні простори одного додатно визначеного оператора* // Мат. студії. – 1998. – Т.10, N 1. – С.79-84.
5. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. – М., Высш. шк., 1977. – 432 с.
6. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М., Наука, 1983. – 424 с.
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев, Наук.думка, 1965. – 800 с.
8. Бесов О.В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М., Наука, 1975. – 480 с.
9. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М., Мир, 1981. – 408 с.
10. Агранович М. С., Вишик М. И. *Эллиптические граничные задачи с параметром и параболические задачи общего вида* // Успехи матем. наук. – 1964. – Т.19, N 3. – С.53-161.
11. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейна. – М., Наука, 1972. – 544 с.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т.V. – М., Физматгиз, 1959. – 656 с.

Стаття надійшла до редколегії 07.12.98

УДК 517.983

ПРО РЕЗОЛЬВЕНТИ НЕСТАНДАРТНИХ РІЗНИЦЕВИХ ОПЕРАТОРІВ

Ю. М. Яворський

Yavorsky Yu. M. On resolvents of nonstandard difference operators. This paper extends research of V.E. Lyantse and the author. A formula which relates to resolvents of Sturm-Liouville operators on the whole axe and semiaxes is given. This result is used for a proof of nearstandardness of fundamental functions of the operator on the whole axe.

Дана робота виконана в рамках версії Нельсона нестандартного аналізу (див. [5]). Позначення і термінологія в основному такі, як і в [1]. Результати, які стосуються операторів на півосі викладені в [2], [3] і [4].

1. Розглянемо різнецевий вираз

$$lx(t) = -\frac{1}{2}\left[x(t-1) + x(t+1)\right] + a(t)x(t), \tag{1}$$

де незалежна змінна t пробігає цілі значення ($t \in \mathbb{Z}$), $t \mapsto a(t)$ – задана функція (потенціал). Задамо натуральне число m і позначимо

$$T := \{t \in \mathbb{Z} : -m < t < m\}, \quad T_- := \{t \in T : t \leqslant -1\}, \quad T_+ := \{t \in T : t \geqslant 1\}. \tag{2}$$

Нехай L, L_-, L_+ – оператори, котрі діють в лінійних просторах, відповідно, $\mathbb{C}^T$, $\mathbb{C}^{T_-}$, $\mathbb{C}^{T_+}$, породжуються різницевим виразом (1) і нульовими крайовими умовами, відповідно,

$$x(-m) = 0, \quad x(m) = 0, \tag{3}$$

$$x(\mp m) = 0, \quad x(0) = 0. \tag{$3_\mp$}$$

Наприклад, L_+ діє таким чином

$$L_+x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x(2) + a(1)x(1) & \text{при} \quad t = 1, \\ lx(t) & \text{при} \quad 1 < t < m-1, \\ -\frac{1}{2}x(m-2) + a(m-1)x(m-1) & \text{при} \quad t = m-1. \end{cases}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 46S20, 47B39.

У цій праці виведено формулу, яка виражає резольвенту оператора L через резольвенти операторів L_- і L_+. Отриманий результат дозволяє довести колостандартність власних і приєднаних функцій оператора L, які відповідають так званим побічним власним значенням (в припущенні, що натуральне число m (див. (2)) є нестандартним, тобто нескінченним).

2. Позначимо через z^-, z^+ – розв'язки рівняння $(l-\xi)z = 0$, котрі визначаються початковими умовами

$$z^-(-m) = 0, \quad z^-(-m+1) = \sigma^{-m+1} - \sigma^{-m-1}, \tag{4_-}$$

$$z^+(m) = 0, \quad z^+(m-1) = \sigma^{-m+1} - \sigma^{-m-1}. \tag{4_+}$$

Тут і далі комплексні параметри ξ і σ пов'язані співвідношенням

$$\xi = -\frac{1}{2}\left(\sigma + \sigma^{-1}\right). \tag{5}$$

Позначимо через $w(\xi)$ вронскіан розв'язків z^-, z^+

$$w(\xi) = z^-(t)z^+(t+1) - z^+(t)z^-(t+1). \tag{6}$$

Зазначимо, що він не залежить від t і, що власні значення оператора L збігаються з нулями цього вронскіана

$$\lambda \in \sigma(L) \Leftrightarrow w(\lambda) = 0. \tag{7}$$

Для ξ, яке не є власним значенням операторів L_- і L_+, визначимо функціонал K_ξ на лінійному просторі $\mathbb{C}^T$ формулою

$$\forall f \in \mathbb{C}^T \quad K_\xi(f) := (L_- - \xi)^{-1} f(-1) + (L_+ - \xi)^{-1} f(1) + 2f(0). \tag{8}$$

2.1. Теорема. *Нехай ξ – резольвентне значення операторів L, L_-, L_+ (зокрема $w(\xi) \neq 0$). Тоді $\forall f \in \mathbb{C}^T$*

$$(L-\xi)^{-1}f(t) = \begin{cases} (L_- - \xi)^{-1}f(t) - \dfrac{1}{w(\xi)}K_\xi(f)z^+(0)z^-(0) & t \leqslant 0, \\[2ex] (L_+ - \xi)^{-1}f(t) - \dfrac{1}{w(\xi)}K_\xi(f)z^-(0)z^+(0) & t \geqslant 0. \end{cases} \tag{9}$$

(Тут $z^\mp(t) = z^\mp(t,\xi)$). Нехай λ – власне значення оператора L, але резольвентне значення операторів L_-, L_+. Тоді рівняння $(L-\lambda)u = f$ має розв'язок якщо і тільки якщо функція f є ортогональна до функціоналу K_λ:

$$K_\lambda(f) = 0. \tag{10}$$

У такому випадку загальний розв'язок рівняння $(L-\lambda)u = f$ має вигляд

$$u(t) = \begin{cases} (L_- - \xi)^{-1}f(t) + Cz^+(0)z^-(t) & t \leqslant 0, \\[2ex] (L_+ - \xi)^{-1}f(t) + Cz^-(0)z^+(t) & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{11}$$

де C – довільна стала. (Тут $z^\mp(t) = z^\mp(t,\lambda)$).

Доведення. Розв'язок u рівняння $(L-\xi)u = f$ будемо шукати у вигляді

$$u(t) = \begin{cases} v^-(t) + C_- z^-(t) & t \leqslant 0, \\[2ex] v^+(t) + C_+ z^+(t) & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{12}$$

де C_-, C_+ – сталі, а

$$v^{\mp} := (L_{\mp} - \xi)^{-1} f. \tag{12'}$$

Зазначимо, що функція u вигляду (12) автоматично задовольняє рівняння $(l-\xi)u(t) = f(t)$ при $t \neq 0$ і крайові умови $u(-m) = 0 = u(m)$. Тому слід з'ясувати тільки, чи сталі C_-, C_+ можна вибрати так, щоб

$$u(-0) = u(+0) \tag{13}$$

і

$$(l - \xi)u(0) = f(0). \tag{14}$$

Оскільки ξ не є власним значенням операторів L_-, L_+, то $z^{\mp}(0) \neq 0$ (бо $z^{\mp}(\mp m) = 0$). Тому умова (13) виконується тоді і лише тоді, коли $C_- = Cz^+(0)$, $C_+ = Cz^-(0)$, де C – певна стала. Визначаючи цю сталу з рівності (14), отримуємо

$$\alpha(\xi)C = -v^-(-1) + v^+(1) - 2f(0), \tag{15}$$

де $\alpha(\xi) := z^+(0)z^-(-1) + z^-(0)z^+(1) - 2\,[a(0) - \xi]\, z^-(0)z^+(0)$. Використовуючи те, що $z^{\pm}$ – розвязки рівняння $(l - \xi)z = 0$, після нескладних перетворень знаходимо, що $\alpha(\xi)$ збігається з вронскіаном (6). Тому, використовуючи (8), рівняння (15) (для знаходження сталої C) можемо переписати у вигляді

$$w(\xi)C = -K_{\xi}(f). \tag{15'}$$

Якщо ξ – резольвентне значення оператора L, тобто $w(\xi) \neq 0$, то $C = -\frac{1}{w(\xi)}K_{\xi}(f)$ і формула (12) перетвориться в формулу (9). Коли $\xi = \lambda$ є власним значенням для L, тобто $w(\lambda) = 0$, то рівняння (15′) може виконуватися лише при умові (10) і тоді це рівняння задовольняє довільне C.

2.2. Зауваження. *Резольвенти $(L_{\mp} - \xi)^{-1}$ виражаються через фундаментальну систему розв'язків різницевого рівняння $(l - \xi)z = 0$ (див. [2], або [4]). Використовуючи* (9), *легко отримати формулу, яка виражає резольвенту $(L - \xi)^{-1}$ через таку фундаментальну систему.*

3. Поки що наші міркування залишались в рамках звичайної лінійної алгебри. Далі нас цікавить випадок, коли число m ("довжина" T дорівнює $2m - 1$) є нестандартним ($m \in \mathbb{N}\setminus{}^{\mathrm{st}}\mathbb{N}$), тобто воно нескінченне: $m \approx \infty$. При такому припущенні лінійні простори $\mathbb{C}^T$, $\mathbb{C}^{T_-}$, $\mathbb{C}^{T_+}$ є нестандартними. Тому для їх елементів поняття стандартності чи колостандартності (в сенсі Нельсона) не визначені. Використаємо ці поняття в *умовному* сенсі, так як викладено в [1].

3.1. Означення. *Лінійний простір $\mathbb{C}^T$ розглянемо як гільбертовий зі скалярним добутком*

$$(x|y) = \sum_{t \in T} x(t)\overline{y(t)}. \tag{16}$$

і нормою $\|x\| = (x|x)^{1/2}$. Нехай $f \in \mathbb{C}^T$, через ${}^{\bullet}f$ позначимо стандартне продовження на $\mathbb{Z}$ звуження $f|_{{}^{\mathrm{st}}\mathbb{Z}}$ функції f на множину ${}^{\mathrm{st}}\mathbb{Z}$ стандартних цілих чисел. Функція f називається (умовно) стандартною, якщо $\forall t \in T$ $f(t) = ({}^{\bullet}f)(t)$. Вона називається (умовно) колостандартною, якщо існує така стандартна функція $g \in \mathbb{C}^T$, що $\|f -$

$g\| \approx 0$. *У такому випадку функція g єдина, позначається через $^\circ f$ і називається тінню функції f.*

Аналогічні позначення вводяться для елементів просторів $\mathbb{C}^{T_-}$ і $\mathbb{C}^{T_+}$.

3.2. Означення. *Функція $f \in \mathbb{C}^T$ називається s-інтегровною, якщо*

$$\sum_{t\in T} |f(t)| \ll \infty \quad i \quad \forall n \approx \infty \quad \sum_{|t|>n} |f(t)| \approx 0.$$

Відомим є наступне (див. [4]).

3.3. Твердження. *Функція $f \in \mathbb{C}^T$ є колостандартною (в сенсі означення 3.1), якщо і тільки якщо функція $t \rightarrowtail |f(t)|^2$ – s-інтегровна. Надалі вважатимемо, що потенціал a в різницевому виразі (1) є s-інтегровна функція.*

3.4. Наслідок. *Нехай $\xi \in \mathbb{C}$ лежить зовні деякого стандартного околу відрізка $[-1,1]$ в комплексній площині і не є власним значенням операторів L, L_-, L_+. Тоді функція $(L-\xi)^{-1}f$ – колостандартна, якщо f – колостандартна.*

Доведення. При умові, накладеній на потенціал a, аналогічне твердження доведено в [4] для резольвент $(L_\pm - \xi)^{-1}$. Там же показано, що звуження $z^-(z^+)$ на "піввісь" $T_-(T_+)$ є колостандартним, як елемент (гільбертового) простору $\mathbb{C}^{T_-}(\mathbb{C}^{T_+})$. Безпосередньо з формули (8) видно, що $|K_\xi(f)| \ll \infty$, якщо функція f колостандартна. Крім того, зовні стандартного околу спектра $\sigma(L)$ маємо $|w(\xi)| \gg 0$. Тому на підставі формули (9) заключаємо, що резольвента $(L-\xi)^{-1}$ зберігає (умовну) колостандартність.

3.5. Означення. *Власне значення λ оператора L називається побічним, якщо його відстань до відрізка $[-1,1] \subset \mathbb{C}$ не є нескінченно малою:* $\operatorname{dist}(\lambda, [-1,1]) \gg 0$.

3.6. Зауваження. *Так само, як в [4] можна довести, що кількість побічних власних значень оператора L (включаючи їх алгебраїчну кратність) є стандартне натуральне число. Зазначимо, що загальна кількість власних значень (з врахуванням алгебраїчної кратності) дорівнює* $\dim \mathbb{C}^T = 2m \approx \infty$.

Далі нам зручно скористатись наступним твердженням.

3.7. Лема. *Нехай $\lambda \in \mathbb{C}$ – побічне власне значення оператора L, але резольвентне значення операторів L_-, L_+. Припустимо, що $f \in \mathbb{C}$ така колостандартна функція, що рівняння $(L-\xi)u = f$ має розв'язок u. Тоді воно має колостандартний розв'язок u.*

Доведення. випливає безпосередньо з теореми 2.1. Справді, функція u, визначена формулою (11) буде колостандартною для довільного C такого, що $|C| \ll \infty$ (наприклад, для $C = 0$).

3.8. Теорема. *Нехай λ – побічне власне значення оператора L, але резольвентне значення для операторів L_-, L_+. Тоді підпростір N_λ власних і приєднаних функцій оператора L має базу, елементи якої колостандартні.*

Доведення. З оцінок для функцій $t \rightarrowtail z^\pm(t) = z^\pm(t,\lambda)$, отриманих в [3], випливає, що звуження z^- на T_-, а також z^+ на T_+ – s-інтегровне з квадратом, тобто є колостандартним елементом простору, відповідно, $\mathbf{C}^{T_-}$ і $\mathbf{C}^{T_+}$. Власна функція z оператора L, котра відповідає власному значенню λ, визначається формулою

$$z(t,\lambda) = \begin{cases} z^-(t,\lambda) & t \leqslant 0, \\ Cz^+(t,\lambda) & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{17}$$

де сталу C треба вибрати з умови $z^-(0,\lambda) = Cz^+(0,\lambda)$. При наших припущеннях $|z^+(0,\lambda)| \gg 0$, тому $|C| \ll \infty$. Тому з (17) випливає колостандартність функції z. Колостандартність приєднаних функцій випливає з леми 3.7, якщо їх знаходити за індукцією з рівняння $(L-\xi)z_{k+1} = z_k$, $z_0 = z$.

3.9. Зауваження. *Теорема 3.8 свідчить про те, що побічні власні значення є справжніми (аутентичними) в тому розумінні, що їм відповідають s-інтегровні з квадратом власні і приєднані функції. Власні значення оператора L, які не є побічними, природно вважати точками "неперервного" спектра, не тільки тому, що вони нескінченно близькі між собою, але й тому, що їм відповідають власні функції, які не є s-інтегровними з квадратом. Згадаємо, що власні функції неперервного спектра диференціального оператора не є елементами гільбертового простору, в якому діє оператор.*

З теореми 3.8 випливає також, що спектральний проектор P_λ, який відповідає власному значенню λ, є *s-компактним*, тобто $P_\lambda f$ – колостандартна функція при умові, що $\|f\| \ll \infty$.

1. Lyantse V. E., Kudryk T. Introduction to Nonstandard Analysis. – Math. Studii. Monograph Series. – Vol. 3. – VNTL Publ. 1997. – 255 p.
2. Lyantse V. E., Yavorsky Yu. M. *A nonstandard Difference Sturm-Liouville operator* // Bull. Polish. Acad. Sc. – 1998. – Vol. 46, № 3. – P. 285-290.
3. Lyantse V. E., Yavorsky Yu. M. *Nonstandard Sturm-Liouville Difference operator. I* // Matematychni Studii. – 1998. – Vol. 10, N 1. – P. 54-68.
4. Lyantse V. E., Yavorsky Yu. M. *Nonstandard Sturm-Liouville Difference operator. II* // Matematychni Studii. – 1999. – Vol.10, N 1. – C. 71-82.
5. Nelson E. *Internal Set Theory* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – Vol. 83. – P. 1165-1198.

Стаття надійшла до редколегії 03.11.1998

УДК 515.12

ПРО ФУНКТОРІАЛЬНІ ТОПОЛОГІЗАЦІЇ І ФУНКТОРІАЛЬНІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ СТРУКТУРИ НА ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

В. С. Левицька

Levytska V. S. On functorial topologies and functorial differentiable structures on function spaces. We consider some problems concerning existence of functorial topologizations of the set of continuous functions and functorial differentiable structures on function spaces that are infinite-dimensional manifolds.

1. Вступ

Різним топологіям на просторах неперервних відображень топологічних просторів присвячено багато праць (див. [1]). В препринті [5] розглянуто теорію функціональних просторів з категорної точки зору.

Оскільки простори неперервних відображень є, як правило, нескінченновимірними об'єктами, їх дослідження проводились також в рамках нескінченновимірної топології. В праці [7] цілий розділ присвячено проблемам, що стосуються функціональних просторів. Зміст даної статті якраз і пов'язано з двома такими проблемами.

Нехай ℓ^2 — сепарабельний гільбертовий простір і $B(n)$ — куля радіуса n в ℓ^2. За теоремою Банаха-Алаоглу, куля $B(n)$ компактна в слабкій топології (позначаємо її $(B(n), \mathrm{w})$). Позначимо через (ℓ^2, bw) пряму границю послідовності компактів $(B(n), \mathrm{w})$, $n \in \mathbb{N}$ (bw від bounded weak). Відомо, що для досить широкого класу просторів X і Y множина неперервних відображень $C(X, Y)$ в компактно-відкритій топології гомеоморфна ℓ^2-многовидові, зокрема, просторові ℓ^2. Проблема полягає в тому, чи існує природна топологізація множини $C(X, Y)$, яка перетворює цю множину в (ℓ^2, bw)-многовид.

Припустимо, що, крім того, простір Y має структуру C^∞-многовиду. Відомо, що тоді простір $C(X, Y)$ має природну структуру C^∞-ℓ^2-многовиду [3]. Більше того, в [3] запроваджено структуру C^s-многовиду на просторах $C^r(X, Y)$ з компактного C^r-многовиду X в многовид Y класу C^{r+s+2}, що допускає розбиття одиниці. Зауважено, що аналогічно така структура може бути означена і для випадку, коли X — компактний C^r-многовид з краєм.

Альфа-теорема з [3] стверджує, що згадана структура є функторіальною в тому сенсі, що для кожного відображення $f: X \to X'$ класу C^r індуковане відображення

$$C^r(X', Y) \longrightarrow C^r(X, Y),\ g \mapsto g \circ f,$$

є класу C^r.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54C35, 54B30, 58D15.

Якщо X — недискретний компактний метричний простір, а Y — недискретний локально-компактний $\mathbb{ANR}$-простір, то простір неперервних функцій $C(X,Y)$ в топології рівномірної збіжності гомеоморфний області в гільбертовому просторі $\mathfrak{l}^2$, а отже, має структуру гладкого $\mathfrak{l}^2$-многовиду ($\mathbb{ANR}$ означає абсолютний околовий ретракт в класі метричних просторів; див. [2]). В [7] сформульовано питання про існування природної (тобто такої, що функторіально залежить від X) гладкої структури на $C(X,Y)$ у випадку, коли Y не є гладким многовидом.

2. Функторіальні топологізації просторів неперервних відображень

Для топологічних просторів X і Y через $C(X,Y)$ позначаємо множину всіх неперервних функцій з простору X в простір Y. При фіксованому X одержуємо коваріантний функтор $C(X,-)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$, а при фіксованому Y — котраваріантний функтор $C(-,Y)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$.

Нехай $U\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$ — забуваючий функтор.

Означення 2.1. *Топологізацією функтора $C(X,-)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$ називається функтор $C_F(X,-)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{TOP}$ такий, що $UC_F(X,-)=C(X,-)$.*

Аналогічне означення дається для контраваріантного функтора $C(-,Y)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$, а також для функторів, означених на деяких підкатегоріях категорії TOP.

Якщо $Y=\mathbb{R}$, то замість $C(X,Y)$ вживається позначення $C(X)$. Відповідно, контраваріантний функтор $C(-,\mathbb{R})$ позначається просто C.

Для кожного $x\in X$ через $\mathrm{ev}_x\colon C(X,Y)\to Y$ позначається відображення *обчислення*, $\mathrm{ev}_x(f)=f(x)$, $f\in C(X,Y)$. Розглянемо на $C(X,Y)$ найслабшу топологію, при якій всі відображення обчислення $\mathrm{ev}_x\colon C(X,Y)\to Y$ неперервні. Така топологія називається топологією поточкової збіжності і утворений топологічний простір позначається $C_p(X,Y)$ (або $C_p(X)$, якщо $Y=\mathbb{R}$).

Означення 2.2. *Топологізація $C_F(-,Y)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{TOP}$ функтора $C(-,Y)\colon \mathrm{TOP}\to\mathrm{SET}$ називається регулярною, якщо звуження відображення ev_x на підпростір сталих відображень є гомеоморфізмом цього підпростору на Y.*

Твердження 2.3. *Не існує регулярної функторіальної топологізації C_F функтора C такої, що простір $C_F([0,1])$ гомеоморфний $(\mathfrak{l}^2,\mathrm{bw})$.*

Доведення. Припустимо, що така топологізація C_F існує. Нехай $x\in X$. Розглянемо відображення вкладення $f_x\colon\{*\}\to[0,1]$, що переводить $*$ в $x\in[0,1]$. З функторіальності випливає, що відображення $C_F(f_x)$ неперервне, а за регулярністю, відображення $\mathrm{ev}_x=\mathrm{ev}_*\circ C_F(f_x)$ також неперервне. Звідси випливає, що тотожне відображення

$$1_{C([0,1])}\colon C_F([0,1])\to C_p([0,1])$$

неперервне, а тому простір $C_p([0,1])$ — σ-компактний. (Нагадаємо, що топологічний простір називається *σ-компактним*, якщо він є об'єднанням зліченної сім'ї своїх компактних підпросторів.) Це суперечить теоремі М. Величка (див. також узагальнення цього результату в [4]), згідно з якою простір $C_p(Z)$ σ-компактний, якщо і тільки якщо Z скінченний.

3. Функторіальні диференційовні структури на просторах неперервних функцій

Відомо, що простір неперервних відображень $C(X,Y)$ в топології рівномірної збіжності гомеоморфний ℓ^2-многовидові, якщо тільки X — нескінченний метричний сепарабельний простір і Y — нескінченний ANR-простір [6].

Позначимо через ℓ^2-$\mathcal{M}$ категорію ℓ^2-многовидів і неперервних відображень, через C^k-ℓ^2-$\mathcal{M}$ — категорію ℓ^2-многовидів і гладких відображень класу C^k, а через $U\colon C^k$-ℓ^2-$\mathcal{M} \to \ell^2 - \mathcal{M}$ — забуваючий функтор. Поданий вище факт можна записати у вигляді: $C(-,Y)$ є контраваріантним функтором з категорії нескінченних метричних сепарабельних просторів і неперервних відображень в категорію ℓ^2-$\mathcal{M}$.

Припустимо, що, крім того, простір Y має структуру C^∞-многовиду. Відомо, що тоді простір $C(X,Y)$ має природну структуру C^∞-ℓ^2-многовиду [3].

Нехай тепер Y — тріод, тобто факторпростір диз'юнктного об'єднання трьох відрізків за множиною, що містить рівно одну кінцеву точку від кожного з відрізків. Образ цієї множини при факторвідображенні позначається x_0. Будемо розглядати простір $C([0,1],Y)$. Для кожного $y \in Y$ позначимо через c_y постійне відображення, яке набуває єдине значення y.

Позначимо через $\mathcal{S}$ категорію нескінченних метричних сепарабельних просторів і неперервних відображень. Припустимо, що існує контраваріантний функтор $F\colon \mathcal{S} \to C^k - \ell^2 - \mathcal{M}$, де $k \geqslant 1$, такий, що $UF = C(-,Y)$. Ототожнимо простір $F([0,1])$ з простором ℓ^2. Будемо вважати, що простір Y лежить в ℓ^2 як множина сталих відображень, причому елемент c_{y_0} ототожнюється з нулем простору ℓ^2.

Крім того, ототожнимо дотичний простір $\mathrm{T}_{c_{y_0}} F([0,1]) \approx \mathrm{T}_0 \ell^2$ з простором ℓ^2.

Позначимо через $\exp^c Y$ простір непорожних замкнених зв'язних підмножин в Y, наділений метрикою Гаусдорфа,

$$\rho(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A).$$

Нескладно показати, що існує неперервне відображення $R\colon \exp^c Y \to Y$ таке, що $R(A) \in A$ для кожного $A \in \exp^c Y$.

Позначимо через $r\colon [0,1] \to [0,1]$ ретракцію з образом $\{1\}$. Зауважимо, що Y — множина нерухомих точок відображення Fr (нагадаємо, що множина Y ототожнена з множиною сталих відображень). Оскільки Fr — C^k-відображення, то $Fr(x) = \mathrm{T}Fr(x) + \varepsilon(x)$, де $\varepsilon\colon \ell^2 \to \ell^2$ — відображення, для якого

$$\lim_{||x|| \to 0} \frac{||\varepsilon(x)||}{||x||} = 0.$$

Позначимо через d метрику, породжену нормою в ℓ^2. Тоді для кожних $x, y \in Y$, $\lambda \in [0,1]$ маємо

$$\begin{aligned}
&d(\mathrm{T}Fr(\lambda x + (1-\lambda)y), \lambda x + (1-\lambda)y) = \\
&= d(\lambda \mathrm{T}Fr(x) + (1-\lambda)\mathrm{T}Fr(y), \lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \\
&\leqslant \lambda d(\mathrm{T}Fr(x), x) + (1-\lambda) d(\mathrm{T}Fr(y), y) = \\
&= \lambda d(\mathrm{T}Fr(x), Fr(x)) + (1-\lambda) d(\mathrm{T}Fr(y), Fr(y)) \leqslant \\
&\leqslant \lambda ||\varepsilon(x)|| + (1-\lambda)||\varepsilon(y)|| \leqslant \max\{||\varepsilon(x)||, ||\varepsilon(y)||\}.
\end{aligned}$$

(Тут і далі для відображення $f\colon \ell^2 \to \ell^2$ класу C^k через $\mathrm{T}f$ позначено дотичне відображення

$\mathrm{T}_0 l^2 \to \mathrm{T}_0 l^2$.) Оскільки

$$d(Fr(\lambda x + (1-\lambda)y), \mathrm{T}Fr(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant ||\varepsilon(\lambda x + (1-\lambda)y)|| \leqslant$$
$$\leqslant \max\{||\varepsilon(x)||, ||\varepsilon(y)||\}, \qquad (1)$$

то

$$d(Fr(\lambda x + (1-\lambda)y), \lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant 2\max\{||\varepsilon(x)||, ||\varepsilon(y)||\}.$$

Означимо відображення $q: Y \times Y \times [0,1]$ формулою

$$q(x, y, \lambda) = R(Fr(\lambda x + (1-\lambda)y))([0,1])).$$

(Зауважимо, що $Fr(\lambda x + (1-\lambda)y))([0,1]) \in \exp^c Y$). З формули (1) випливає, що

$$d(q(x, y, \lambda), \lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant 2\max\{||\varepsilon(x)||, ||\varepsilon(y)||\}.$$

Наведемо факт існування відображення q з вказаними вище властивостями до суперечності. Позначимо три відрізки, що перетинаються по точці y_0 і дають в об'єднанні Y, через I_1, I_2, I_3. Існують точки $x_i \in I_i$, $i = 1,2,3$, з властивостями:

(1) $||x_1|| = ||x_2|| = ||x_3|| = \eta$ для деякого $\eta > 0$;

(2) $\max\{||\varepsilon(x_1)||, ||\varepsilon(x_2)||, ||\varepsilon(x_3)||\} < \dfrac{\eta}{100}$.

З міркувань зв'язності випливає, що існує $\lambda_{ij} \in [0,1]$ таке, що

$$||\lambda_{ij} x_i + (1 - \lambda_{ij} x_j)|| < \frac{\eta}{100} \qquad (2)$$

при $i \neq j$. Застосовуючи елементарно-геометричні міркування, нескладно показати, що $||(x_i + x_j)/2|| < \dfrac{\eta}{50}$ при $i \neq j$. Тоді

$$d(x_2, x_3) = d(x_1 + x_3, x_1 + x_3) < \frac{4\eta}{50} < \frac{\eta}{10}$$

і $d(\lambda_{23} x_2 + (1-\lambda_{23})x_3), x_2 < \dfrac{\eta}{10}$, що суперечить (2).

Таким чином, ми довели, що не існує функтора F з вказаними вище властивостями.

На завершення зауважимо, що міркування, наведені в цьому пункті, можна застосувати і до інших просторів Y, що не є многовидами.

1. Архангельский А. В. Топологические пространства функций. – М., Изд-во МГУ, 1989.
2. Борсук К. Теория ретрактов. – М., Мир.
3. Ленг С. Ведение в теорию дифференцируемых многообразий. – М., Мир, 1967.
4. Ткачук В. В., Шахматов Д. Б. *Когда пространство $C_p(X)$ σ-счетно компактно?* // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. – 1987. – N 1. – С. 70-72.
5. Dydak J. Covariant and contravariant points of view in topology with applications to function spaces, Preprint.
6. Geoghegan R. *On spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions I* // Topology. – 1972. – Vol. 11. – P. 159-177.
7. West J. Open problems in infinite-dimensional topology. – In: Open problems in topology (J. van Mill, G. M. Reed, Eds.) Elsevier, 1990.

Стаття надійшла до редколегії 10.06.98

УДК 519.21

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ МАТРИЧНОЗНАЧОЇ ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Я. І. Єлейко, І. І. Ніщенко

Yeleiko Ya. I., Nishchenko I. I. A limit theorem for random matrix-valued evolution. The random matrix-valued evolution $N^{\varepsilon}(t)$ in random fase space generated by a regenerative process $x(t)$ is considered. The asymptotic behaviour of $M\,N^{\varepsilon}(t)$ for $\varepsilon \to 0$, $t \to \infty$ is investigated under the condition that the matrix $M\,N^{\varepsilon}(\tau)$ is reducible, where τ is the first moment of the regenerative process.

Нехай E – повний метричний сепарабельний простір; $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(E)$ $-\sigma$ -алгебра борелівських підмножин; $x(t)$ – регенеруючий процес із значеннями в фазовому просторі $(E, \mathfrak{A})$ з моментом регенерації τ. Це означає, що знайдеться послідовність випадкових величин $\{\tau_n\}$, така, що $\tau_{n+1} > \tau_n$, $\tau_0 = 0$, і обривні випадкові процеси

$$x^n(t) = x(\tau_n + t), \quad 0 \leqslant t < \tau_{n+1} - \tau_n$$

незалежні в сукупності і однаково розподілені.

Позначимо $\tau \equiv \tau_1$, і вважатимемо, що $M\tau < \infty$.

Розглянемо сім'ю невід'ємних матричнозначних процесів $\xi^{\varepsilon}(t)$

$$\xi^{\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \xi^{\varepsilon}_{1\,1}(t) & \cdots & \xi^{\varepsilon}_{1\,d}(t) \\ & \cdots & \\ \xi^{\varepsilon}_{1\,d}(t) & \cdots & \xi^{\varepsilon}_{d\,d}(t) \end{pmatrix}, \quad \xi^{\varepsilon}_{i\,j}(t) \geqslant 0,$$

котрі функціонально залежать від малого параметра ε, але статистично не залежать від регенеруючого процесу $x(t)$, $t \geqslant 0$.

За процесом $\xi^{\varepsilon}(t)$ та послідовністю моментів регенерації $\{\tau^n\}$ побудуємо матричнозначну еволюцію

$$N^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \xi^{\varepsilon}(t), & 0 \leqslant t \leqslant \tau_1, \\ \xi^{\varepsilon}(\tau_1)\xi^{\varepsilon(1)}(t-\tau_1), & \tau_1 < t \leqslant \tau_2, \\ \cdots & \\ \xi^{\varepsilon}(\tau_1)\ldots\xi^{\varepsilon(k)}(t-\tau_k), & \tau_k < t \leqslant \tau_{k+1}, \end{cases}$$

де $\xi^{\varepsilon(k)}$, $k = 1, 2, \cdots$ – послідовність незалежних копій процесу $\xi^{\varepsilon}(t)$; $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Вважатимемо, що послідовність матричнозначних мір

$$K^{\varepsilon}(du) = M(\xi^{\varepsilon}(\tau)),\ \tau \in du)$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 60K15.

слабко збігається до матричнозначної міри $K(du)$ при $\varepsilon \to 0$, причому матриця $K(\infty)$ повних мас мір є розкладною, тобто множину $I = \{1, 2, \ldots, d\}$ можна подати у вигляді об'єднання $I = \bigcup_{k=1}^{r} I_k$ скінченної кількості неперетинних множин $I_1, \ldots, I_r$ таких, що

$$K_{i\,j}(\infty) = 0 \quad \text{при} \quad i \in I_k,\ j \in I_l,\ k \neq l.$$

Вважатимемо також, що звуження $K^{(s)}(\infty)$ матриці $K(\infty)$ на множину I_s є нерозкладною матрицею з перроновим коренем, котрий дорівнює одиниці; матриця $K(dy)$ нерешітчата і

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\varepsilon} \int_{t}^{\infty} yK^{\varepsilon}(dy) = (0) \tag{1}$$

При таких припущеннях знайдемо математичне сподівання $MN^{\varepsilon}(t)$ випадкової еволюції $N^{\varepsilon}(t)$.

Для $MN^{\varepsilon}(t)$ запишемо формулу повної імовірності за моментом регенерації τ. Матимемо

$$MN^{\varepsilon}(t) = M(N^{\varepsilon}(t),\, t < \tau) + \int_{0}^{t} M(\xi^{\varepsilon}(\tau)),\, \tau \in du)M(N^{\varepsilon}(t-u)),$$

або

$$X^{\varepsilon}_{i\,j}(t) = A^{\varepsilon}_{i\,j}(t) + \sum_{l=1}^{d} \int_{0}^{t} K^{\varepsilon}_{i\,l}(du) X^{\varepsilon}_{l\,j}(t-u), \tag{2}$$

де позначено

$$X^{\varepsilon}(t) = MN^{\varepsilon}(t), \quad A^{\varepsilon}(t) = M(N^{\varepsilon}(t),\, t < \tau).$$

Зафіксуємо r координат $w_1 \in I_1, \ldots, w_r \in I_r$ і нехай $\tau^{\varepsilon} = \tau_{\alpha}$, де

$$\alpha = \alpha(\varepsilon) = \min\{n \geqslant 1 :\ K^{\varepsilon(n)}_{w_s\,w_m}(\infty) > 0,\ s, m = \overline{1, r}\}.$$

Розглянемо стрибкоподібну еволюцію $\widetilde{N}^{\varepsilon}(t)$

$$\widetilde{N}^{\varepsilon}(t) = N^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}_{k}), \quad \tau^{\varepsilon}_{k} \leqslant t < \tau^{\varepsilon}_{k+1},\ k = 0, 1, \ldots$$

де $\{\tau^{\varepsilon}_{k}\}$ – послідовність моментів регенерації, породжена моментом τ^{ε}. Тоді якщо

$$R^{\varepsilon}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K^{\varepsilon(n)}(t)$$

– матриця відновлення, побудована за матрицею $K^{\varepsilon}(t)$, а

$$P^{\varepsilon}(dt) = M(\widetilde{N}^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}),\, \tau^{\varepsilon} \in dt),$$

то елементи $R^{\varepsilon}_{i\,w_k}(t)\, (i \in I,\, k = \overline{1, r})$ матриці $R^{\varepsilon}(t)$ задовольняють рівняння

$$R^{\varepsilon}_{i\,w_k}(t) = 1 + \sum_{l=1}^{r} \int_{0}^{t} P^{\varepsilon}_{i\,w_l}(du) R^{\varepsilon}_{w_l\,w_k}(t-u). \tag{3}$$

Формули (3) дають змогу вивчати асимптотику $R^{\varepsilon}_{i\,w_k}(t)$ за допомогою $R^{\varepsilon}_{w_s\,w_k}(t)$, а для знаходження $R^{\varepsilon}_{w_s\,w_k}(t)$ маємо рівняння

$$R^{\varepsilon}_{w_s\,w_k}(t) = \sum_{l=1}^{r} \int\limits_0^t P^{\varepsilon}_{w_s\,w_l}(du) R^{\varepsilon}_{w_l\,w_k}(t-u). \tag{4}$$

Щоб мати можливість застосовувати до рівняння (4) відомі результати теорії відновлення, треба забезпечити скінченність величини

$$m_s = \int\limits_0^\infty t P_{w_s\,w_s}(dt).$$

Покажемо, що з умови

$$a_{i\,j} = \int\limits_0^\infty t K_{i\,j}(dt) < \infty,$$

яка виконується згідно з (1), випливає скінченність величини m_s. Функції $P^{\varepsilon}_{i\,w_s}(t)$ визначаються із співвідношень

$$P^{\varepsilon}_{i\,w_s}(t) = K^{\varepsilon}_{i\,w_s}(t) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{j\in I_l \\ j\neq w_l}} \int\limits_0^t K^{\varepsilon}_{i\,j}(du) P^{\varepsilon}_{j\,w_s}(t-u). \tag{5}$$

Переходячи в (5) до границі при $t \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, отримуємо рівняння для знаходження $P_{i\,w_s}(\infty)$:

$$P_{i\,w_s}(\infty) = K_{i\,w_s}(\infty) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{j\in I_l \\ j\neq w_l}} K_{i\,j}(\infty) P_{j\,w_s}(\infty). \tag{6}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що

$$P_{i\,w_s}(\infty) = \begin{cases} u_i^{(s)} / u_{w_s}^{(s)}, & \text{при } i \in I_s, \\ 0 & \text{при } i \notin I_s \end{cases}$$

є розв'язком рівняння (6), де $\vec{u}^{(s)}$ – правий власний вектор матриці $K^{(s)}(\infty)$, відповідний її перроновому кореню 1.

Позначимо

$$\widehat{P}_{i\,w_s}(p) = \int\limits_0^\infty e^{pt} P_{i\,w_s}(dt), \qquad \widehat{K}_{i\,w_s}(p) = \int\limits_0^\infty e^{pt} K_{i\,w_s}(dt).$$

Застосувавши до рівняння

$$P_{i\,w_s}(t) = K_{i\,w_s}(t) + \sum_{\substack{j\in I_s \\ j\neq w_s}} \int\limits_0^t K_{i\,j}(du) P_{j\,w_s}(t-u)$$

перетворення Лапласа, отримаємо

$$\widehat{P}_{i\,w_s}(p) = \widehat{K}_{i\,w_s}(p) + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} \widehat{K}_{i\,j}(p)\widehat{P}_{j\,w_s}(p).$$

Використовуючи те, що

$$\widehat{P}_{i\,w_s}(0) = P_{i\,w_s}(\infty), \quad \widehat{K}_{i\,w_s}(0) = K_{i\,w_s}(\infty), \quad P_{i\,w_s}(\infty) = \sum_{j\in I_s} K_{i\,j}(\infty)P_{i\,w_s}(\infty),$$

можемо записати:

$$\frac{1}{p}[\widehat{P}_{i\,w_s}(p) - \widehat{P}_{i\,w_s}(0)] = \frac{1}{p}\left[\widehat{K}_{i\,w_s}(p) - \widehat{K}_{i\,w_s}(0)\right] +$$

$$+\sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} \frac{1}{p}\left[\widehat{K}_{i\,w_s}(p) - \widehat{K}_{i\,w_s}(0)\right]\widehat{P}_{j\,w_s}(p) + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} \frac{1}{p}\left[\widehat{P}_{j\,w_s}(p) - \widehat{P}_{j\,w_s}(0)\right]\widehat{K}_{i\,j}(0).$$

Переходячи до границі при $p \to 0$ і враховуючи, що

$$\widehat{P}'_{i\,w_s}(0) = \int\limits_0^\infty tP_{i\,w_s}(dt) = m_{i\,w_s}, \quad \widehat{K}'_{i\,w_s}(0) = \int\limits_0^\infty tK_{i\,w_s}(dt) = a_{i\,w_s},$$

отримуємо

$$m_{i\,w_s} = \sum_{j\in I_s} a_{i\,j}P_{j\,w_s}(\infty) + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} K_{i\,j}(\infty)m_{j\,w_s}$$

або

$$m_{i\,w_s} = \sum_{j\in I_s} a_{i\,j}\frac{u_j^{(s)}}{u_{w_s}^{(s)}} + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} K_{i\,j}(\infty)m_{j\,w_s}.$$

Нехай $\vec{v}^{(s)}$ – лівий власний вектор матриці $K^{(s)}(\infty)$. Помножимо останню рівність на $v_i^{(s)}$ і підсумуємо за всіма $i \in I_s$. Матимемо:

$$\sum_{i\in I_s} v_i^{(s)}\, m_{i\,w_s} = \sum_{i,\,j\in I_s} \frac{v_i^{(s)}a_{i\,j}u_j^{(s)}}{u_{w_s}^{(s)}} + \sum_{\substack{j\in I_s\\ j\neq w_s}} v_j^{(s)}m_{j\,w_s}.$$

Звідси

$$m_s = \sum_{i,\,j\in I_s} \frac{v_i^{(s)}a_{i\,j}u_j^{(s)}}{v_{w_s}^{(s)}u_{w_s}^{(s)}} < \infty.$$

Покладемо

$$\rho_s^\varepsilon = \frac{1 - P^\varepsilon_{w_s\,w_s}(\infty)}{m_s}, \quad s = \overline{1,r}; \quad \rho^\varepsilon = \sum_{s=1}^r \rho_s^\varepsilon,$$

$$c^\varepsilon_{s\,s} = -\frac{\rho_s^\varepsilon}{\rho^\varepsilon}; \quad c^\varepsilon_{s\,m} = \frac{P^\varepsilon_{w_s\,w_m}(\infty)}{m_s\rho^\varepsilon},\ s \neq m.$$

Тоді можемо записати

$$P^{\varepsilon}_{w_s\,w_m}(\infty) = \delta_{s\,m} + \rho^{\varepsilon} m_s c^{\varepsilon}_{s\,m}.$$

З побудови бачимо, що $c^{\varepsilon}_{s\,m} \geqslant 0$ при $s \neq m$ і

$$\sum_{m\neq s} c^{\varepsilon}_{s\,m} \leqslant -c^{\varepsilon}_{s\,s} \leqslant 1.$$

Отже, існує підпослідовність $\varepsilon' \to 0$ така, що існують границі

$$c_{s\,m} = \lim_{\varepsilon'\to 0} c^{\varepsilon'}_{s\,m};$$

а тому

$$P^{\varepsilon'}_{w_s\,w_m}(\infty) = \delta_{s\,m} + \rho^{\varepsilon'} m_s c_{s\,m} + o(\rho^{\varepsilon'}).$$

Ми перебуваємо в умовах праці [1], згідно з якою при $w_s \in I_s$, $w_k \in I_k$

$$R^{\varepsilon'}_{w_s\,w_k}\Big(\frac{t}{\rho^{\varepsilon'}}\Big) \underset{\varepsilon'\to 0}{\longrightarrow} q_{s\,k}(t)\frac{1}{m_k}, \tag{7}$$

де $M = \mathrm{diag}\{m_1, \ldots, m_r\}$, $C = (c_{s\,m})^r_{s,m=1}$, $q_{s\,k}(t)$ – – $(s,\,k)$– ий елемент матриці (e^{tC}). Співвідношення (3) показують, що при $i \in I_s$, $w_k \in I_k$

$$R^{\varepsilon'}_{i\,w_k}\Big(\frac{t}{\rho^{\varepsilon'}}\Big) \underset{\varepsilon'\to 0}{\longrightarrow} \frac{u^{(s)}_i}{u^{(s)}_{w_s}}\, q_{s\,k}(t)\frac{1}{m_k}. \tag{8}$$

Тоді, якщо послідовність матриць $A^{\varepsilon}(t)$ є рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\,\infty)$, то для $i \in I_s$, $j \in I_k$ можемо записати

$$X^{\varepsilon'}_{i\,j}\Big(\frac{t}{\rho^{\varepsilon'}}\Big) \underset{\varepsilon'\to 0}{\longrightarrow} \frac{u^{(s)}_i}{u^{(s)}_{w_s}}\, q_{s\,k}(t)\,\frac{1}{m_k}\,\int_0^{\infty} A_{w_k\,j}(y)dy, \tag{9}$$

де $\int_0^{\infty} A(y)dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\infty} A^{\varepsilon}(y)dy$, $X^{\varepsilon}_{i\,j}(t)$ – розв'язок багатовимірного рівняння відновлення (2).

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. *Нехай послідовність матриць $A^{\varepsilon}(t)$ є рівномірно безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\,\infty)$. Тоді, якщо*

$$\lim_{t\to\infty}\,\sup_{\varepsilon}\int_t^{\infty} yK^{\varepsilon}(dy) = (0)$$

і матриця $K(dy)$ нерешітчата, то можна вибрати таку послідовність $\rho^{\varepsilon} \to 0$, що існує $\lim_{\varepsilon\to 0} MN^{\varepsilon}(t/\rho^{\varepsilon})$ і граничне зображення задається формулою (9).

1. Куция П. П. *Одна теорема многомерного восстановления*// Изв. АН УССР. – 1989. – Т.135, N3. – С.463- 466.
2. Єлейко Я. І., Шуренков В. М. *Деякі властивості випадкових еволюцій*// Укр. мат. ж. – 1995. – Т.47, N 10.

Стаття надійшла до редколегії 07.11.98

УДК 539.3

ПОБУДОВА І АНАЛІЗ РІВНЯНЬ РУХУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ІЗ МАТЕРІАЛУ МУРНАГАНА

П. П. Доманський

Domans'kyj P. P. Constructing and analysis of motion equations for cylindrical solids of Murnaghan material. One-dimentional model of motion equations for cylindrical solids of Murnaghan material is derived. The derivation method is relied on expanding base parameters in series by tensor basis. Special cases of the obtained equations are considered.

1. Вихідні співвідношення. Розглянемо однорідне ізотропне пружне тіло K. Розрізняємо дві конфігурації цього тіла: γ_0 і γ_τ. Першу з них називаємо відліковою, а другу актуальною. Відлікова конфігурація вважається природною (недеформованою), коли в тілі відсутні напруження і деформації. Актуальна конфігурація виникла внаслідок дії на тіло K з моменту часу $\tau = \tau_0$ масових і поверхневих сил.

Приймемо, що в γ_0 - конфігурації тіло K є циліндричним сталого поперечного перерізу D, два характерні розміри якого є значно менші від висоти. Положення точок осі тіла будемо характеризувати радіус-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}^{\,0}_3$, де ξ^3 – осьова координата ($0 \leqslant \xi^3 \leqslant b$), $\vec{\ni}^{\,0}_3$ – базисний орт в напрямку цієї осі. Положення довільної точки $x_0 \in X_0$ визначаємо радіус-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \quad \vec{R}_0 = \vec{R}_0(\xi^1, \xi^2) = \xi^\alpha \vec{\ni}^{\,0}_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2), \quad (\xi^1, \xi^2) \in D.$$

Приймемо надалі, що у формулах, де відбувається підсумовування за індексами, що повторюються зверху і знизу, індекси α, β, γ змінюються від 1 до 2, а всі інші – від 1 до 3.

Вектор переміщення з γ_0 в γ_τ-конфігурацію $\vec{u} = \vec{u}(\vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \tau)$ подамо у вигляді розвинення за заданою базою тензорних функцій $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{30}; \tau). \tag{1}$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73C50.

Тут індекси "$(i-1)$" та "(i)" вказують ранг тензорних функцій, "$\overset{i}{\cdot}$" означає i-кратний внутрішній добуток тензорів. Як випливає з формули Тейлора, для відображення одного нормованого простору в інший, за базу можна вибрати, зокрема, систему тензорних функцій $\{\vec{R}_0^n\}$, де $\vec{R}_0^n$ – n-кратний зовнішній добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе.

У праці [1] показано, що за наближеної одновимірної постановки задачі рівняння руху циліндричного тіла можна записати у вигляді

$$\int\limits_D \left(\vec{\ni}_0^3 \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} - \vec{\ni}_0^\alpha \cdot \hat{P} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} - \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \right) d\Sigma_0 + \hat{F}^{(i)} = 0 \ (i = \overline{1,N}). \quad (2)$$

Тут

$$\hat{F}^{(i)} = \int\limits_D \rho_0 \vec{f}_0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\Sigma_0 + \int\limits_{\Gamma_0} \vec{n}_{12} \cdot \hat{P} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} dl_0,$$

$\hat{P}$ – тензор напружень Піоли-Кірхгофа, $\{\vec{\ni}_0^k\}$ – база, біортогональна до бази $\{\vec{\ni}_k^0\}$, $\vec{f}_0$– вектор масових сил, Γ_0 – межа області D, ρ_0 – густина матеріалу у відліковій конфігурації, $\vec{n}_{12}$ – вектор зовнішньої нормалі до бічної поверхні циліндричного тіла в γ_0-конфігурації, "$\otimes$" – операція тензорного (зовнішнього) добутку.

Метою запропонованої праці є побудова в локальній формі і аналіз рівнянь руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана. Вибір зазначеного матеріалу зумовлений тим, що з нього в частковому випадку одержується широко вживаний стандартний матеріал другого порядку, з котрого, в свою чергу, в частковому випадку одержуємо лінійно пружне тіло.

2. Рівняння руху циліндричного тіла із матеріалу Мурнагана. Густина потенціальної енергії деформації матеріалу Мурнагана задається функцією інваріантів міри деформації Коші-Гріна $\hat{G} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^T$ [2]:

$$U_0 = \frac{1}{4}\left[\left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n}{2}\right) I_1(\hat{G}) + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu - 3l - 2m) I_1^2(\hat{G}) + \right.$$
$$\left. + \left(-2\mu + 3m - \frac{n}{2}\right) I_2(\hat{G}) - m I_1(\hat{G}) I_2(\hat{G}) + \frac{1}{6}(l + 2m) I_1^3(\hat{G}) + \frac{n}{2}\left(I_3(\hat{G}) - 1\right)\right].$$

Тут $\vec{r}$ – радіус-вектор місця точки в γ_τ-конфігурації; $\vec{\nabla}_0$ – набла-оператор Гамільтона в γ_0-конфігурації; λ, μ – сталі Ляме; l, m, n – сталі Мурнагана; індексом "T" позначено операцію транспонуваня. Якщо скористатися формулами для похідних від інваріантів міри деформації Коші-Гріна $\hat{G}$ за градієнтом місця $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$

$$I_1(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = 2\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}, \quad I_2(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = 2\left[I_1(\hat{G})\hat{I} - \hat{G}\right] \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}, \quad I_3(\hat{G})_{\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = 2 I_3(\hat{G}) \vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^T$$

і врахувати, що $\hat{G} = \hat{I} + 2\hat{C}$, де $\hat{C} = \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T$ – тензор деформації Коші-Гріна, а $\hat{\varepsilon}(\vec{u}) = (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T)/2$ – лінійний тензор деформації, то можна одержати

$$\hat{P} = \frac{dU_0}{d\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}} = \frac{1}{4}\left\{\left[-n + 2(2\lambda - n) I_1(\hat{C}) - 8m I_2(\hat{C}) + 4l I_1^2(\hat{C})\right] \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} + 2\left[4\mu + \right.\right.$$
$$\left.\left. + n + 4m I_1(\hat{C})\right] \hat{C} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} + n\left[1 + 2I_1(\hat{C}) + 4I_2(\hat{C}) + 8I_3(\hat{C})\right] \vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^T\right\}. \quad (3)$$

Тут $\hat{I}$ – одиничний тензор, $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона в γ_r-конфігурації, $\vec{r}_0$ – радіус-вектор місця точки в γ_0-конфігурації.

Зауважимо, що

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} = \hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \quad I_1(\hat{C}) = \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \tag{4}$$

і з точністю до членів другого порядку стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$

$$I_2(\hat{C}) = \frac{1}{2}\left[\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\right)^2 - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u})\right], \qquad \vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^{\,T} = \hat{I} - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + \\ + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T, \qquad I_3(\hat{C}) = 0. \tag{5}$$

Якщо підставити (4), (5) в (3) і залишити члени не вище другого порядку стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}$, то отримаємо

$$\hat{P} = \hat{T}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\Big[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + (n - 2m + 2l)(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u})^2 + \\ + (2m - n)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u})\Big]\hat{I} + (2m - n)\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\hat{\varepsilon}(\vec{u}) + n\hat{\varepsilon}^2(\vec{u}) + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \tag{6}$$

де $\hat{T}(\vec{u}) = \lambda \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\hat{I} + 2\mu\hat{\varepsilon}(\vec{u})$ – тензор напружень Коші лінійної теорії пружності.

Знайдемо вектори напружень $\vec{P}_j = \vec{\ni}_j^{\,0} \cdot \hat{P}$. Для цього підставимо (1) у вираз (6) для тензора напружень $\hat{P}$ і домножимо одержаний результат зліва на вектор $\vec{\ni}_j^{\,0}$. Після перетворень отримаємо

$$\vec{P}_j = \sum_{r=1}^{N}\left(\hat{A}_{j1}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \hat{u}^{(r)} + \hat{A}_{j2}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3}\right) + \sum_{r,k=1}^{N}\left(\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)} + \right. \tag{7}$$

$$\left. + \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{B}_{j3}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} + \hat{B}_{j4}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3}\right).$$

Тут

$$\hat{A}_{j1}^{(r+1)} = \left[\lambda \vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \mu\left(\vec{\ni}_0^{\,\alpha} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0} + \delta_j^\alpha \hat{I}\right)\right] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha}, \quad \hat{A}_{j2}^{(r+1)} = \left[\lambda \vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,3} + \mu\left(\vec{\ni}_0^{\,3} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0} + \right.\right. \\ \left.\left. + \delta_j^3 \hat{I}\right)\right] \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)}, \quad \hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} = \left\{\left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \hat{I} + \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \frac{n}{4}\vec{\ni}_0^{\,\alpha} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\right] \otimes \right. \\ \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\beta} + \left[\left(\frac{n}{2} - m + l\right)\vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\beta} + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right)\delta_j^\beta \hat{I} + \left(m - \frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^{\,\beta} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\right] \otimes \\ \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \vec{\ni}_0^{\,\beta} + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\beta}\vec{\ni}_j^{\,0}\right] \otimes \vec{\ni}_0^{\,s} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^{\,0} + \\ \left. + \left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\beta}\hat{I} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\right\} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha}, \quad \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} = \left\{\left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \hat{I} + \right.\right. \\ + \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \frac{n}{4}\vec{\ni}_0^{\,\alpha} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\Big] \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^{\,3} + \left[\left(\frac{n}{2} - m + l\right)\vec{\ni}_j^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,3} + \right. \\ + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right)\delta_j^3 \hat{I} + \left(m - \frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^{\,3} \otimes \vec{\ni}_j^{\,0}\Big] \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \tag{8}$$

$$+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0\Big\}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha},\quad \hat{B}_{j3}^{(k+r+1)}=\Big\{\Big[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^3\hat{I}+$$
$$+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0\otimes\vec{\ni}_0^3+\frac{n}{4}\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_j^0\Big]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_0^\beta+\Big[\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\vec{\ni}_j^0\otimes\vec{\ni}_0^\beta+$$
$$+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\delta_j^\beta\hat{I}+\left(m-\frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^\beta\otimes\vec{\ni}_j^0\Big]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_0^3+$$
$$+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^3\vec{\ni}_0^\beta\otimes\vec{\ni}_0^s\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_s^0\Big\}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},\quad \hat{B}_{j4}^{(k+r+1)}=\Big\{\Big[\left(\lambda+\mu+m-\frac{n}{4}\right)\delta_j^3\hat{I}+$$
$$+\left(l-\frac{m}{2}+\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0\otimes\vec{\ni}_0^3+\left(m-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_0^3\otimes\vec{\ni}_j^0\Big]\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3++\Big[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^3\vec{\ni}_0^3+$$
$$+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0\Big]\otimes\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\hat{I}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_j^0\Big\}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)};$$

δ^{kn},δ_k^n – символи Кронекера.

Якщо внести вирази (7) для векторів $\vec{P}_j$ в систему рівнянь руху (2), згрупувати подібні члени і виконати інтегрування по області D, то одержимо систему диференціальних рівнянь руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана в локальній формі

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{A}_1^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+\hat{A}_2^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{A}_3^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\hat{u}^{(k)}\right)+\sum_{k,r=1}^{N}\Big[\hat{B}_1^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\left(\frac{\partial^2\hat{u}^{(r)}}{(\partial\xi^3)^2}\otimes\right.$$
$$\left.\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}\right)+\hat{B}_2^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(r)}}{(\partial\xi^3)^2}\otimes\hat{u}^{(k)}+\hat{B}_3^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+ \quad (9)$$
$$+\hat{B}_4^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{B}_5^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\hat{u}^{(k)}+\hat{B}_6^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+$$
$$+\hat{B}_7^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\hat{u}^{(k)}\Big]+\hat{F}^{(i)}=\rho_0\sum_{k=1}^{N}\hat{M}^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\tau)^2}\quad(i=\overline{1,N}),$$

де

$$\hat{A}_1^{(i+k)}=\int_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\left[(\lambda+\mu)\delta_t^3\vec{\ni}_0^3+\mu\vec{\ni}_t^0\right]\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}d\Sigma_0,\quad \hat{A}_2^{(i+k)}=$$
$$=\int_D\vec{\ni}_0^t\otimes\Big[\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\left(\lambda\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha+\mu\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}-\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\Big(\lambda\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3+$$
$$+\mu\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha\Big)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\Big]d\Sigma_0,\quad \hat{A}_3^{(i+k)}=-\int_D\vec{\ni}_0^t\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\gamma}\otimes\Big(\lambda\delta_t^\gamma\vec{\ni}_0^\alpha+$$
$$+\mu\left(\delta^{\alpha\gamma}\vec{\ni}_t^0+\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^\gamma\right)\Big)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}d\Sigma_0,\quad \hat{B}_1^{(i+k+r)}=\int_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes$$
$$\otimes\Big[\Big((\lambda+2\mu+m)\vec{\ni}_t^0+\left(l+\frac{m}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^3\Big)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{m}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^s\otimes$$

$$\otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\exists}^{0}_{s}\Big] \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_2^{(i+k+r)} = \int\limits_D \vec{\exists}^{t}_0 \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Big[\Big(\frac{m}{2}\delta_t^3 \vec{\exists}^3_0 +$$

$$+ \Big(\mu+\frac{n}{4}\Big)\vec{\exists}^0_t\Big) \otimes \frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\vec{\exists}^\alpha_0 + \Big(\Big(\frac{n}{2} - m + l\Big)\delta^3_t\vec{\exists}^\alpha_0 + \Big(m-\frac{n}{2}\Big)\delta^\alpha_t\vec{\exists}^3_0\Big)\otimes$$

$$\otimes \frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\vec{\exists}^3_0 + \Big(\mu+\frac{n}{4}\Big)\delta^\alpha_t\vec{\exists}^s_0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\vec{\exists}^0_s\Big]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0, \quad \hat{B}_3^{(i+k+r)} =$$

$$= \int\limits_D \vec{\exists}^t_0\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\Big[\Big(l\delta^3_t\vec{\exists}^3_0 + \Big(\lambda+m-\frac{n}{2}\Big)\vec{\exists}^0_t\Big)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\exists}^\alpha_0 +$$

$$+ \Big(\Big(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\Big)\delta^3_t\vec{\exists}^\alpha_0 + \frac{n}{4}\delta^\alpha_t\vec{\exists}^3_0\Big)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\exists}^3_0\Big]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}d\Sigma_0,\quad \hat{B}_4^{(i+k+r)} =$$

$$= \hat{B}_2^{(i+k+r)} + \hat{B}_3^{(i+k+r)} - \int\limits_D \vec{\exists}^t_0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\Big[\Big(\Big(\Big(\frac{n}{4}-\frac{m}{2}+l\Big)\delta^\alpha_t\vec{\exists}^3_0 +$$

$$+ \Big(m-\frac{n}{4}\Big)\delta^3_t\vec{\exists}^\alpha_0\Big)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\exists}^3_0 + \Big(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\Big)\delta^\alpha_t\vec{\exists}^s_0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\exists}^0_s +$$

$$+ \Big(\mu+\frac{n}{4}\Big)\vec{\exists}^0_t\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\exists}^\alpha_0\Big]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,\quad \hat{B}_5^{(i+k+r)} = \hat{B}_8^{(i+k+r)} -$$

$$- \int\limits_D \vec{\exists}^t_0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\Big[\Big(\Big(\frac{n}{2}-m+l\Big)\delta^\alpha_t\vec{\exists}^\beta_0 + \Big(\lambda+m-\frac{n}{2}\Big)\delta^{\alpha\beta}\vec{\exists}^0_t + \tag{10}$$

$$+ \Big(m-\frac{n}{2}\Big)\delta^\beta_t\vec{\exists}^\alpha_0\Big)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\exists}^3_0 + \Big(\Big(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\Big)\delta^\alpha_t\vec{\exists}^3_0+\frac{n}{4}\delta^3_t\vec{\exists}^\alpha_0\Big)\otimes$$

$$\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\exists}^\beta_0\Big]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,\quad \hat{B}_6^{(i+k+r)} = \hat{B}_8^{(i+k+r)} - \int\limits_D\vec{\exists}^t_0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\gamma}\otimes$$

$$\otimes\Big[\Big(\Big(\Big(\mu+\frac{n}{4}\Big)\delta^{\alpha\gamma}\vec{\exists}^0_t + \Big(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\Big)\delta^\gamma_t\vec{\exists}^\alpha_0+\frac{n}{4}\delta^\alpha_t\vec{\exists}^\gamma_0\Big)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\exists}^3_0 +$$

$$+ \Big(\Big(\frac{n}{2}-m+l\Big)\delta^\gamma_t\vec{\exists}^3_0 + \Big(m-\frac{n}{2}\Big)\delta^3_t\vec{\exists}^\gamma_0\Big)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\exists}^\alpha_0 + \Big(\mu+\frac{n}{4}\Big)\delta^{\alpha\gamma}\delta^3_t\vec{\exists}^s_0\otimes$$

$$\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\exists}^0_s\Big]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}d\Sigma_0,\quad\hat{B}_7^{(i+k+r)} = -\int\limits_D\vec{\exists}^t_0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\gamma}\otimes$$

$$\otimes\Big[\vec{\exists}^0_t\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\Big(\Big(\mu+\frac{n}{4}\Big)\Big(\delta^{\alpha\gamma}\vec{\exists}^\beta_0+\delta^{\alpha\beta}\vec{\exists}^\gamma_0\Big) + \Big(\lambda+m-\frac{n}{2}\Big)\delta^{\beta\gamma}\vec{\exists}^\alpha_0\Big) +$$

$$+\Big(\Big(\frac{n}{2}-m+l\Big)\delta^\gamma_t\vec{\exists}^\beta_0 + \Big(m-\frac{n}{2}\Big)\delta^\beta_t\vec{\exists}^\gamma_0\Big)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\exists}^\alpha_0 +$$

$$+\Big(\Big(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\Big)\delta^\gamma_t\vec{\exists}^\alpha_0+\frac{n}{4}\delta^\alpha_t\vec{\exists}^\gamma_0\Big)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\exists}^\beta_0 + \Big(\Big(\mu+\frac{n}{4}\Big)\delta^{\alpha\gamma}\delta^\beta_t +$$

$$+ \Big(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\Big)\delta^{\alpha\beta}\delta^\gamma_t\Big)\vec{\exists}^s_0\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\exists}^0_s\Big]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}d\Sigma_0,\quad\hat{B}_8^{(i+k+r)} =$$

$$= \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Bigg[\left(\left(\frac{n}{2} - m + l \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\beta + \left(m - \frac{n}{2} \right) \delta_t^\beta \vec{\ni}_0^3 \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha +$$

$$+ \left(\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\alpha + \frac{n}{4} \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^3 \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\beta} \delta_t^3 \vec{\ni}_0^s \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^0 + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\beta} \vec{\ni}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^3 \Bigg] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0,$$

$$\hat{M}^{(i+k)} = \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\ni}_t^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0.$$

Із системи рівнянь (9), як частковий випадок, можна одержати систему рівнянь руху циліндричного тіла із стандартного матеріалу другого порядку [3]. Для цього достатньо у формулах (10) покласти $l = m = n = 0$. Система рівнянь руху лінійної теорії пружності випливає із (9) при $B_j^{(i+k+r)} = 0 \quad (j = \overline{1,8})$.

3. Аналіз рівнянь руху. Запишемо систему рівнянь руху (9) для випадку, коли у розвиненні вектора переміщення (1) зберігається лише два доданки. За базу розвинення вибираємо $\{\vec{R}_0^n\}$, тобто приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k \vec{\ni}_0^k$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k} \vec{\ni}_0^\alpha \otimes \vec{\ni}_0^k$. Система (9) складається тепер з векторного ($i = 1$) і тензорного ($i = 2$) диференціальних рівнянь. Запишемо їх в координатній формі, якщо за осі координат вибрати головні центральні осі. Відомо, що при цьому вектор статичних моментів першого порядку і відцентрований момент інерції області D дорівнюють нулеві. Якщо обчислити коефіцієнти за формулами (10), підставити їх в (9) і виконати відповідні згортки, то отримаємо

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right) + (\mu + m) \left(u_{\alpha 3} \frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right) + (\lambda + 2\mu + m) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} + \sum_{\beta=1}^{2} \frac{J^{\beta\beta}}{D_0} \left(\frac{\partial^2 u_{\beta 3}}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 u_{\beta\alpha}}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial \xi^3} \right) \right] +$$

$$+ \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \left[\frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial \xi^3)^2} (u^{\beta \cdot}_{\cdot \alpha} + u^{\cdot \beta}_{\alpha \cdot}) + \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi^3} \left(\frac{\partial u^{\beta \cdot}_{\cdot \alpha}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial u^{\cdot \beta}_{\alpha \cdot}}{\partial \xi^3} \right) + u_{\beta\alpha} \frac{\partial u^{\beta \cdot}_{\cdot 3}}{\partial \xi^3} + u_{\beta 3} \frac{\partial u^{\beta \cdot}_{\cdot \alpha}}{\partial \xi^3} \right] +$$

$$+ \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) \left(u^\beta_\beta \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial \xi^3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^3} \right) + \left(m - \frac{n}{2} \right) \left(u_{\alpha 3} \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial \xi^3} + u^\beta_\beta \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right) +$$

$$+ \frac{n}{4} \left(u^{\beta \cdot}_{\cdot 3} \frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial \xi^3} + u^{\cdot \beta}_{\alpha \cdot} \frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial \xi^3} \right) + \frac{F_\alpha}{D_0} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \tau^2} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} + \lambda \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial \xi^3} + (3\lambda + 6\mu + 4m + 2l) \left[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{\alpha 3}}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial \xi^3} \right] + (\lambda + 2\mu + m) \left[\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial \xi^3)^2} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \xi^3} + u^{\beta \cdot}_{\cdot 3} \frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial \xi^3} + \right.$$

$$
+\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{\alpha\beta}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\Bigg]+(\mu+m)\left(u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}\frac{\partial^2 u_\beta}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}}{\partial\xi^3}\right)+
$$

$$
+(\lambda+2l)\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u_3}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\right)+\left(m-\frac{n}{2}\right)u_{\gamma\beta}\frac{\partial u^{\beta\gamma}}{\partial\xi^3}+
$$

$$
+(n-2m+2l)u^\gamma_\gamma\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}u^{\beta\alpha}+\frac{F_3}{D_0}=\rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2},
$$

$$
\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\left[\mu\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+(\lambda+2\mu+m)\left(\frac{\partial^2 u_3}{\left(\partial\xi^3\right)^2}\frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\left(\partial\xi^3\right)^2}\right)+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+u^{\alpha s}\frac{\partial^2 u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha s}}{\partial\xi^3}\right)+\left(m-\frac{n}{4}\right)\left(u^{\alpha 3}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\left(\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\right)^2\right)+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3}\right]\right.-\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{D_0}\left[\left(\frac{n}{4}-\frac{m}{2}+l\right)\left(\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\frac{\partial u_{\beta s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot s}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}+\right.
$$

$$
\left.+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\right)^2\right]-\lambda\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+u^\gamma_\gamma\right)-2\mu u^{\alpha\alpha}-\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\left(u^\gamma_\gamma+2\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)u^\beta_\beta-
$$

$$
-(\lambda+2m-n)\left(u^\gamma_\gamma+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)u^{\alpha\alpha}-\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\left(2u^{\beta 3}\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}+u^{\cdot\beta}_{\gamma\cdot}u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}\right)- \qquad (11)
$$

$$
-\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\left(u^{\alpha 3}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}+u^{\alpha\beta}u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\right)-\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\beta\alpha}u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}+u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}u^{\alpha s}+\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}\right)^2\right)-
$$

$$
-\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\left(u_{\gamma s}u^{\gamma s}+\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^s}{\partial\xi^3}\right)-\left(\frac{n}{4}-\frac{m}{2}+l\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)^2+
$$

$$
+\frac{F_{\alpha\alpha}}{D_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha=1,2),
$$

$$
\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\left[\mu\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+(\lambda+2\mu+m)\left(\frac{\partial^2 u_3}{\left(\partial\xi^3\right)^2}\frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^\gamma}{\left(\partial\xi^3\right)^2}\right)+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+u^{\gamma s}\frac{\partial^2 u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\gamma s}}{\partial\xi^3}\right)+
$$

$$
\left.+\left(m-\frac{n}{4}\right)\left(\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}u^{\gamma 3}+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\gamma 3}}{\partial\xi^3}\right)+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{\left(\partial\xi^3\right)^2}+\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^3}\right)\right]-
$$

$$
-\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{D_0}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}-\mu\left(u^{\alpha\gamma}+u^{\gamma\alpha}\right)-\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+u^\beta_\beta\right)u^{\alpha\gamma}-
$$

$$
-\left(m-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+u^\beta_\beta\right)u^{\gamma\alpha}-\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\alpha 3}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3}+u^{\alpha\beta}u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}+u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}u^{\beta\gamma}+u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}u^{\gamma s}+\right.
$$

$$+\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\gamma}}{\partial\xi^3}\Big)-\frac{n}{4}\left(u^{\gamma 3}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial\xi^3}+u^{\gamma\beta}u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\right)+\frac{F_{\gamma\alpha}}{D_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha\neq\gamma),$$

$$\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\Bigg[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}+(2\lambda+4\mu+3m+2l)\left(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\right)+$$
$$+(\lambda+2\mu+m)\left(\frac{\partial^2 u_s}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha s}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha s}}{(\partial\xi^3)^2}\right)+(\mu+m)\Bigg(u_{\beta 3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}+$$
$$+\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\Bigg)+(\lambda+2l)\left(u^{\beta}_{\beta}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\beta}_{\beta}}{\partial\xi^3}\right)\Bigg]-(\mu+m)\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{D_0}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}-$$
$$-\mu\left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial\xi^3}+u^{\alpha 3}\right)-\left(\lambda+\mu+m-\frac{n}{4}\right)u^{\alpha 3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}-\frac{n}{4}\frac{\partial u_{\beta}}{\partial\xi^3}u^{\beta\alpha}-\left(m-\frac{n}{2}\right)u^{\beta}_{\beta}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial\xi^3}-$$
$$-\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\left(u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}\frac{\partial u^{s}}{\partial\xi^3}+\left(u^{\alpha\beta}+u^{\beta\alpha}\right)u_{\beta 3}\right)-\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)u^{\beta}_{\beta}u^{\alpha 3}-$$
$$-(\mu+m)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial\xi^3}+\frac{F_{3\alpha}}{D_0}=\rho_0\frac{J^{\alpha\alpha}}{D_0}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{\partial\tau^2}\quad(\alpha=1,2).$$

У рівняннях (11) використано позначення: $u_{\alpha k}=u^{\cdot k}_{\alpha\cdot}=u^{\alpha\cdot}_{\cdot k}=u^{\alpha k}$; $F_i=\vec{\ni}^{\,0}_i\cdot\hat{F}^{(1)}$; $F_{kn}=\vec{\ni}^{\,0}_n\otimes\vec{\ni}^{\,0}_k\cdot\cdot\hat{F}^{(2)}$; D_0 – площа області D;

$$j^{\alpha\alpha}=\iint\limits_{D}(\xi^{\alpha})^2 d\Sigma_0\quad -$$

моменти інерції області D стосовно осей координат.

Для формулювання динамічних і мішаних граничних умов на поперечних перерізах $\xi^3=0,b$ в задачах теорії пружності циліндричних тіл крім розвинення вектора переміщення $\vec{u}$ за вибраною тензорною базою, як показано в [1], необхідно знати розвинення і вектора напружень $\vec{P}_3$ за цією ж базою. Тому наведемо значення коефіцієнтів розвинення $\vec{P}_3=\hat{P}^{(1)}_3+\vec{R}_0\cdot\hat{P}^{(2)}_3$ для випадку, що розглядається. Якщо обчислити згідно з (8) значення $\hat{A}^{(r+1)}_{3\alpha}, B^{(k+r+1)}_{3s}(\alpha,k,r=1,2;s=\overline{1,4})$, підставити одержані вирази в (7) і зробити перерозклад, то отримаємо

$$\hat{P}^{(1)}_3=\Bigg\{\delta^3_k\Bigg[\lambda u^{\alpha}_{\alpha}+(\lambda+\mu)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\left(u_{\alpha\beta}u^{\beta\alpha}+u^{\alpha\cdot}_{\cdot 3}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial\xi^3}\right)+lu^{\alpha}_{\alpha}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+$$
$$+\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\left(u^{\alpha}_{\alpha}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)u^{\beta}_{\beta}+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)u_{\alpha s}u^{\alpha s}+\frac{m}{2}u^{\alpha 3}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial\xi^3}+\left(l+\frac{m}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{m}{2}\right)\delta^{ij}\frac{\partial u_i}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_j}{\partial\xi^3}\Bigg]+\delta^{\alpha}_k\Bigg[\mu u_{\alpha 3}+\frac{n}{4}\left(u_{\alpha\beta}u^{\beta 3}+u_{\alpha 3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)+$$
$$+\left(m-\frac{n}{2}\right)u^{\beta}_{\beta}u_{\alpha 3}+\left(m-\frac{n}{4}\right)u_{\alpha 3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)u^{\cdot s}_{\alpha\cdot}\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\Bigg]+\mu\frac{\partial u_k}{\partial\xi^3}+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\times$$
$$\times\left(u_{\alpha 3}+\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial\xi^3}\right)u^{\alpha\cdot}_{\cdot k}+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)u^{\beta}_{\beta}\frac{\partial u_k}{\partial\xi^3}+(\lambda+2\mu+m)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_k}{\partial\xi^3}\Bigg\}\vec{\ni}^{\,k}_0,$$

$$
\begin{aligned}
\hat{P}_3^{(2)} = & \left\{ \mu \frac{\partial u_{\gamma k}}{\partial \xi^3} + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right) u_{\beta\beta} \frac{\partial u_{\gamma k}}{\partial \xi^3} + \left(\mu + \frac{n}{4}\right) u^{\beta\cdot}_{\cdot k} \frac{\partial u_{\gamma\beta}}{\partial \xi^3} + (\lambda + 2\mu + m) \times \right. \\
& \times \left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi^3} \frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} \frac{\partial u_{\gamma k}}{\partial \xi^3} \right) + \delta_k^3 \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + \left(m - \frac{n}{4}\right) u^{\beta\cdot}_{\cdot 3} \frac{\partial u_{\gamma\beta}}{\partial \xi^3} + \right. \\
& + \left(\frac{n}{2} - m + 2l\right) u^{\beta}_{\beta} \frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + (2l + m) \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} \frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + \left. (\lambda + 2\mu + m) \frac{\partial u_s}{\partial \xi^3} \frac{\partial u^{\cdot s}_{\gamma\cdot}}{\partial \xi^3} \right] + \\
& \left. + \delta_k^\alpha \left[\left(m - \frac{n}{4}\right) u_{\alpha 3} \frac{\partial u_{\gamma 3}}{\partial \xi^3} + \left(\mu + \frac{n}{4}\right) u^{\cdot s}_{\alpha\cdot} \frac{\partial u_{\gamma s}}{\partial \xi^3} \right] \right\} \vec{\ni}_0^{\gamma} \otimes \vec{\ni}_0^{k}.
\end{aligned}
$$

Розглянемо в прийнятому наближенні систему рівнянь руху лінійної теорії пружності, котрі описують власні коливання циліндричного тіла. Такі рівняння отримаємо із рівнянь (11), якщо в останніх знехтуємо нелінійними членами і покладемо $F_i = 0$, $F_{k\alpha} = 0 (i, k = \overline{1,3}; \alpha = 1, 2)$. В результаті одержимо

$$
\begin{gathered}
\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_{13}}{\partial \xi^3} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2}, \\
\mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_{23}}{\partial \xi^3} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2}, \\
(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{(\partial \xi^3)^2} + \lambda \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial u_{22}}{\partial \xi^3} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2}, \\
\frac{\mu J^{11}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{11}}{(\partial \xi^3)^2} - \lambda \left(u_{11} + u_{22} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} \right) - 2\mu u_{11} = \frac{\rho_0 J^{11}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{11}}{\partial \tau^2}, \\
\frac{\mu J^{22}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{22}}{(\partial \xi^3)^2} - \lambda \left(u_{11} + u_{22} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi^3} \right) - 2\mu u_{22} = \frac{\rho_0 J^{22}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{22}}{\partial \tau^2}, \\
\frac{\mu J^{11}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{12}}{(\partial \xi^3)^2} - \mu (u_{12} + u_{21}) = \frac{\rho_0 J^{11}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{12}}{\partial \tau^2}, \\
\frac{\mu J^{22}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{21}}{(\partial \xi^3)^2} - \mu (u_{12} + u_{21}) = \frac{\rho_0 J^{22}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial \tau^2}, \\
\frac{(\lambda + 2\mu) J^{11}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial \xi^3)^2} - \mu \left(u_{13} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi^3} \right) = \frac{\rho_0 J^{11}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{13}}{\partial \tau^2}, \\
\frac{(\lambda + 2\mu) J^{22}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{23}}{(\partial \xi^3)^2} - \mu \left(u_{23} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi^3} \right) = \frac{\rho_0 J^{22}}{D_0} \frac{\partial^2 u_{23}}{\partial \tau^2}.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Проведемо короткий аналіз системи рівнянь (12). Два перші і два останні рівняння цієї системи описують поперечні коливання циліндричного тіла у двох головних площинах. Розглянемо такі коливання в одній з площин. Нехай, для означеності, вона характеризується індексом 1.

Знехтуємо спочатку інерцією обертання, тобто проаналізуємо систему

$$
\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{(\partial \xi^3)^2} + \frac{\partial u_{13}}{\partial \xi^3} \right) = \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2},
$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)J^{11}}{D_0}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\left(u_{13}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\right)=0. \tag{13}$$

З цих двох рівнянь отримуємо

$$\frac{(\lambda+2\mu)J^{11}}{D_0}\frac{\partial^3 u_{13}}{(\partial\xi^3)^3}=\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}.$$

Тепер додатково знехтуємо деформацією зсуву, тобто покладемо, що

$$u_{13}=-\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}.$$

В результаті одержуємо

$$(\lambda+2\mu)J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}=0. \tag{14}$$

Якщо покласти $\nu=0$, де $\nu=\lambda/(2(\lambda+\mu))$, то $\lambda=0$, $\mu=E/2$ і тоді отримаємо добре відоме рівняння (див. напр. [4,5])

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}=0,$$

котре, за звичай, використовується при вивченні поперечних коливань циліндричних тіл.

Коли не нехтувати деформацією зсуву, то виразивши з першого рівняння системи (13) $\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}$ і підставивши одержане значення в друге рівняння цієї системи, попередньо продиференціювавши його по ξ^3, ми б одержали рівняння

$$(\lambda+2\mu)J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\frac{\rho_0 J^{11}(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \tag{15}$$

При $\nu=0$ воно має вигляд

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-2\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0.$$

У випадку, коли приймається до уваги інерція обертання, то з першого і передостаннього рівнянь системи (12) одержимо

$$\frac{(\lambda+2\mu)J^{11}}{D_0}\frac{\partial^3 u_{13}}{(\partial\xi^3)^3}-\frac{\rho_0 J^{11}}{D_0}\frac{\partial^3 u_{13}}{\partial\xi^3\partial\tau^2}=\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}. \tag{16}$$

Якщо знехтувати тепер деформацією зсуву, то з (16) знаходимо

$$(\lambda+2\mu)J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \tag{17}$$

При $\nu=0$ з (17) отримуємо

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \tag{18}$$

Рівняння (18) наведено в роботах С. П. Тимошенка і В. З. Власова (див. напр. [6,4]).

Якщо з першого рівняння системи (12) визначити $\dfrac{\partial u_{13}}{\partial \xi^3}$ і результат підставити в передостаннє рівняння цієї системи, то отримаємо рівняння поперечних коливань циліндричного тіла

$$(\lambda+2\mu)J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+D_0\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\rho_0 J^{11}\left(1+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}+\frac{\rho_0^2 J^{11}}{\mu}\frac{\partial^4 u_1}{\partial\tau^4}=0, \quad (19)$$

котре враховує і деформацію зсуву, і інерцію обертання. З цього рівняння раніше отримані рівняння (14), (15), (17) можна одержати як часткові випадки.

Рівняння (19) вперше отримано С. П. Тимошенком в 1920 році в праці [6]. В цій же роботі оцінено вклад поправок на інерцію обертання і деформацію зсуву на частоти власних коливань. Показано, що величина поправок збільшується із зменшенням довжини хвилі і що обидві поправки неістотні, якщо довжина хвилі поперечних коливань велика в порівнянні з розмірами поперечного перерізу цидіндричного тіла. Ці висновки підтверджено в роботі С. П. Тимошенка [7] на підставі точного розв'язку задачі для балки прямокутного поперечного перерізу.

Про інші групи системи рівнянь (12). Якщо в третьому рівнянні покласти $u_{11}=u_{22}=0$, що рівносильно гіпотезі про відсутність деформації видовження в площині поперечного перерізу, то одержимо відоме в літературі рівняння поздовжніх коливань цидіндричного тіла

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}=\rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2}.$$

У загальному випадку з третього, четвертого і п'ятого рівнянь системи (12) можна одержати рівняння поздовжніх коливань, котре враховує деформацію та інерцію видовження в площині поперечного перерізу.

Відзначимо, що коли в шостому і в сьомому рівняннях (12) покласти $u_{21}=-u_{12}=\theta$, тобто знехтувати деформацією кручення в площині поперечного перерізу, то ці рівняння зводяться до відомого рівняння крутильних коливань

$$\mu\frac{\partial^2\theta}{(\partial\xi^3)^2}=\rho_0\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}.$$

В сукупності з шостого і сьомого рівняння (12) можна одержати рівняння крутильних коливань, котре враховує деформацію та інерцію кручення в площині поперечного перерізу циліндричного тіла.

Система рівнянь (12) відповідає узагальненій гіпотезі плоских перерізів. Тут, на відміну від класичної моделі плоских перерізів, для котрої $u_{11}=u_{22}=0$, $u_{21}=-u_{12}$, враховуються деформація видовження і кручення в площині поперечного перерізу. Аналіз рівнянь руху для математичної моделі, котра враховує депланацію поперечного перерізу, можна провести, якщо у формулі (1) покласти $N=3$.

1. Доманський П. П. Математичні моделі нелінійної динамічної теорії пружності циліндричних тіл. – Львів, 1995. – 43 с. (Препринт / НАН України. ІППММ; N 16-95).

2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М., Наука, 1980. – 512 с.

3. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л., Машиностроение, 1986. – 336 с.

4. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. – М., ГИФМЛ, 1959. – 568 с.

5. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М., Наука, 1967. – 984 с.

6. Timoshenko S. P. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars* // Philosophical Magazine and Journal of Science, ser. 6. – 1921. – Vol. 41, May, N 245. – P. 744-746.

7. Timoshenko S. P. *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section* // Philosophical Magazine and Journal of Science, ser. 6. – 1922. – Vol. 43, January, N 253. – P. 125-131.

Стаття надійшла до редколегії 10.11.98

УДК 539.3

МЕТОД РЕАЛІЗАЦІЇ УМОВ ОДНОСТОРОННЬОГО КОНТАКТУ ТА ТЕРТЯ В КОНТАКТНИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН

О. Я. Галяс, І. А. Прокопишин, Д. Г. Хлєбніков

Galyas O. Y., Prokopyshyn I. A., Khlebnikov D. G. A method for realization of unilateral contact conditions and friction in contact problems for transversally-isotropic plates. The quasi-static contact problem with friction of bending of a transversally–isotropic plate by a rigid stamp are considered on the base of the Timoshenko's plate theory including the transversal compression. The idea of introducting an intermediate elasto-plastic layer between the plate and the stamp is used to model the contact conditions. After load parameter descretization the initial problem is reduced to a sequence of the elasticity problems for solids connected by a linear layer with a certain distribution of nonelastic strains. Numerical realization of the approach is made by means of the finite elements method with linear triangle elements.

Розглянемо транверсально–ізотропну пластину завтовшки $2h$ в декартовій системі координат (рис.1). В площині Oxy пластина займає область Ω з межею $\Gamma = \partial\Omega$.

Пластина згинається жорстким штампом з формою основи $z = f(x, y)$. Після вертикального переміщення штампа на величину δ утворюється зона контакту Ω_c, по якій розподілені контактні напруження: нормальне – σ та дотичні – τ_1, τ_2. Припускається, що в області $(x, y) \in \Omega_c$ виконуються умови одностороннього контакту та тертя за законом Амонтона-Кулона.

Напружено–деформований стан пластини за теорією Тимошенка [1] характеризується: вектором узагальнених переміщень $\bar{u} = [u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2]^T$,
вектором деформацій $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}]^T$,
та вектором узагальнених зусиль $\bar{\sigma} = [N_1, N_2, S_{12}, Q_1, Q_2, M_1, M_2, H_{12}]^T$,
де

u_1, u_2, u_3 – переміщення точок серединної площини пластини,

γ_1, γ_2 – кути повороту нормального волокна,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, 2\varepsilon_{12}$ – деформації розтягу та зсуву в площині пластини,

$2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}$ – деформації зсуву в поперечному напрямі,

$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}$ – деформації згину та кручення,

1991 *Mathematics Subject Classification.* 73K10.

N_1, N_2, S_{12} – зусилля в площині пластини,

Q_1, Q_2 – перерізуючі зусилля,

M_1, M_2, H_{12} – згинальні та крутильний моменти.

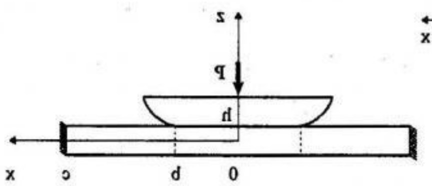


Рис. 1

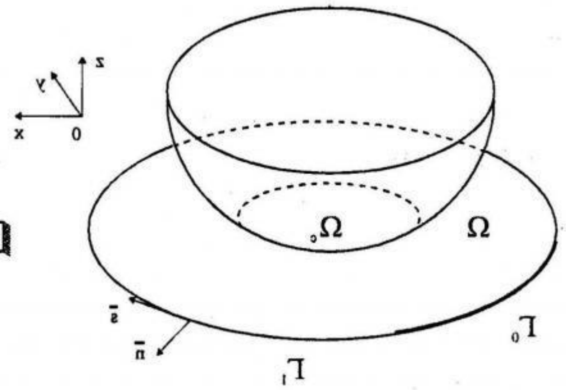


Рис. 2

Вектори узагальнених зусиль, переміщень та деформацій пов'язані рівняннями рівноваги

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} + \tau_1 = 0\ , \quad \frac{\partial S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \tau_2 = 0\ , \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \sigma = 0\ , \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H_{12}}{\partial y} - Q_1 + h\tau_1 = 0\ , \quad \frac{\partial H_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 + h\tau_2 = 0\ ,\end{gathered} \tag{1}$$

кінематичними співвідношеннями

$$\bar{\varepsilon} = \mathbf{A}\bar{u}\ , \tag{2}$$

та фізичними співвідношеннями

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D}\bar{\varepsilon}\ , \tag{3}$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} B & \nu B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu B & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}D \end{bmatrix},$$

$D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$ – циліндрична жорсткість, $\Lambda = 2k'G_1h$ – трансверсальна жорсткість, $B = 2Eh/(1-\nu^2)$ – мембранна жорсткість, E, ν, G – модуль пружності, коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву в площинах ізотропії, E_1, ν_1, G_1 – відповідні величини у поперечному напрямку, k' – коефіцієнт зсуву.

На контурі $\Gamma_0 \subset \Gamma$ задано кінематичні крайові умови

$$\begin{aligned} &u_n = n_1u_1 + n_2u_2 = u_n^0, \qquad u_s = -n_2u_1 + n_1u_2 = u_s^0, \quad u_3 = u_3^0, \\ &\gamma_n = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 = \gamma_n^0, \qquad \gamma_s = -n_2\gamma_1 + n_1\gamma_2 = \gamma_s^0; \end{aligned} \tag{4}$$

а на контурі $\Gamma_1 \subset \Gamma$ – статичні

$$\begin{aligned} &N_n = N_1{n_1}^2 + 2S_{12}n_1n_2 + N_2{n_2}^2 = {N_n}^0, \\ &T_s = (N_2 - N_1)n_1n_2 + S_{12}({n_1}^2 - {n_2}^2) = {T_s}^0, \\ &Q_n = Q_1n_1 + Q_2n_2 = {Q_n}^0, \\ &M_n = M_1{n_1}^2 + 2H_{12}n_1n_2 + M_2{n_2}^2 = {M_n}^0, \\ &H_{ns} = (M_2 - M_1)n_1n_2 + H_{12}({n_1}^2 - {n_2}^2) = {H_{ns}}^0, \end{aligned} \tag{5}$$

де n_1, n_2 – напрямні косинуси нормалі до Γ.

Контакт штампа з пластиною при $(x, y) \in \Omega$ описується умовами: одностороннього нормального контакту

$$w - f + \delta \leqslant 0, \quad \sigma \leqslant 0, \quad (w - f + \delta)\sigma = 0, \tag{6}$$

та умовами сухого тертя Амонтона-Кулона [2]

$$|\vec{\tau}| \leqslant -k\sigma, \tag{7}$$

$$|\vec{\tau}| < -k\sigma \Rightarrow \dot{\vec{u}}_\tau = 0, \tag{8}$$

$$|\vec{\tau}| = -k\sigma \Rightarrow \frac{\vec{\tau}}{|\vec{\tau}|} = -\frac{\dot{\vec{u}}_\tau}{|\dot{\vec{u}}_\tau|}, \tag{9}$$

де w – вертикальне переміщення поверхні пластини $z = h$; $\vec{\tau}$ – вектор дотичного напруження на поверхні пластини; $\dot{\vec{u}}_\tau$ – вектор швидкості дотичного переміщення поверхні пластини; k – коефіцієнт тертя.

Зона контакту визначається так: $\Omega_c = \{(x, y) \in \Omega \mid \sigma(x, y) < 0\}$.

Для реалізації умов контакту в розвиток ідей праць [3–5] між штампом та пластиною введемо неоднорідний анізотропний пружно-пластичний шар завтовшки h^*. Цей шар може бути цілком умовним і відображати ідею методу штрафу в контактних задачах [6], або ж реальні властивості контактуючих тіл (шерехатість, формування поверхневого шару, обтиснення і т.ін.).

Позначимо через ${u_i}^*$ переміщення точок шару. Припустимо, що в ньому виникають лише зсувні ${\gamma_i}^* = \dfrac{\partial {u_i}^*}{\partial z}$ $(i = 1, 2)$ і нормальні деформації $\varepsilon^* = \dfrac{\partial {u_3}^*}{\partial z}$ та відповідні їм напруження τ_1, τ_2, σ, які вважаємо постійними по товщині шару. Для дослідження клейових та адгезійних з'єднань така модель проміжкового шару була запропонована і широко використовувалася у працях Рабіновича А.Л.[7].

Фізичні співвідношення для проміжкового шару, за аналогією з [8], візьмемо у формі закону пластичного течіння

$$d{\gamma_i}^* = d{\gamma_i}^{*e} + d{\gamma_i}^{*p} = \frac{1}{G^*}d\tau_i + \tau_i d\lambda_i, \; i = 1, 2; \tag{10}$$

$$d\varepsilon^* = d\varepsilon^{*e} + d\varepsilon^{*p} = \frac{1}{E^*}d\sigma + \sigma d\lambda, \tag{11}$$

де

$$d\lambda_1 = d\lambda_2 = S_-(T-T_y)\frac{\overline{d\Gamma_p}}{T_y}, \quad d\lambda = S_-(\sigma-\sigma_y)\frac{d\varepsilon^{*p}}{\sigma_y},$$

G^*, E^* – модулі пружності та зсуву,

$T = (\tau_1^2+\tau_2^2)^{\frac{1}{2}}$ – інтенсивність дотичних напружень,

$\overline{d\Gamma_p} = [(d\gamma_1^{*p})^2 + (d\gamma_2^{*p})^2]^{\frac{1}{2}}$ – інтенсивність приростів пластичних деформацій,

$T_y(q), \sigma_y(\varepsilon^{*p})$ – функції деформування , q – параметр зміцнення,

$S_-(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ – одинична асиметрична функція.

Закони деформування (10),(11) легко дозволяють реалізувати умови контакту (6)–(9). Скажімо, для моделювання умов одностороннього контакту (6) достатньо у виразі (11) врахувати лише перший доданок і взяти модуль пружності у вигляді

$$E^*(\varepsilon^*) = \begin{cases} E, & \varepsilon^* \leqslant 0 \\ \alpha E, & \varepsilon^* > 0 \end{cases},$$

де $\alpha > 0$ – достатньо мале число.

Покажемо спосіб реалізації умов тертя Амонтона-Кулона. Стрибки переміщень під час переходу через проміжковий шар, внаслідок прийнятих гіпотез дорівнюють

$$[u_i{}^*] = h^*\gamma_i{}^*, \; i=1,2; \quad [u_3{}^*] = h^*\varepsilon^*.$$

З рівнянь пластичного течіння (10) випливає, що у зоні течіння

$$|\vec{\tau}| = T = T_y \; . \tag{12}$$

З цих же рівнянь за умови $\gamma_i^{*e} \ll \gamma_i^{*p}$ $(i=1,2)$ одержується наближена рівність

$$\frac{[\dot{u_i}^*]}{([\dot{u_1}^*]^2 + [\dot{u_2}^*]^2)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\tau_i}{|\vec{\tau}|}\;, \tag{13}$$

яка в одновимірному випадку виконується точно. За умови $T_y = -k\sigma$ співвідношення (12),(13) дають закон тертя Амонтона-Кулона.

Дамо схему чисельного дослідження вихідної задачі, базуючись на загальній методиці розв'язування задач пластичного течіння [9]. Замінимо співвідношення пластичного течіння (10),(11) різницевими, розглядаючи процес навантаження у вузлах сітки $\delta = \{\delta^{(1)} < \delta^{(2)} < \ldots < \delta^{(N)}\}$, де δ – параметр навантаження. Для цього зінтегруємо їх на проміжку від $\delta^{(n-1)}$ до $\delta^{(n)}$. В результаті отримаємо (для зменшення обсягу наводимо лише вирази для нормальних деформацій, вирази для зсувів – аналогічні)

$$\varepsilon^{*(n)} - \varepsilon^{*(n-1)} = \frac{1}{E^*}[\sigma^{(n)} - \sigma^{(n-1)}] + \int\limits_{\lambda^{(n-1)}}^{\lambda^{(n)}} \sigma \, d\lambda.$$

Обчислюючи інтеграл у правій частині, наприклад, за формулою правих прямокутників, матимемо

$$\varepsilon^{*(n)} = \left(\frac{1}{E^*} + \Delta^{(n)}\lambda\right)\sigma^{(n)} + \varepsilon^{*(n-1)} - \frac{\sigma^{(n-1)}}{E^*}. \tag{14}$$

Співвідношення (14) є нелінійним і лінеаризується методом січних модулів.

Враховуючи, що стрибки переміщень через шар пов'язані з деформаціями лінійним чином, на k - му кроці методу січних модулів матимемо такі лінійні залежності між величинами стрибків переміщень та контактними напруженнями:

$$[u_i^*]^{(n,k)} = \frac{h^*}{G^{(n,k)}}\tau_i + [u_i^{*p}]^{(n-1)}, \ i = 1,2; \quad [u_3^*]^{(n,k)} = \frac{h^*}{E^{(n,k)}}\sigma + [u_3^{*p}]^{(n-1)} \ .$$

Тому, на кожній ітерації методу січних модулів необхідно розв'язати задачу для двох тіл, з'єднаних через лінійно-пружний шар при заданому розподілі непружних деформацій у ньому.

Кінематичні умови контакту штампа з пластиною через такий проміжковий шар матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &u_3 + \varkappa\sigma + \frac{h^*}{E^{(n,k)}}\sigma + [u_3^{*p}]^{(n-1)} = f(x,y) - \delta^{(n)}, \\ &u_i + \gamma_i h + \omega\tau_i + \frac{h^*}{G^{(n,k)}}\tau_i + [u_i^{*p}]^{(n-1)} = u_i^{+(n)}, \end{aligned} \tag{15}$$

де $u_i^{+(n)}(x,y)$ – горизонтальні переміщення поверхні пластини у точці (x,y) на момент вступу даної точки у контакт зі штампом; $\varkappa\sigma$, $\omega\tau_i$ – додаткові переміщення поверхні пластини, які прямо пропорційно залежать від прикладеного навантаження і враховують обтиснення по товщині пластини. При цьому коефіцієнти обтиснення $\varkappa$, ω та зсуву k' подаються формулами, отриманими внаслідок асимптотичного аналізу просторової задачі теорії пружності для трансверсально–ізотропного шару [10]

$$k' = \frac{5}{6}\frac{G}{G_1}\frac{2}{(1-\nu)\lambda}, \quad \varkappa = \frac{260\mu - \lambda^2}{350}\frac{1-\nu^2}{E}h, \quad \omega = \left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{\mu}}{5}\right)\frac{(1-\nu)\lambda h}{4G}, \tag{16}$$

де

$$\lambda = \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{G}{G_1} - \nu_1\frac{E}{E_1}\right), \quad \mu = \frac{E(1-\nu_1{}^2\frac{E}{E_1})}{E_1(1-\nu^2)}.$$

Під час застосування проміжкового пружно-пластичного шару для моделювання умов тертя виникає проблема, пов'язана з необхідністю виконання умови $\vec{\tau} = 0$ поза зоною контакту Ω_c (у зоні $\Omega\setminus\Omega_c$). При $\sigma = 0$ умова $\vec{\tau} = 0$ формально випливає з умови тертя (9) при $T_y = 0$. Це означає, що в даній області зсувні деформації шару є повністю пластичними. Виходячи з кінематичної умови контакту штампа з пластиною через проміжковий шар, отримаємо, що пластичні переміщення з точністю до знака дорівнюють переміщенням поверхні пластини. Отже, у зоні $\Omega\setminus\Omega_c$ для визначення пластичних деформацій немає необхідності реалізовувати алгоритм січних модулів. Врахування пластичних деформацій здійснюється їх безпосереднім введенням в умову кінематичного контакту (15); умова $\vec{\tau} = 0$ реалізується покладанням зсувної жорсткості проміжкового шару у цій зоні дуже близькою до нуля.

Для вектор-функцій узагальнених переміщень $\bar{u} \in \left(H^1(\Omega)\right)^5$ введемо підпростір K кінематично допустимих переміщень, який визначається кінематичними крайовими умовами

(4). Задача про контакт штампа та пластини через проміжковий шар на основі принципу можливих переміщень зводиться до мінімізації у підпросторі K функціоналу

$$J^{(n.k)}(\bar{u}) = \frac{1}{2}a(\bar{u},\bar{u}) - l(\bar{u}) + \varepsilon^{(n.k)}(\bar{u}), \tag{17}$$

де $\frac{1}{2}a(\bar{u},\bar{u})$ – енергія пружної деформації пластини за теорією Тимошенка:

$$\frac{1}{2}a(\bar{u},\bar{u}) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}(\mathbf{A}\bar{u})^T\mathbf{D}(\mathbf{A}\bar{u})d\Omega;$$

$l(\bar{u})$ – робота зовнішніх зусиль на викликаних ними переміщеннях:

$$l(\bar{u}) = \int\limits_{\Gamma_1}(u_n N_n^0 + u_s T_n^0 + u_3 Q_n^0 + \gamma_n M_n^0 + \gamma_s H_{ns}^0)d\Gamma;$$

$\varepsilon^{(n.k)}(\bar{u})$ – енергія пружної деформації проміжкового шару, записана з урахуванням кінематичних умов контакту (15):

$$\varepsilon^{(n.k)}(\bar{u}) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega}\Big\{\tilde{E}^{(n,k)}\big(f - \delta^{(n)} - [u_3^{*p}]^{(n-1)} - u_3\big)^2 +$$

$$+ \tilde{G}^{(n,k)}\sum_{i=1}^{2}\big(u_i^{+(n)} - [u_i^{*p}]^{(n-1)} - u_i - h\gamma_i\big)^2\Big\}d\Omega,$$

$$\tilde{E}^{(n,k)} = \frac{E^{(n,k)}}{\varkappa E^{(n,k)} + h^*}, \quad \tilde{G}^{(n,k)} = \frac{G^{(n,k)}}{\omega G^{(n,k)} + h^*}.$$

Оскільки обмеження у вигляді нерівностей відсутні, з умови мінімуму функціоналу (17) у підпросторі K після скінченно-елементної апроксимації приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь.

Програмна реалізація здійснена на мові FORTRAN на базі програмного забезпечення для розв'язування двовимірних контактних задач згину пластин за відсутності тертя з використанням лінійних трикутних елементів [11].

Як приклад, розглянута плоска контактна задача про циліндричний згин жорстким штампом пластини з жорстко защемленим краєм (рис.2). Для її розв'язування використовувалася двовимірна прямокутна сітка завширшки в один елемент зі спеціальними крайовими умовами для моделювання умов циліндричного згину пластини [11].

Форма штампа задавалася функцією $f(x,y) = x^2/2R$, де R – радіус скруглення. Обчислення здійснювалися для пластин завдовжки $c/h = 5$, при радіусі скруглення штампа $R/h = 1.25 \cdot 10^3$, коефіцієнтах Пуассона $\nu = \nu_1 = 0.25$.

Нижче наводяться результати, отримані при розбитті пластини уздовж її довжини на 400 елементів при 800 кроках навантаження по δ до виникнення контакту по всій довжині пластини $\delta = \delta_c = 0.01h$.

На рис.3 показано розподіл нормальних $\bar{\sigma} = \sigma/E$ та дотичних $\bar{\tau}_1 = \tau_1/E$ контактних напружень, отриманих для відносних значень пружних параметрів пластини $E_1/E = 1$, $G_1/G = 0.25$ та коефіцієнта тертя $k = 0.2$. Криві 1–4 відповідають таким відносним значенням осідання $\bar{\delta} = \delta/\delta_c = 0.2, 0.6, 0.8, 1.0$. Штриховою лінією показано розподіл дотичних напружень у випадку абсолютно шерехатого штампа ($k = \infty$) для осідання $\bar{\delta} = 0.6$.

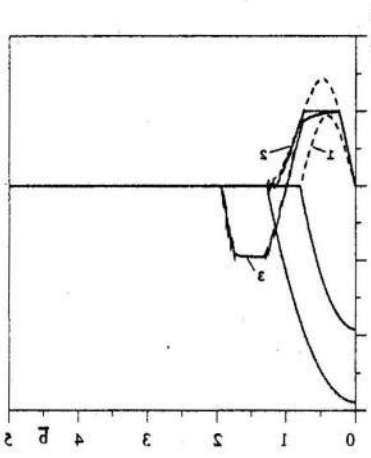


Рис. 3

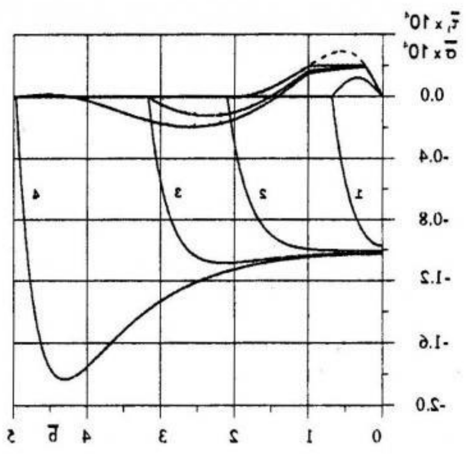


Рис. 4

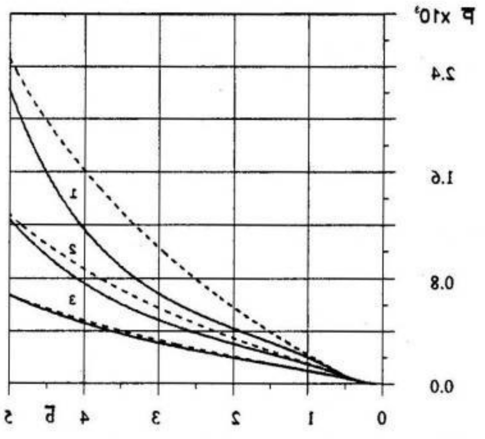


Рис. 5

Зазначимо, що спостережене незначне проковзування мало впливає на величину зони контакту і розподіл нормальних напружень під штампом у порівнянні з випадком абсолютно шерехатого штампа.

На рис.4 наведено графіки розподілу нормальних та дотичних напружень для ізотропної пластини ($E_1/E = 1,\ G_1/G = 1$), отримані за моделі тертя Треска–Сен–Венана ($T_y = T_{max} = 10^{-4}E$). Осіданню $\bar{\delta} = 0.2, 0.4, 0.6$ відповідають криві 1–3.

На рис.5 відображені залежності безрозмірного зусилля на штамп $\bar{P} = P/hE$ від величини зони контакту $\bar{b} = b/h$, отримані за різних співвідношень пружних сталих. Криві 1 відповідають ізотропному випадку ($E_1/E = 1,\ G_1/G = 1$); криві 2 – значенням $E_1/E = 1,\ G_1/G = 0.25$; криві 3 – значенням $E_1/E = 0.5,\ G_1/G = 0.125$. Випадок гладкого штампа ($\tau_1 = 0$) показано на рисунку суцільними лініями; а випадок ідеально шерехатого штампа – штриховими лініями. При зменшенні відносноі трансверсальноі жорсткості пластини вплив коефіцієнта тертя на величину зони контакту та розподіл контактних напружень проявляється все в меншій мірі.

Характер дотичних контактних напружень для початковоі стадіі навантаження зумовлений протидією шерехатого штампа стиску верхньоі поверхні пластини. Зі збільшенням зони контакту напрям проковзування може змінитися на протилежний (рис.3,4). Відзначимо, що при $E_1/E = 0.5$, $G_1/G = 0.125$ вказаний ефект не спостерігається і дотичні напруження під час навантаження не змінюють знаку.

Для жорстких на зсув пластин помітне значне нагромадження похибки обчислення пластичних деформацій. Дискретність навантаження та розбиття області приводять до збурень дотичних напружень. За наявності проковзування ці збурення переходять у вирази для пластичні деформаціі, які на наступному кроці навантаження, у свою чергу, викликають збурення дотичних напружень і т.д. Таким чином може відбуватись лавинне нагромадження похибки, яке при значному проковзуванні унеможливлює здійснення обчислень.

1. Пелех Б. Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. – К., Наукова думка, 1977. – 182 с.
2. Кравчук А. С.*К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения*// ПММ – 1980. –Т. 44, N 1. – С.122–129.
3. Блох М. В., Оробинский А. В. *О модификации метода конечных элементов для решения двумерных упругих и пластических контактных задач* // Проблемы прочности. – 1983. – N 5. – С.21–27.
4 Левин А. А. Численное моделирование квазистатического контактного взаимодейсвия деформируемых тел (двумерная постановка): Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Горький, 1987. – 16 с.
5. Prokopyshyn I. A., Khlebnikov D. G. *A method for realisation of unilateral contact conditions, friction and fracture in quasi-static contact problems for elastic solids*// Current Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Media: Abstracts of Second Polish–Ukrainian conference. (Warsaw, September 11–13, 1997). –Warsaw, 1997. – P.50–51.
6. Oden J. I. *Mixed finite element approximations via interior and exterior penalties for contact problem in elasticity* // Hybrid and mixed finite element method: Proc. Int. Simp.(Atlanta, Ga, 8–10 apr., 1981.) – Chiehester e.a., 1983. – P.467–486.
7. Рабинович А. Л. Введение в механику армированых полимеров. – М., Наука, 1970. – 482 с.
8. Michalowski R., Mroz Z. *Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems*// Archives of Mechanics. – 1978. – 30, N 3. – P.259–276.
9. Махненко В. И. Расчетные методы исследования сварочных напряжений и деформаций. – К., Наукова думка, 1976. – 320 с.
10. Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г. *Асимптотический анализ решения теории упругости для трансверсально-изотропного слоя и построение уточненных теорий пластин для контактных задач*// Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань, 1992. – N 24. – С.108–113.
11. Прокопишин И. А. *Численное решение двумерных контактных задач изгиба пластин с учетом обжатия*// Львов. ун-т. – Львов, 1987. – 51с. – Деп. в Укр. НИИНТИ, N 1387–Ук87.

Стаття надійшла до редколегіі 20.10.98

УДК 539.3: 517.956.3

ПОСТАНОВКА ПОЧАТКОВО-ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ ДВОКОМПОНЕНТНИХ ПРУЖНИХ ТІЛ ТА ЇЇ ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ

М. М. Квасній

Kvasniy M. M. Statement of initial boundary value problem for system of equations of dynamic for twocomponents elastic solids and its variational formulation. With use of methods of the continuum mechanics the new initial boundary problem for the dynamic movement equations for twocomponents elastic solids is formulated. The energy of motion is defined in the space of velocities. The variational principle of this problem is proposed.

У даній праці розглянуто двокомпонентне пружне тіло – деформівний твердий каркас (компонента 1) і пружний наповнювач (компонента 2). Вважається, що тіло перебуває під дією силового навантаження.

В основу математичного моделювання тепломасопереносу в пружних тілах покладено концепцію взаємодіючих та взаємопроникаючих континуумів [1]. За базову прийнято компоненту 1, з котрою пов'язано реалізацію Лагранжевого підходу встановлення визначальних співвідношень та балансових рівнянь.

Методами термодинаміки та механіки суцільного середовища у праці [2] побудована математична модель для опису механічних, теплових і дифузійних процесів у двокомпонентних пружних тілах. Базові співвідношення математичної моделі сформульовані в параметрах нормованих за геометричними величинами початкової конфігурації. Тут і в подальшому ці величини відзначаємо нулем.

Надалі обмежимося розглядом сформульованої в праці [2] математичної моделі за ізотермічних умов ($T = \text{const}$).

Нехай вказане двокомпонентне пружне тіло в розглядуваний момент часу t займає область X евклідового простору $\mathbb{R}^3$ з границею ∂X, а в початковий момент часу ($t = 0$) – область X_0, обмежену поверхнею ∂X_0. Область X і поверхня ∂X змінюються в часі за законом руху матеріального континууму.

Сили міжконтиуумної взаємодії $\vec{F}_0^{(1,2)}$ і $\vec{F}_0^{(2,1)}$ визначимо таким чином:

$$\vec{F}_0^{(1,2)} = (\vec{\nabla}_0\mu^{(2)})\rho_0^{(2)}, \quad \vec{F}_0^{(2,1)} = -(\vec{\nabla}_0\mu^{(2)})\rho_0^{(2)},$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 80A10, 35L55.

де $\vec{\nabla}_0$ – оператор Гамільтона в початковій конфігурації; $\mu^{(2)}$ – хімічний потенціалі підсистеми 2; $\rho_0^{(2)}$ – густина підсистеми 2.

Вектор потоку маси підсистеми 2 $\vec{J}_0^2$ введемо по відношенню до точок континууму 1-деформівного твердого каркасу:

$$\vec{J}_0^2 = \rho_0^{(2)}(\vec{v}^{\,(2)} - \vec{v}^{\,(1)}),$$

де $\vec{v}^{\,(1)}$, $\vec{v}^{\,(2)}$ – швидкості відповідних компонент.

Якщо врахувати зв'язки векторів швидкостей $\vec{v}^{(1)}$ і $\vec{v}^{(2)}$ з радіус-векторами $\vec{r}^{\,(1)}$, $\vec{r}^{\,(2)}$: $\vec{v}^{\,(1)} = \dot{\vec{r}}^{\,(1)}$, $\vec{v}^{\,(2)} = \dot{\vec{r}}^{\,(2)}$, то балансові рівняння та фізичні співвідношення моделі, котрі описують механічні та дифузійні процеси у їх взаємозв'язку в насичених двокомпонентних тілах, набувають вигляду

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho_0^{(1)}}{\partial t} = 0,\\ \frac{\partial \rho_0^{(2)}}{\partial t} + \vec{\nabla}_0 \cdot \rho_0^{(2)}(\dot{\vec{r}}^{\,(2)} - \dot{\vec{r}}^{\,(1)}) = 0,\\ \frac{\partial \vec{k}_0^{(1)}}{\partial t} = \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_0^{(1)} + (\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)})\rho_0^{(2)},\\ \frac{\partial \vec{k}_0^{(2)}}{\partial t} = \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_0^{(2)} - (\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)})\rho_0^{(2)};\end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\mu^{(2)} = \frac{\partial L_0}{\partial \rho_0^{(2)}}, \qquad \widehat{\sigma}_0^{(1)} = \frac{\partial L_0}{\partial(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{\,(1)})}, \qquad \widehat{\sigma}_0^{(2)} = \frac{\partial L_0}{\partial(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{\,(2)})},\\ \vec{k}_0^{(1)} = -\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(1)}}, \qquad \vec{k}_0^{(2)} = -\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{r}}^{\,(2)}},\end{gathered} \tag{2}$$

де

$$L_0 = L_0(\rho_0^{(2)},\ \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{\,(1)},\ \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^{\,(2)},\ \dot{\vec{r}}^{\,(1)},\ \dot{\vec{r}}^{\,(2)}). \tag{3}$$

Тут $\rho_0^{(1)}$ – густина підсистеми 1; $\vec{k}_0^{(1)}$ і $\vec{k}_0^{(2)}$ – імпульси поступальної форми руху відповідно компонент 1 та 2; $\widehat{\sigma}_0^{(1)}$ та $\widehat{\sigma}_0^{(2)}$ – тензори напружень Піоли-Кірхгофа для обох компонент; символ $\otimes$ означає операцію тензорного добутку. Система рівнянь (1) – система балансових рівнянь, система рівнянь (2) – система фізичних співвідношень. Потенціальна функція L_0 (3) є характеристичною функцією густини компоненти 2, градієнтів деформації підсистем 1 і 2 та швидкостей обох компонент.

У випадку подання радіус-векторів $\vec{r}^{\,(1)}$ та $\vec{r}^{\,(2)}$ через переміщення $\vec{u}^{\,(1)}$ і $\vec{u}^{\,(2)}$: $\vec{r}^{\,(i)} = \vec{r}_0 + \vec{u}^{\,(i)}$, $i = 1,\ 2$, враховуючи, що $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_0 = \widehat{I}$ (де $\widehat{I}$ – одиничний тензор), потенціальна функція L_0 набуде вигляду

$$L_0 = L_0(\rho_0^{(2)},\ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{\,(1)},\ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{\,(2)},\ \dot{\vec{u}}^{\,(1)},\ \dot{\vec{u}}^{\,(2)}).$$

Із системи рівнянь (1)–(3) можна, за певних умов, виключити змінні $\rho_0^{(1)}$, $\rho_0^{(2)}$. Надалі приймаємо, що в початковому стані кожна із підсистем є однорідною, тобто

$$\rho_0^{(1)}(\vec{r}_0,\ 0) = \rho_0^{(1)*}, \tag{4}$$

$$\rho_0^{(2)}(\vec{r}_0,\ 0) = \rho_0^{(2)*}, \tag{5}$$

де $\rho_0^{(1)*}$, $\rho_0^{(2)*}$ – сталі. З першого рівняння системи (1), враховуючи (4), отримаємо $\rho_0^{(1)} = \rho_0^{(1)*}$. При наближеному знаходженні $\rho_0^{(2)}$ будем нехтувати складовою типу $(\dot{\vec{u}}^{\,(2)} - \dot{\vec{u}}^{\,(1)}) \cdot \vec{\nabla}_0 \rho_0^{(2)}$

в другому балансовому рівнянні системи (1). Це відповідає припущенню про нехтовно малий внесок конвективної складової руху континууму 2 по відношенню до континууму 1. В умовах такого припущення з використанням початкової умови (5) знаходимо

$$\rho_0^{(2)} = \rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})}.$$

Тоді система рівнянь (1)–(3) математичної моделі набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{k}_0^{(1)}}{\partial t} &= \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_0^{(1)} + (\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)}) \rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})}, \\ \frac{\partial \vec{k}_0^{(2)}}{\partial t} &= \vec{\nabla}_0 \cdot \widehat{\sigma}_0^{(2)} - (\vec{\nabla}_0 \mu^{(2)}) \rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})}; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \mu^{(2)} = \frac{\partial L_0}{\partial (\rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})})}, \\ \widehat{\sigma}_0^{(1)} = \frac{\partial L_0}{\partial (\widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(1)})}, \qquad \widehat{\sigma}_0^{(2)} = \frac{\partial L_0}{\partial (\widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(2)})}, \\ \vec{k}_0^{(1)} = -\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{u}}^{(1)}}, \qquad \vec{k}_0^{(2)} = -\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{u}}^{(2)}}, \end{gathered} \tag{7}$$

де

$$L_0 = L_0(\rho_0^{(2)*} e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})},\ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(1)},\ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(2)}, \dot{\vec{u}}^{(1)}, \dot{\vec{u}}^{(2)}). \tag{8}$$

Надалі будемо розглядати ізотропні тіла і вважати, що для (8) справедливе зображення

$$L_0 = \frac{\gamma (\rho_0^{(2)})^2}{2} + L(\widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(1)},\ \widehat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^{(2)}, \dot{\vec{u}}^{(1)}, \dot{\vec{u}}^{(2)}), \tag{9}$$

де константа γ – коефіцієнт пропорційності. Приймемо також, що $|\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})| \ll 1$. Тоді

$$e^{\vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})} \approx 1 + \vec{\nabla}_0 \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}) \tag{10}$$

і будемо нехтувати членами більшого порядку малості, ніж $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}))$ в рівняннях (6).

Якщо врахувати (9), (10) та, для зручності запису, нулики опустити, а $\rho_0^{(2)*}$ позначити через ρ_*, то повна система рівнянь (6)–(8) буде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{k}^{(1)}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \cdot \widehat{\sigma}^{(1)} + \gamma \rho_*^2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})), \\ \frac{\partial \vec{k}^{(2)}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \cdot \widehat{\sigma}^{(2)} + \gamma \rho_*^2 \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})); \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} \widehat{\sigma}^{(1)} = \frac{\partial L}{\partial (\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(1)})}, \qquad \widehat{\sigma}^{(2)} = \frac{\partial L}{\partial (\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)})}, \\ \vec{k}^{(1)} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{u}}^{(1)}}, \qquad \vec{k}^{(2)} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{u}}^{(2)}}, \end{gathered} \tag{12}$$

де

$$L = L(\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(1)},\ \widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{(2)}, \dot{\vec{u}}^{(1)}, \dot{\vec{u}}^{(2)}). \tag{13}$$

Для забезпечення однозначності розв'язку системи рівнянь (11)–(13) необхідні додаткові умови, котрі складаються з початкових умов на параметри задачі та граничних умов на поверхні розділу *двокомпонентне пружне тіло – зовнішнє середовище.*

За початкові приймемо умови, що відповідають вихідному рівноважному стану розглядуваної динамічної системи в момент часу $t = 0$:

$$\vec{u}^{(1)}\big|_{t=0} = 0, \quad \vec{u}^{(2)}\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{14}$$

Граничні умови для системи рівнянь (11) приймемо у вигляді

$$\begin{aligned} &\vec{n}\cdot(\widehat{\sigma}^{(1)} + \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})\widehat{I})\big|_{\partial X_0} = \vec{\sigma}_n^{(1)*}, \\ &\vec{n}\cdot(\widehat{\sigma}^{(1)} - \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})\widehat{I})\big|_{\partial X_0} = \vec{\sigma}_n^{(2)*}, \end{aligned} \tag{15}$$

де $\vec{n}$ – зовнішня до поверхні тіла нормаль; $\vec{\sigma}_n^{(1)*}$, $\vec{\sigma}_n^{(2)*}$ – задані вектор-функції Лагранжевих координат і часу.

Система рівнянь та фізичних співвідношень (11)–(13), початкових (14) та граничних умов (15) складають початково-граничну задачу математичної моделі двокомпонентних пружних тіл у нелінійній постановці.

Якщо в системі рівнянь (11) та граничних умовах (15) врахувати фізичні співвідношення (12), то початково-граничну задачу можна сформулювати таким чином.

Позначимо через Ω_1, Ω_2 – простори тензорів відповідно першого та другого рангу. Нехай $L(\widehat{w}^1, \widehat{w}^2, \vec{w}^3, \vec{w}^4)$ – функція, яка визначена для $\widehat{w}^1 \in \Omega_2$, $\widehat{w}^2 \in \Omega_2$, $\vec{w}^3 \in \Omega_1$, $\vec{w}^4 \in \Omega_1$ і двічі неперервно-диференційовні за своїми аргументами.

Для зручності надалі покладемо $L(\dots) \equiv L(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)},\ \widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)},\ \dot{\vec{u}}^{(1)},\ \dot{\vec{u}}^{(2)})$. Розглянемо в області $Q = X\times(0;t_1)$, де X – обмежена область в $\mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею ∂X, t_1 – додатне число, систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 L(\dots)}{\partial t\partial\dot{\vec{u}}^{(1)}} + \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)})} + \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})) = 0, \\ &\frac{\partial^2 L(\dots)}{\partial t\partial\dot{\vec{u}}^{(2)}} + \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)})} - \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

де $\vec{u}^{(1)}(\xi,t)$, $\vec{u}^{(2)}(\xi,t)$ – шукані вектор-функції від ξ і t $(\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – Лагранжеві координати), котрі задовольняють початкові

$$\vec{u}^{(1)}\big|_{t=0} = 0, \quad \vec{u}^{(2)}\big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(1)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \tag{17}$$

та граничні умови

$$\begin{aligned} &\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(1)})} + \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})\widehat{I}\right)\bigg|_{\partial X_0} = \vec{\sigma}_n^{(1)*}, \\ &\vec{n}\cdot\left(\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{(2)})} - \gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)})\widehat{I}\right)\bigg|_{\partial X_0} = \vec{\sigma}_n^{(2)*}. \end{aligned} \tag{18}$$

Для задачі (16)–(18) сформулюємо варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського. Нагадаємо, що *дією за Гамільтоном* називається функціонал над вектором місця $\vec{r}(\xi, t) = \vec{r}_0 + \vec{u}(\xi, t)$ при русі системи, котрий має вигляд

$$\mathcal{I} = \int\limits_0^{t_1} (\mathcal{K} - W)\, dt, \tag{19}$$

де $\mathcal{K}$ – кінетична, а W – потенціальна енергії системи.

Приймемо, що операції варіювання та диференціювання за часовою змінною комутують

$$(\delta \vec{u}^{\,(i)})^{\cdot} = \delta \dot{\vec{u}}^{\,(i)} \qquad (i = 1, 2) \tag{20}$$

та, що на кінцях проміжку часу $[0, t_1]$ варіації $\delta \vec{u}^{\,(i)}$ дорівнюють нулю

$$\delta \vec{u}^{\,(i)}(\xi, 0) = 0, \qquad \delta \vec{u}^{\,(i)}(\xi, t_1) = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{21}$$

Варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського формулюється так [3]: *від усіх мислимих рухів з проміжку часу $[0, t_1]$, які співпадають в початку і кінці цього проміжку, рух, що здійснюється, відрізняється тим, що для нього дія $\mathcal{I}$ – стаціонарна, тобто її варіація дорівнює нулю*

$$\delta \mathcal{I} = 0. \tag{22}$$

Для початково-граничної задачі (16)–(18) дія за Гамільтоном (19) має вигляд

$$\begin{gathered}\mathcal{I}(\vec{u}^{\,(1)}, \vec{u}^{\,(2)}) = \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{X_0} \Big\{ -L(\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{\,(1)},\ \widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{\,(2)}, \dot{\vec{u}}^{\,(1)}, \dot{\vec{u}}^{\,(2)}) - \\ - \frac{\gamma \rho_*^2}{2} (\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{\,(1)} - \vec{u}^{\,(2)}))^2 \Big\}\, dV\, dt + \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\partial X_0} \Big\{ \vec{\sigma}_n^{(1)\bullet} \cdot \vec{u}^{\,(1)} + \vec{\sigma}_n^{(2)\bullet} \cdot \vec{u}^{\,(2)} \Big\}\, d\Sigma\, dt.\end{gathered} \tag{23}$$

Справді, розглянемо умову (22) рівності нулю першої варіації функціоналу $\mathcal{I}(\vec{u}^{\,(1)}, \vec{u}^{\,(2)})$ (23)

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{t_1} \int\limits_{X_0} \Big\{ -\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{\,(1)})} \cdot\cdot\, \delta(\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{\,(1)})^{\mathsf{T}} - \\ - \frac{\partial L(\dots)}{\partial(\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{\,(2)})} \cdot\cdot\, \delta(\widehat{I} + \vec{\nabla} \otimes \vec{u}^{\,(2)})^{\mathsf{T}} - \frac{\partial L(\dots)}{\partial \dot{\vec{u}}^{\,(1)}} \cdot \delta \dot{\vec{u}}^{\,(1)\,\mathsf{T}} - \frac{\partial L(\dots)}{\partial \dot{\vec{u}}^{\,(2)}} \cdot \delta \dot{\vec{u}}^{\,(2)\,\mathsf{T}} - \\ - \gamma \rho_*^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{\,(1)} - \vec{u}^{\,(2)})\, \delta \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{\,(1)} - \vec{u}^{\,(2)}) \Big\}\, dV dt + \\ + \int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\partial X_0} \Big\{ \vec{\sigma}_n^{(1)\bullet} \cdot \delta \vec{u}^{\,(1)} + \vec{\sigma}_n^{(2)\bullet} \cdot \delta \vec{u}^{\,(2)} \Big\}\, d\Sigma\, dt = 0,\end{gathered} \tag{24}$$

де варіація скалярної функції за тензорним аргументом береться [3, с.449] за формулою

$$\delta \varphi(\widehat{Q}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \widehat{Q}} \cdot\cdot\, \delta \widehat{Q}^{\mathsf{T}}.$$

Тут φ – скалярна функція тензорного аргументу $\widehat{Q}$.

Використавши відому в тензорному аналізі формулу Гаусса–Остроградського [3, с.482], а за часовою змінною – формулу інтегрування частинами [3, с.148] та властивість варіації (20), перетворена варіаційна рівність (24) матиме вигляд

$$\int_0^{t_1}\int_{X_0}\Big\{\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\hat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{\,(1)})}\cdot\delta\vec{u}^{\,(1)}+\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\hat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{\,(2)})}\cdot\delta\vec{u}^{\,(2)}+$$
$$+\frac{\partial^2 L(\dots)}{\partial t\partial\dot{\vec{u}}^{\,(1)}}\cdot\delta\vec{u}^{\,(1)}+\frac{\partial^2 L(\dots)}{\partial t\partial\dot{\vec{u}}^{\,(2)}}\cdot\delta\vec{u}^{\,(2)}+$$
$$+\gamma\rho_*^2\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{\,(1)}-\vec{u}^{\,(2)}))\cdot(\delta\vec{u}^{\,(1)}-\delta\vec{u}^{\,(2)})\Big\}\,dV\,dt-$$
$$-\int_0^{t_1}\int_{\partial X_0}\Big\{\vec{n}\cdot\Big(\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\hat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{\,(1)})}+\gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{\,(1)}-\vec{u}^{\,(2)})\hat{I}\Big)\delta\vec{u}^{\,(1)}+$$
$$+\vec{n}\cdot\Big(\frac{\partial L(\dots)}{\partial(\hat{I}+\vec{\nabla}\otimes\vec{u}^{\,(2)})}-\gamma\rho_*^2\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}^{\,(1)}-\vec{u}^{\,(2)})\hat{I}\Big)\delta\vec{u}^{\,(2)}-$$
$$-\vec{\sigma}_n^{(1)*}\cdot\delta\vec{u}^{\,(1)}-\vec{\sigma}_n^{(2)*}\cdot\delta\vec{u}^{\,(2)}\Big\}\,d\Sigma\,dt-$$
$$-\int_{X_0}\Big\{\Big(\frac{\partial L(\dots)}{\partial\dot{\vec{u}}^{\,(1)}}\cdot\delta\vec{u}^{\,(1)}\Big)\Big|_0^{t_1}+\Big(\frac{\partial L(\dots)}{\partial\dot{\vec{u}}^{\,(2)}}\cdot\delta\vec{u}^{\,(2)}\Big)\Big|_0^{t_1}\Big\}\,dV=0. \tag{25}$$

Із рівності (25), внаслідок довільності задання $\delta\vec{u}^{\,(1)}$, $\delta\vec{u}^{\,(2)}$ в області $X\times(0,t_1)$, використовуючи основну лему варіаційного числення, випливає система рівнянь (16). На поверхні $\partial X\times(0,t_1)$ варіації $\delta\vec{u}^{\,(1)}$, $\delta\vec{u}^{\,(2)}$ довільні, тоді з (25) отримаємо граничні умови (18). Зазначимо, що граничні умови (15), котрі були прийняті при формулюванні початково-граничної задачі, є природними для розглядуваної системи рівнянь. На кінцях проміжку часу $[0,t_1]$ варіації $\delta\vec{u}^{\,(1)}$, $\delta\vec{u}^{\,(2)}$ занулюються згідно з (21).

Таким чином, для динамічної системи, що розглядається в даній роботі, ми сформулювали варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського.

1. Нигматулин Р. И., Динамика многофазных сред. – М., Наука, 1987.– 467с.
2. Бурак Я. Й., Дронюк І. М., Квасній М. М. *Математичне моделювання тепломасопереносу в насичених термопружних пористих тілах в умовах фазового переходу* // Доп. АН України.– 1992.– N10.– С.51-54.
3. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.– М., Наука, 1980.– 512с.

Стаття надійшла до редколегії 30.11.1998

УДК 519.21

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ ЗБУРЕНИХ ДОХОДНОСТІ І РИЗИКУ ТА ШКАЛА НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ

Я. І. Єлейко, А. Ю. Боротюк

Yeleiko Ya. I., Borotyuk A. Yu. The speed of the convergence perturbed profit, perturbed risk and the scale of infinitesimals. Consider the scale $\delta_1(\epsilon), \ldots, \delta_n(\epsilon)$ of infinitesimals with $\varepsilon \to 0$. The perturbed profit and the perturbed risk are presented by decompositions in this scale. The speed of the convergence of perturbed profit and perturbed risk to the respective unperturbed ones is researched.

Розглянемо акцію в випадковому середовищі Ω. Нехай для неї в середовищі Ω є N можливостей отримання прибутку. A_i — подія, яка полягає в настанні і-го варіанту, причому $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i = \Omega$. Позначимо $p_i := P\{A_i\}$ — імовірність настання події A_i, r_i — прибуток, що отримується за даною акцією при настанні події A_i. Тоді середньоочікувана доходність акції $\overline{r}$ є математичним сподіванням випадкової величини ξ, котра виражає прибуток за даною акцією і обчислюється за формулою

$$\overline{r} = \sum_{i=1}^{N} p_i r_i.$$

Ризик акції обчислюється як середньоквадратичне відхилення (корінь квадратний з дисперсії) цієї ж випадкової величини ξ, тобто

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} p_i (r_i - \overline{r})^2}.$$

Зміну середовища будемо характеризувати деяким параметром ε і називатимемо збуренням середовища. В результаті такого збурення середовища зміниться ймовірність настання події A_i — p_i та доходність за даною акцією при настанні події A_i— r_i . Позначимо через p_i^ε — змінену ймовірність і назвемо її збуреною імовірністю, причому $p_i^\varepsilon \to p_i$, при $\varepsilon \to 0$. Аналогічно r_i^ε - збурена доходність, $r_i^\varepsilon \to r_i$, при $\varepsilon \to 0$. Незважаючи на збурення

1991 *Mathematics Subject Classification.* 90A46, 60J99.

середовища, яке приводить до збурених імовірностей настання події A_i — p_i^ε, сума цих імовірностей повинна дорівнювати 1, тобто

$$\sum_{i=1}^{N} p_i^\varepsilon = 1.$$

Нехай є правильними представлення

$$p_i^\varepsilon = p_i + \lambda_{1i}\delta_1(\varepsilon) + \cdots + \lambda_{ni}\delta_n(\varepsilon) + o(\delta_n(\varepsilon)),$$

$$r_i^\varepsilon = r_i + \mu_{1i}\delta_1(\varepsilon) + \cdots + \mu_{ni}\delta_n(\varepsilon) + o(\delta_n(\varepsilon)),$$

де λ_{ij}, μ_{ij} — скалярні коефіцієнти $i = 1 \div n$, $j = 1 \div N$, $\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_n(\varepsilon)$ – шкала нескінченно малих, що $\delta_i(\varepsilon) = o(\delta_{i-1}(\varepsilon))$, $i = 2 \div n$, $\delta_1(\varepsilon) \to 0$, при $\varepsilon \to 0$. Розглянемо множину всеможливих добутків нескінченно малих $\delta_1(\varepsilon), \ldots, \delta_n(\varepsilon)$

$$\Delta_2 := \{\delta_i(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon), \quad i, j = 0 \div n\},$$

де $\delta_0(\varepsilon) := 1$.

Означення 1. *Два добутки* $\delta_i(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon)$ *та* $\delta_k(\varepsilon)\delta_l(\varepsilon)$ *назвемо еквівалентними, якщо* $\frac{\delta_i(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)\delta_l(\varepsilon)} \to c$, *при* $\varepsilon \to 0$, *де* $c = \mathrm{const}$.

Тоді множину Δ_2 можна розбити на класи еквівалентності стосовно даного відношення еквівалентності. Позначимо

$$C_{ij} := \{ \; \delta_k\delta_l \mid \delta_k\delta_l \sim \delta_i\delta_j, \; i < j, \; \forall\, k, l = 0 \div n\}.$$

Отже, отримаємо скінченну кількість множин C_{ij}, котру можемо впорядкувати таким чином.

Означення 2. $C_{ij} < C_{kl}$, *якщо* $(\forall \delta_m\delta_n \in C_{ij}) \wedge (\forall \delta_s\delta_t \in C_{kl}) \;\; \delta_s\delta_t = o(\delta_m\delta_n)$.

Тепер перенумеруємо множину всіх C_{ij} так, щоб всі C_{ij} перебували в порядку зростання, та відкинемо ті, що містять добутки $\delta_i\delta_n$, $i = 1 \div n$, оскільки $\delta_i\delta_n = o(\delta_n)$. Переномеровані множини позначимо $C_1, \ldots, C_n, \ldots, C_p$, де $n \leqslant p \leqslant 2n - 1$, причому $C_i < C_j$, якщо $i < j$.

Виберемо по одному представникові з множини C_j і позначимо відповідно $\tilde{\delta}_j(\varepsilon) = \delta_k(\varepsilon)\delta_l(\varepsilon)$, $k, l = 0 \div n$.

Означення 3. *Множину* $\{\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_p\}$ *називатимемо головним представленням множин* $C_1, \ldots, C_p$.

Означення 4. *Для всіх* i, j, $0 \leqslant i, j \leqslant n$ *розглянемо* $\delta_i\delta_j$. *Тоді існує* k, *таке, що* $\delta_i\delta_j \in C_k$ *або* $\delta_i\delta_j = o(\delta_n)$. *Якщо* $\delta_i\delta_j \in C_k$, *то, оскільки,* $\tilde{\delta}_k \in C_k$, *позначимо*

$$c_{ij} := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_i(\varepsilon)\delta_j(\varepsilon)}{\tilde{\delta}_k(\varepsilon)}.$$

Тоді збурену доходність $\overline{r}^{\varepsilon}$ можна представити таким чином:

$$\overline{r}^{\varepsilon}=\sum_{i=1}^{N}p_i^{\varepsilon}r_i^{\varepsilon}=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{n}\lambda_{ji}\delta_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\mu_{ki}\delta_k\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}p_ir_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{k=0\\ j+k\neq 0}}^{n}\lambda_{ji}\mu_{ki}\delta_j\delta_k, \tag{1}$$

де $\lambda_{0i}=p_i,\;\; \mu_{0i}=r_i$. Введемо позначення

$$a_{ki}:=\sum_{\delta_j\delta_l\in C_k}c_{jl}\lambda_{ji}\mu_{li}. \tag{2}$$

Застосовуючи позначення (2) у формулі (1), отримаємо

$$\overline{r}^{\varepsilon}\sim\sum_{i=1}^{N}p_ir_i+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{p}a_{ki}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)=\overline{r}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{p}a_{ki}\tilde{\delta}_k(\varepsilon). \tag{3}$$

Означення 5. *Функція $f(\varepsilon)$ має збіжність порядку $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)$, якщо $f(\varepsilon)\sim\tilde{\delta}_k(\varepsilon)$.*

Теорема 1. $\delta_1\in C_1$.

Доведення випливає з визначення C_1.

Теорема 2.

a) Для середньоочікуваного збуреного прибутку в загальному випадку є збіжність порядку $\tilde{\delta}_1(\varepsilon)$ до незбуреного прибутку.

b) Щоб досягти збіжності порядку $\tilde{\delta}_s(\varepsilon)$, $1<s\leqslant p$ необхідно, щоб виконувалась умова

$$\sum_{i=1}^{N}a_{ki}=0,\quad k=1\div(s-1).$$

Доведення. Пункти a) та b) випливають з формули (3), яку застосовуємо до різниці $\overline{r}^{\varepsilon}-\overline{r}$.

Тепер розглянемо збуренний ризик

$$\sigma^{\varepsilon 2}=\sum_{i=1}^{N}p_i^{\varepsilon}(r_i^{\varepsilon}-\overline{r}^{\varepsilon})^2.$$

Різницю $r_i^{\varepsilon}-\overline{r}^{\varepsilon}$ можемо представити

$$r_i^{\varepsilon}-\overline{r}^{\varepsilon}=r_i-\overline{r}+\sum_{j=1}^{n}\mu_{ji}\delta_j-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ji}\mu_{ki}\delta_j\delta_k\sim$$
$$\sim r_i-\overline{r}+\sum_{j=1}^{n}\mu_{ji}\delta_j-\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{p}a_{ki}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)=r_i-\overline{r}+\sum_{j=1}^{p}b_{ji}\tilde{\delta}_j(\varepsilon), \tag{4}$$

де

$$b_{ji} = \begin{cases} \mu_{ki} - \sum\limits_{i=1}^{N} a_{ji}, \text{якщо } \exists k : \delta_k = \tilde{\delta}_j \\ - \sum\limits_{i=1}^{N} a_{ji}, \text{якщо } \forall k \ \delta_k \neq \tilde{\delta}_j. \end{cases} \tag{5}$$

Тут також вважається, що у головне представлення $\{\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_p\}$ входять δ_i, $i = 1 \div n$, тільки, можливо під іншими номерами, тобто, якщо $\delta_i \in C_k$, то $\delta_i = \tilde{\delta}_k$. Тоді згідно з формулами (4) та (5) отримаємо

$$(r_i^\varepsilon - \overline{r}^\varepsilon)^2 \sim \left(\sum_{k=0}^{p} b_{ki}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\right)\left(\sum_{l=0}^{p} b_{li}\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\right) = \sum_{k,l=0}^{p} b_{ki}b_{li}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon),$$

де $\tilde{\delta}_0 = \delta_0 = 1$. А також

$$\sigma^{\varepsilon 2} \sim \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{m=0}^{p} \tilde{\lambda}_{mi}\tilde{\delta}_m(\varepsilon)\right)\left(\sum_{k,l=0}^{p} b_{ki}b_{li}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k,l,m=0}^{p} \tilde{\lambda}_{mi}b_{ki}b_{li}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon). \tag{6}$$

У формулі (6) коефіцієнти $\tilde{\lambda}_{mi}$ є коефіцієнтами представлення $p_i^\varepsilon = \sum_{m=0}^{p} \tilde{\lambda}_{mi}\tilde{\delta}_m$, котре можливе згідно з визначенням $\tilde{\delta}_m$. Різниця квадратів збуреного і незбуреного ризиків матиме вигляд

$$\sigma^{\varepsilon 2} - \sigma^2 \sim \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{k,l,m=0 \\ k+l+m\neq 0}}^{p} \tilde{\lambda}_{mi}b_{ki}b_{li}\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon). \tag{7}$$

Тепер розглянемо множину всеможливих добутків $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon)$, де $k, l, m = 0 \div p$. Позначимо її через Δ_3 і аналогічно до множини Δ_2 розіб'ємо її на класи еквівалентності D_t, котрі впорядкуємо і виберемо по одному представнику з кожного ϱ_t (їх буде скінченна кількість) $t = 1 \div q$, причому $\varrho_0 := 1$. Тоді введемо позначення

$$g_{ti} = \sum_{\substack{\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon)\in D_t \\ k+l+m\neq 0}} \tilde{\lambda}_{mi}b_{ki}b_{li}d_{klm}, \quad t = 1 \div q, \tag{8}$$

де коефіцієнт d_{klm} визначається наступним чином.

Означення 6. *Для всіх $k, l, m = 0 \div p$ розглянемо добуток $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon)$. Тоді існує таке t, що $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon) \in D_t$, або $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon) = o\left(\tilde{\delta}_p(\varepsilon)\right)$. Якщо $\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon) \in D_t$, то позначимо*

$$d_{klm} := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{\delta}_k(\varepsilon)\tilde{\delta}_l(\varepsilon)\tilde{\delta}_m(\varepsilon)}{\varrho_t(\varepsilon)}.$$

Отже, враховуючи позначення (8) у формулі (7), приходимо до виразу

$$\sigma^{\varepsilon 2} - \sigma^2 \sim \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{q} g_{ti} \varrho_t. \tag{9}$$

Теорема 3.

a) В загальному випадку для збуреного ризику є збіжність порядку $\varrho_1 = \tilde{\delta}_1 = \delta_1$ *до незбуреного ризику.*

b) Для того, щоб досягти збіжності порядку ϱ_s, $1 \leqslant s \leqslant q$ *необхідно, щоб виконувались умови:*

$$\sum_{i=1}^{N} g_{ti} = 0, \quad t = 1 \div (s-1), \quad 1 \leqslant s \leqslant q.$$

Доведення. Пункти a) та b) випливають з формули (9).

1. Sharpe W. *Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk* // Journal of Finance. – 1964. – September. – P.425-442.
2. Sharpe W. Portfolio theory and capital markets. – New York, McGraw-Hill, 1970.
3. Єлейко Я.І. *Асимптотика функції відновлення для одного класу напівмарківських процесів* // Математичні студії. – 1994, випуск 3. – С.107—110.

Стаття надійшла до редколегії 17.11.98

УДК 512.553

Зелиско Г. В. О кольцах эндоморфизмов ультрапроизведений свободных модулей// Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 5-9.

В работе найдены необходимые и достаточные условия изоморфности кольца эндоморфизмов ультрапроизведения модулей и ультрапроизведения колец эндоморфизмов этих модулей. Доказано, что кольцо $(\prod\limits_{i\in I} End_{R_i}(M_i))/\mathfrak{D}$ является плотным подкольцом (в смысле Джекобсона) в кольце $End_R((\prod\limits_{i\in I} M_i)/\mathfrak{D})$.
Библиогр. 4 назв.

УДК 513.6

Андрийчук В. И. Двойственность в этальных когомологиях кривых над псевдоконечным полем//Вісник Львівського у-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 10-13.

Пусть X — полная гладкая кривая над псевдоконечным полем k. Если $\mathcal{F}$ — локально постоянный конструктивный пучок $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$–модулей, $(n, \operatorname{char} k) = 1$, $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, то существует невырожденное спаривание $\mathrm{H}^r(X, \mathcal{F}) \times \mathrm{H}^{3-r}(X, \widetilde{\mathcal{F}}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ конечных групп. Это распространяет хорошо известную двойственность для кривых над конечными полями на случай кривых над псевдоконечными полями.
Библиогр. 6 назв.

УДК 512.64

Кучма М. И. Симметрическая эквивалентность матричных многочленов и их факторизация // Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 14-18.

В работе найдены условия существования симметрической эквивалентности матриц своим формам Смита и факторизации таких матриц над кольцами многочленов с инволюцией. Получены результаты, касающихся строгой эквивалентности и конгруэнтности матриц.
Библиогр. 8 назв.

УДК 519.48

Тушницкий И. Я. Радикальные фильтры в дуо-кольцах нормирования//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 19-26.

В этой работе получены результаты, аналогичные результатам В.Брендала и Э.Барбу, полученным для областей нормирования. Пусть R — первичное дуо-кольцо нормирования. Для любого первичного идеала P кольца R определим $\mathfrak{F}(P) = \{I$ – идеал кольца R / $I \not\subseteq P\}$. Тогда любой радикальный фильтр $\mathfrak{F}$ кольца R является радикальным фильтром одного из двух видов:
1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P)$ для некоторого первичного идеала P кольца R;
2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(P) \cup \{P\}$ для некоторого первичного идеала P кольца R такого, что $P^2 = P$.
Похожие результаты получены и для всех дуо-колец нормирования.
Библиогр. 3 назв.

УДК 512.544

Артемович О. Д. Разрешимые группы с условиями минимальности и максимальности для не почти локально полициклических подгрупп//Вісник Львівського у-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 27-31.

Охарактеризованы локально разрешимые (соответственно разрешимые) группы, удовлетворяющие условию минимальности (соответственно максимальности) для подгрупп, не являющихся почти локально полициклическими.
Библиогр. 12 назв.

УДК 515.544

Тураш О. В. Разрешимые периодические группы с почти нильпотентными собственными фактор-группами//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 32-35.

Описаны разрешимые периодические группы с почти нильпотентными собственными фактор-группами, а также разрешимые периодические группы, все собственные фактор-группы которых являются конечными расширениями нильпотентных групп класса нильпотентности $\leqslant \mathfrak{c}$.
Библиогр. 14 назв.

УДК 517.53

Микитюк Л. Я., Шеремета М. Н. К аппроксимации рядов Дирихле экспоненциальными многочленами//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 36-39.

Исследована аппроксимация на вертикальных прямых рядов Дирихле с положительными экспонентами, абсолютно сходящихся в полуплоскости $\{s: \ \mathrm{Re}\, s < 0\}$.
Библиогр. 3 назв.

УДК 517.537.72

Сумык О. М. Оценки максимального члена ряда Дирихле снизу//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 40-44.

Указаны условия на коэффициенты ряда Дирихле с положительными возрастающими к $+\infty$ показателями, при выполнении которых логарифм максимального члена оценивается снизу наперёд заданной выпуклой функцией.
Библиогр. 3 назв.

УДК 517.535

Трусевич О. М. Аналоги теоремы Бореля для одного класса положительных функциональных рядов//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 45-47.

Для регулярно сходящегося функционального ряда $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n\}$ получены условия, которые являются достаточными для выполнения соотношения типа Бореля

$$\ln F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma), \quad \sigma \to +\infty,$$

где $\mu(\sigma) = \max\{a_n \exp\{\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n\} : n \geqslant 0\}$, вне некоторого множества.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.53

Кушнир В. О. Аналог теоремы Хеймана для аналитических функций ограниченного l-индекса//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 48-51.

Пусть G – произвольная комплексная область и l – положительная непрерывная функция в G такая, что

$$l(z) > \frac{\beta}{\mathrm{dist}(z, \partial G)}, \quad z \in G, \tag{1}$$

где $\beta > 1$ – постоянная. Для $r \in [0, \beta]$ определим

$$\lambda_1(r) = \inf\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)}, \ z_0 \in G\right\}$$

и

$$\lambda_2(r) = \sup\left\{ \frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G \right\}.$$

Через $Q_\beta(G)$ обозначим класс положительных непрерывных функций, которые, за исключением (1), для всех $r \in [0, \beta]$ удовлетворяют условию $0 < \lambda_1(r) \leqslant \lambda_2(r) < +\infty$. Установлен критерий ограниченности l-индекса для аналитической функции в произвольной комплексной области, имеющей по крайней мере одну сингулярную точку на ∂G.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.547.3

Василькив Я. В., Кондратюк А. А. Интегральные средние логарифмов произведений Бляшке//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 52-61.

Установлены критерии ограниченности q-тых интегральных средних $(1 < q < +\infty)$ логарифма произведения Бляшке с нулями, сосредоточенными на конечной системе лучей.
Библиогр. 14 назв.

УДК 517.524

Гоенко Н. П. О сходимости остатков четной части разложения отношения функций Лауричеллы в ветвящуюся цепную дробь//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 62-66.

Построена четная часть разложения отношения гипергеометрических функций Лауричеллы $F_D^{(N)}(a, b_1, b_2, \ldots, b_N; c; z)/F_D^{(N)}(a+1, b_1+1, b_2, \ldots, b_N; c+1; z)$ с параметром $a \neq 0$ в ветвящуюся цепную дробь. Используя признак сходимости типа Слешинского–Прингсгейма для ветвящихся цепных дробей, исследована сходимость остатков четной части в поликруге $\left\{z \in \mathbb{C}^N : |z_j| < r,\ j = \overline{1, N}\right\}$ и на луче $\left\{z \in \mathbb{C}^N : z_1 = z_2 = \cdots = z_N\right\}$.
Библиогр. 3 назв.

УДК 517.956.25

Плеша М. И. Поведение решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в окрестности ребра//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 67-76.

В настоящей заметке рассмотрена задача Дирихле для квазилинейных эллиптических недивергентных уравнений второго порядка в областях с рёбрами. Здесь построена барьерная функция и при помощи принципа сравнения получена оценка решения в окрестности ребра области. Далее, исспользуя метод колец Кондратьева, оценён градиент решения в окрестности ребра. Кроме того, получены оценки (в весовой Соболевской норме) вторых обобщённых производных решения.
Библиогр. 10 назв.

УДК 517.95

Бугрий О. Н. Система параболических вариационных неравенств без начальных условий//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 77-86.

Рассмотрена система параболических вариационных неравенств без начальных условий в неограниченной по всех переменных области. Получены условия существования и единственности решения этого неравенства в классе функций, которые ведут себя как $e^{\mu t}, \mu > 0$ при $t \to -\infty$ и $e^{-\lambda|x|}, \lambda > 0$ при $|x| \to +\infty$.
Библиогр. 13 назв.

УДК 517.956.3

Говда Ю.И. Смешанные задачи для одной гиперболической системы уравнений второго порядка//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 87-92.

Рассмотрены две смешанные задачи для гиперболической системы шести уравнений второго порядка $\partial^2\vec{U}/\partial t^2 + \mathrm{L}_0\vec{U} +$ младшие члены $= \vec{F}$, где L_0 — неэллиптический дифференциальный оператор вида

$$\mathrm{L}_0\vec{U} \equiv -\begin{pmatrix} \beta\vec{\nabla}^2\vec{u}^1 + \nu\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \\ \gamma\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^1) + \alpha\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}^2) \end{pmatrix}, \quad \vec{U}(x,t) = \begin{pmatrix} \vec{u}^1(x,t) \\ \vec{u}^2(x,t) \end{pmatrix},$$

$\vec{u}^i = \mathrm{colon}\big(u_1^i, u_2^i, u_3^i\big)$, $i = 1, 2$, к которой может быть сведена система уравнений локально градиентной теории упругости. Установлены условия корректности смешанных задач в классе решений почти всюду. При этом использовались известные результаты о разрешимости задачи Коши для абстрактного гиперболического уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве.
Библиогр. 12 назв.

УДК 517.983

Яворский Ю. М. О резольвентах нестандартных разностных операторов//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 93-97.

В настоящей работе продолжены исследования, изложенные в работах В. Э. Лянце и автора. Выводится формула, выражающая резольвенту разностного оператора Штурма-Лиувилля на всей (дискретной) оси с помощью резольвент соответствующих операторов на полуосях. Результат используется для доказательства околостандартности собственных и присоединенных элементов оператора на всей оси.
Библиогр. 5 назв.

УДК 515.12

Левицкая В. С. О функториальных топологиях и функториальных дифференцируемых структурах на функциональных пространствах//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 98-101.

Рассмотрены некоторые задачи существования функториальных топологизаций множества непрерывных функций и функториальных дифференцируемых структур на функциональных пространствах, являющихся бесконечномерными многообразиями.
Библиогр. 7 назв.

УДК 519.21

Елейко Я. И., Нищенко И. И. Предельная теорема для случайной матричнозначной эволюции//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 102-106.

Рассматривается случайная матричнозначная эволюция $N^\varepsilon(t)$, функционирующая в случайной среде, определяемой регенерирующим процессом $x(t)$. Изучено асимптотическое поведение $M\,N^\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$, $t \to \infty$, в предположении, что матрица $M\,N^\varepsilon(\tau)$, где τ – момент регенерации процесса $x(t)$, разложима.
Библиогр. 2 назв.

УДК 539.3

Доманский П. П. Построение и анализ уравнений движения цилиндрических тел из материал нагана//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 107-118.

В работе получена одномерная математическая модель уравнений движения цилиндрических тел териала Мурнагана. Метод получения основывается на разложении базовых параметров в ряд по т ному базису. Рассмотрены частные случаи полученных уравнений.
Библиогр. 7 назв.

УДК 539.3

Галяс О.Я., Прокопишин И.А., Хлебников Д.Г. Метод реализации условий одностороннег такта и трения в контактных задачах изгиба трансверсально-изотропных пластин // Вісник Львів ун–ту, сер. мех.–матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 119-126.

На основании теории Тимошенко с дополнительным учетом обжатия рассматривается квазистат ая контактная задача с трением об изгибе трансверсально-изотропной пластины жестким штампо моделирования условий контакта используется идея введения между контактирующими телами пром чного упруго-пластического слоя. После дискретизации по параметру нагружения исходная задача с к последовательности задач о контакте штампа и пластины через линейно-упругий слой с заданым р делением неупругих деформаций в нем.
Численная реализация осуществлена методом конечных элементов с использованием линейных тре ных элементов. Для плоской задачи изгиба жестко закрепленной пластины штампом исследована з мость контактных напряжений от коэффициента трения и сдвиговой жесткости пластины.
Библиогр. 11 назв.

УДК 539.3: 517.956.3

Квасний М. М. Постановка начально-краевой задачи для системы уравнений динамики упругих щенных пористых тел и ее вариационная формулировка//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-ма 1999. – Вып. 53. – С. 127-132.

Используя методы континуальной механики, в работе дана постановка начально-краевой задач системы уравнений динамики упругих насыщенных пористых тел, находящихся под воздействием си нагружения. Предложена вариационная формулировка этой задачи.
Библиогр. 3 назв.

УДК 519.21

Елейко Я. И., Боротюк А. Ю. Скорость сходимости возмущенных доходности и риска в бесконечно малых//Вісник Львівського ун-ту, сер. мех.-матем. – 1999. – Вып. 53. – С. 133-137.

Рассмотрена шкала $\delta_1(\epsilon), \ldots, \delta_n(\epsilon)$ бесконечно малых величин при $\varepsilon \to 0$. Исследована скорость схо сти возмущенных доходности и риска к соответствующим невозмущенным.
Библиогр. 3 назв.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРІВ

1. Стаття повинна містити нові результати автора з повним їх доведенням. Не рекомендується робити великі огляди вже опублікованих результатів. Посилання на неопубліковані роботи не допускаються.

2. Текст статті повинен бути підготовлений на комп'ютері, як правило, українською мовою. До редакції подається:

– два примірники статті з підписом автора (співавторів) на останній сторінці;

– анотації англійською та російською мовами, які повинні містити прізвище автора та назву статті;

– електронний варіант статті та анотацій на дискеті 3,5", яка буде повернена автору (тексти можна надіслати за адресою *holovaty@yahoo.com*)

– довідка про автора (співавторів), в якій треба вказати ім'я, по батькові та прізвище автора, місце роботи, посаду, домашню адресу, телефон та електронну адресу.

Обсяг статті не повинен перевищувати 12 сторінок при розмірі шрифтів 12pt. На першій сторінці вказується номер УДК.

3. Вимоги до набору:

– текст статті створюється в одній з версій TEX'у (формати Plain-TEX, AMS-TEX чи LATEX). Рекомендуємо використовувати стильовий файл amsppt.sty; тексти, набрані в редакторах ChiWriter та Word не приймаються;

– номери формул ставляться з правого боку; нумерувати треба лише формули, на які є посилання;

– в посиланнях на теорему з монографії вказуєть сторінка, на якій вона знаходиться.

4. Рисунки до статті подаються у графічному форматі BMP чи PCX. Назва рисунку чи його номер не входять у зображення і створюються засобами TEX'у. Реальний розмір графічного зображення вибирається з міркувань, що воно буде друкуватися на принтері з розділювальною здатністю 600 dpi.

5. Література подається загальним списком у порядку посилань на джерела в тексті статті. Подаємо зразки бібліографічного опису книги, статті, препринту, дисертації, депонованого рукопису, тез доповідей конференцій (з'їздів і т. п.):

1. Грабович А.І. Назва. – К.: Наукова думка. 1985. – 306 с. *або*
   Грабович А.І. Назва: В 2-х т.– К.: Наукова думка, 1985.–Т.1.–306 с.
2. Кравчук О.М. *Назва*: // Мат. сб.–1985.–2, №2 2.–С.4–20.
3. Михайленко Г.Д. Назва.– М., 1993.– 9 с.– (Препринт/НАН України. ІППММ; N80.1).
4. Коваленко О. В. Назва: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – К., 1977, – 30 с.
5. Сенів С.М. *Назва*.–К., 1992.– 17 с. – Деп. в ДНТБ України, №2020-1995.
6. Муравський В.К. *Назва* // Нелінійні диференціальні рівняння: Тези доповідей. (Київ, 27 сер.–2 вер. 1994 р.).– Київ, 1994.–С. 540–551.