*ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ*
*Серія мех.-мат.1999.Вип.54.С.5-9*

*VISNYK LVIV UNIV.*
*Ser.Mech-Math.1999.Vol.54.P.5-9*

УДК 519.21

Ірина Ардан

# ДЕЯКІ ПРИНЦИПИ ВИБОРУ СТРАХОВИХ ВНЕСКІВ

Різноманітні економічні механізми стабілізації або "зменшення ризику" належать здебільшого до двох типів. Перший тип – це механізми, так чи інакше націлені на реальне зниження ймовірностей аварії чи розмірів відповідних збитків, другий – різні механізми перерозподілу ризику. Сам собою механізм перерозподілу ризику не знижує ймовірності появи ризикових ситуацій, а лише перерозподіляє відповідальність за ризик. Такі механізми тим ефективніші, чим більше самостійних економічних одиниць у системі і чим менша для кожної з них ймовірність збитків.

Укладаючи страхові контракти, припускають наявність апріорної інформації про розподіл можливих збитків і можливості уточнення інформації за результатами діяльності економічних одиниць. Під час формування механізмів перерозподілу ризику роблять вибір між багатьма можливостями.

Серед них:

1) створення страхової організації, яка бере на себе зобов'язання повного чи часткового повернення збитків із коштів, отриманих у результаті нагромадження страхових внесків;

2) створення організації взаємного страхування. В цьому випадку відшкодування збитків відбувається шляхом перерозподілу страхового фонду;

3) особливим макромеханізмом є перестрахування, тобто перерозподіл ризику між страховими організаціями шляхом, наприклад, перерозпродажу зобов'язань на покриття страхових витрат або на основі інших договорів між страховими фірмами;

4) використання опціонів, тобто довготермінових угод про право на купівлю чи продаж. Ці договори укладають у випадку, коли треба гарантувати купівлю чи продаж за наперед домовленою ціною. Їх використовують під час продажу акцій, укладають у зв'язку з використанням іноземної валюти.

Побудова практично будь–якої моделі страхування складається з таких елементів.

1. Опис випадкових процесів надходження прибутків чи виникнення збитків окремих елементів системи і опис процесу виникнення глобальних збитків (чи прибутків) системи в цілому.

2. Визначення цілей окремих одиниць, які здебільшого призводять до визначення функції корисності цих економічних одиниць.

3. Визначення механізму стабілізації. У випадку перерозподілу ризику принциповим є вибір між деякими можливостями. Перша можливість – створити незалежну страхову організацію, яка має власну мету – максимізувати прибутки від страхової діяльності, мінімізувати ймовірності банкрутства і т.д. Друга

– створення страхового товариства, фонд якого "справедливо" розподіляється між членами товариства в найвигіднііший час. Тоді розміри внесків, правила розподілу фонду спираються на принципи, що пов'язані з міркуваннями стабільності, рівноваги поведінки системи. Внаслідок такого підходу страхове товариство є добровільним об'єднанням економічних одиниць: розмір внесків визначають вони добровільно, з огляду на власні інтереси. а правила розподілу фонду визначають до реалізації економічної ситуації. У такій ситуації якість функціонування відповідних самостійних "страхових" одиниць повинна зумовлюватись їхньою зацікавленістю.

4. Опис механізму взаємодії між страховим товариством і клієнтами. В кінцевому результаті розв'язок такої задачі призводить до опису "ринкової" рівноваги у відповідній моделі, наприклад, у простому випадку до визначення вартості страхових полісів. Найскладніша задача виникає при наявності клієнтів з різними степенями ризику, для яких випадкові величини можливих збитків мають різні розподіли ймовірностей. У загальному випадку виникає необхідність у природному "ринковому" розподілі клієнтів на однорідні групи.

Що стосується механізмів розподілу, то можливі різні варіанти. Можна визначити різні ціни страхових полісів при різних максимальних сумах відшкодувань (у цьому випадку повернення може бути частковим). При єдиній ціні страхових полісів після реалізації випадкової ситуації повертати частину виплачених сум тим клієнтам, які не потребують відшкодувань збитків (премія за стабільність). Розглянемо деяку страхову організацію, яка випустила і продала $n$ страхових полісів. Нехай резервний капітал дорівнює $S$. Кожен страховий контракт містить страхові виплати клієнтам, які є незалежними випадковими величинами (ВВ). Позначимо через $X_i$ виплати і-му клієнту, а її функцію розподілу (ФР) – $F_i$. Вважаємо, що $X_i \geqslant 0$. Загальні страхові виплати, які породжені цим набором страхових полісів має вигляд $X = \sum X_i$. Функцію розподілу ВВ $X$ позначимо через $F(x)$. $F(x)$ називають розподілом ризику страхової компанії. Припустимо, що ВВ $X$ має скінченне математичне сподівання $EX = M$ і дисперсію $DX$. Ціна полісу $M_1 = \frac{M}{n}$ називається чистою ціною, тоді середній дохід компанії дорівнює нулю. Насправді в ціну поліса входить ще так зване навантаження, яке відповідає витратам компанії на сам процес страхування з прийнятим для компанії рівнем прибутку. Нехай $L_i$ – навантаження, що відповідає і-му полісу. Тоді перед початком страхових виплат компанія має капітал

$$S + \sum L_i + M = R + M.$$

Величина $R$ називається вільним резервом. Ризикова ситуація страхової компанії характеризується двома елементами $R$ та $F(x)$. Виникають такі проблеми:

1) страхова компанія так повинна визначити свою політику і навантаження, щоб ризик був мінімальним;

2) треба проаналізувати цю ризикову ситуацію і спробувати її "оптимізувати" за допомогою деяких механізмів перестрахування. Нехай $Y = R + M - X$ – кінцевий капітал страхової компанії, $G(y)$ – ФР ВВ $Y$. Між ФР $G(y)$ і ризиковими ситуаціями $(R, F(x))$ встановлюється взаємнооднозначна відповідність, і замість всіх ризикових ситуацій можна розглядати множину ймовірнісних розподілів, які їм відповідають.

Для визначення оптимальної політики страхової компанії треба порівнювати різні ризикові ситуації. Страхова компанія повинна визначити свою систему переваг на множині ВВ $Y$ майбутнього прибутку. Практично задача зводиться до того, щоб кожній ВВ $Y$ поставити у відповідність число $U(Y)$ – якість чи корисність ВВ прибутку $Y$, де $U(Y) = \int u(y)dG(y) = Eu(Y)$, $u(y)$ – деяка функція корисності грошей компанії, $G_Y(y) = P\{Y < y\}$. Отже, корисність будь-якої ризикової ситуації може бути представлена як середнє значення випадкової корисності майбутнього прибутку. Вивчення відношення страхової компанії до різних ризикових ситуацій рівносильне дослідженню властивостей функції $u(y)$.

Нехай компанія володіє початковим капіталом $S$, а її функція корисності має вигляд $u(y) = ay^2 + by + c$. Компанія має справу з $n$ клієнтами і $X_i$ – випадкова величина, яка означає можливі збитки і-го клієнта. Вважаємо, що клієнти однорідні в тому сенсі, що початковий капітал $I$ однаковий, функція корисності $u_1(y)$ така сама для всіх $X_i$, а саме – $u_1(x) = |a_1x + b_1|$. Випадкові величини $X_i$ однаково розподілені та незалежні в сукупності. Будемо вважати, що ФР $F_i(x)$ ВВ $X_i$ має вигляд $F_i = c_1F_1(x) + c_2F_2(x)$, де $F_1(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$, $F_2(x) = 1 - e^{-\lambda_2 x}$, $c_1 + c_2 = 1$. Тоді $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ – сумарна вимога на виплату збитків.

Нехай $d$ – ціна одного страхового полісу. Тоді $D = nd$ є сумарний страховий внесок.

Орієнтуючись на очікувану корисність, страхова компанія погодиться страхувати клієнтів, якщо

$$Eu(S + D - X) \geqslant u(S). \tag{1}$$

Клієнт буде страхуватися тільки тоді, коли

$$u_1(I - d) \geqslant E(I - X_1). \tag{2}$$

Нехай $D^*$ – найменше з $D$, для яких виконується нерівність (1), а $d^*$ – найбільше зі значень $d$, для яких правильна нерівність (2). Тоді якщо $D^* > nd^*$, то страхування неможливе. Якщо $D^* \leqslant nd^*$, то страхування можливе і $d^* \approx \frac{D^*}{n}$.

Згідно з нашими припущеннями ФР $F_X(x)$ ВВ $X$ має вигляд

$$F_X(x) = \int_0^x f_X(y)dy,$$

де $f_X(y)$ – щільність розподілу ВВ $X$, яка вираховується в явному вигляді

$$f_X(x) = e^{-\lambda_1 x}\left(A_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + A_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + A_{n-1}\frac{x}{1!} + A_n\right) +$$
$$+ e^{-\lambda_2 x}\left(B_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!)} + B_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + B_{n-1}\frac{x}{1!} + B_n\right), \tag{3}$$

де

$$A_1 = \lambda_1^n c_1^n, \quad B_1 = \lambda_2^n c_2^n,$$

$$A_k = \frac{(\lambda_1 c_1)^{n-k+1}\lambda_2 c_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^{k-1}} \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_n^{i+1} C_{k-2}^i (\lambda_1 c_1)^{k-2-i} (\lambda_2 c_2)^i,$$

$$B_k = \frac{(\lambda_2 c_2)^{n-k+1}\lambda_1 c_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^{k-1}} \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_n^{i+1} C_{k-2}^i (\lambda_2 c_2)^{k-2-1} (\lambda_1 c_1)^i, k = \overline{2, n}.$$

Тоді правильна лема.

**Лема.** *Якщо щільність розподілу $f_X(x)$ ВВ $X$ задається формулою (3), тоді ФР $F_X(x)$ ВВ $X$ має вигляд*

$$F_X(x) = K_n - e^{\lambda_1 x}\left(K_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + K_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + K_{n-1}\frac{x}{1!} + K_n\right)$$
$$+ H_n - e^{-\lambda_2 x}\left(H_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + H_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + H_{n-1}\frac{x}{1!} + H_n\right), \tag{4}$$

$$\text{де}\quad K_m = \frac{1}{\lambda_1^m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_1^{i-1}A_i,\quad H_m = \frac{1}{\lambda_2^m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_2^{i-1}B_i,\qquad m = \overline{1,n}.$$

Знайдемо $d^*$ з врахуванням умови (2). Оскільки $u_1(I-d) = |a_1(I-d)+b_1|$, то

$$Eu_1(Y) = \int_0^I |a_1(I-x)+b_1|dF(x) =$$
$$= \begin{cases} (a_1 I + b_1)F(I) + a_1\left[\dfrac{1}{\lambda_1}(e^{-\lambda_1 I}R + R_1) + \dfrac{1}{\lambda_2}(e^{-\lambda_2 I}T + T_1)\right],\ X \leqslant I + \dfrac{b_1}{a_1} \\ -(a_1 I + b_1)F(I) - a_1\left[\dfrac{1}{\lambda_1}(e^{-\lambda_1 I}R + R_1) + \dfrac{1}{\lambda_2}(e^{-\lambda_2 I}T + T_1)\right],\ X > I + \dfrac{b_1}{a_1}, \end{cases}$$

де

$$R_1 = \frac{A_1 n}{\lambda_1^n} + \frac{A_2(n-1)}{\lambda_1^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}2}{\lambda_1^2} + \frac{A_n}{\lambda_1},$$
$$T_1 = \frac{B_1 n}{\lambda_2^n} + \frac{B_2(n-1)}{\lambda_2^{n-1}} + \ldots + \frac{B_{n-1}2}{\lambda_2^2} + \frac{B_n}{\lambda_2};$$
$$R = A_1 n\frac{I^n}{n!} + \frac{A_1 n + A_2(n-1)\lambda_1}{\lambda_1}\frac{I^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$
$$+ \frac{A_1 n + A_2(n-1)\lambda_1 + A_3(n-2)\lambda_1^2 + \ldots + A_{n-1}2\lambda_1^{n-1} + A_n\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}I +$$
$$+ \frac{A_1 n + A_2(n-1)\lambda_1 + \ldots + A_{n-1}2\lambda_1^{n-2} + A_n\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^n};$$
$$T = B_1 n\frac{I^n}{n!} + \frac{B_1 n + B_2(n-1)\lambda_2}{\lambda_2}\frac{I^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$
$$+ \frac{B_1 n + B_2(n-1)\lambda_2 + \ldots + B_{n-1}2\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2^n};$$
$$F(I) = K_n - e^{-\lambda_1 I}\left(K_1\frac{I^{n-1}}{(n-1)!} + K_2\frac{I}{\lambda^{n-1}} + \ldots + K_{n-1}I + K_n\right) -$$
$$H_n - e^{-\lambda_2 I}\left(H_1\frac{I^{n-1}}{(n-1)!} + H_2\frac{I}{\lambda^{n-1}} + \ldots + H_{n-1}I + H_n\right).$$

Підставивши вираз (5) в умову (2) одержимо умову на ціну $d$ одного полісу.

**Теорема.** *Ціна полісу $d$ для заданої функції корисності повинна задовольняти таку умову*

$$0 < d \leqslant I + \frac{b_1}{a_1} - \frac{Eu_1(I - X_1)}{a_1}. \tag{6}$$

*Доведення.* Виберемо загальну суму страхових внесків $D$, враховуючи принцип "нульової корисності". Функція корисності $u(y)$ задовільняє умови $u'(y) > 0, u''(y) \leqslant 0$, тобто $u'(y) = 2ay + b > 0, u''(y) = 2a \leqslant 0$. $D$ знаходимо з рівняння

$$Eu(S + D - X) = u(S) \tag{7}$$

Оскільки $u(S) = aS^2 + bS + c$,

$$Eu(Y) = \int_0^\infty u(S + D - X)dF(x) =$$

$$a(S + D)^2 + b(S + D) + c - (2a(S + D) + b)EX + a(D(X) + (EX)^2),$$

де $EX$ – математичне сподівання, $DX$ – дисперсія в.в. $X$, тоді

$$aD^2 + D(h - 2aEX) - hEX + a(D(X) + (EX)^2) = 0, h = 2aS + b. \tag{8}$$

Рівняння (8) має розв'язок

$$D_{1,2} = \left(EX - \frac{h}{2a}\right) \pm \frac{\sqrt{h^2 - 4a^2D(X)}}{2a}.$$

$D_1, D_2$ повинні бути додатні, тоді якщо:
a) $\frac{h}{2a} > \sigma X$, то $S > \sigma X - \frac{b}{2a}$, $D_{1,2} \leqslant EX - \sigma X \pm \frac{\sqrt{h^2 - 4a^2D(X)}}{2a}$,
при $\frac{h}{2a} = \sigma X, D = EX - \sigma X$;
b) $\frac{h}{2a} < -\sigma X$, то $S > -\sigma X - \frac{b}{2a}$, $D_{1,2} \geqslant EX + \sigma X \pm \frac{\sqrt{h^2 - 4a^2D(X)}}{2a}$,
при $-\frac{h}{2a} = \sigma X, D = EX + \sigma X$.

$$EX = n\left(\frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}\right), \quad DX = n\left(\frac{c_1}{\lambda_1^2} + \frac{c_2}{\lambda_2^2}\right).$$

---


1 *Бенинг В.Е., Ротарь В.И.* Одна модель оптимального поведения страховой компании// Экон. и мат. методы. – 1993. – Т. 29. – Вып. 4. – С. 617-626.

2 *Ротарь В.И.* Некоторые замечания о существовании и свойствах функции полезности// Экон. и мат. методы. – 1982. – Т.18. – Вып. 4. – С. 719-723.

3 *Ротарь В.И.* Теория вероятностей. – М., 1992.

4 *Фишберн Н.С.* Теория полезности для принятия решений. – М., 1978.

5 *Эмбрехтс П., Клюппельберг К.* Некоторые аспекты страховой математики// Теория вероятности и ее применение. – 1993. – Т. 38. – Вып. 2. – С. 374-416.


**Ardan I.**

**SOME KINDS OF CHOICE THE INSURANCE ACCIDENTS**

The article considers the portfolio of the insurance company. The portfolio contains one kind of insurance accidents. In this article the terms of the policy price, the amount of summary investments for the functioning of the insurance company have been defined. All these terms were calculated on the condition that the client function is linear combination of the two exponential distributions, utility functions of the client $u(y) = |a_1y + b_1|$, utility function of the company $u(y) = ay^2 + by + c$.

Стаття надійшла до редколегії 07.11.98