ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 15–26

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 15–26

УДК 517.95

Галина Барабаш

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

У цій праці ми дослідили умови існування розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння. Трудність вивчення таких рівнянь полягає у побудові притаманного саме йому функціонального простору і виборі методу дослідження. Задачі для параболічних рівнянь з другою похідною за часом, нелінійна частина яких пов'язує молодші похідні за просторовими змінними, розглянуто у [1-5].

У праці [6] доведено існування єдиного класичного розв'язку задачі Коші для нелінійного рівняння вищого порядку. Умови існування та єдиності розв'язку мішаної задачі для рівнянь, нелінійна частина яких містить старші похідні за просторовою змінною, одержано в [7, 8].

У праці [9] досліджено мішану задачу для нелінійного рівняння типу коливання пластинки, в [10], застосовуючи метод Гальоркіна, вивчено поведінку нульового розв'язку нелінійного параболічного рівняння з другою похідною за часом. Використовуючи цей метод, ми довели теорему існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння.

Нехай Ω - обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \subset C^2$. Розглянемо в циліндрі $Q_{t_0,T} = \Omega \times (t_0;T)$ рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) - \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x,t)\,|u_{x_i}|^{p-2}\,u_{x_i}\right)_{x_i} - \\ - \sum_{i,j=1}^{n}\left(c_{ij}(x,t)u_{x_j t}\right)_{x_i} = f(x,t) \qquad (1)$$

з крайовими

$$u|_{S_{t_0,T}} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_{t_0,T}} = 0 \qquad (2)$$

і початковими

$$u(x,t_0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (3)$$

$$u_t(x,t_0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \qquad (4)$$

умовами. Тут $p \geqslant 3$, $S_{t_0,T} = \partial\Omega \times (t_0;T)$, $T > 0$, ν - зовнішня нормаль до $S_{t_0,T}$.

Позначимо через $H_0^2(\Omega)$ замикання множини неперервно диференційовних функцій в $\overline{\Omega}$, які задовольняють умови (2), за нормою простору $H^2(\Omega)$. На основі нерівності Фрідріхса [11, с. 50] у просторі $H_0^2(\Omega)$ можна ввести еквівалентну норму за формулою

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha u)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Введемо простір $V = H_0^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ з нормою

$$\|u\|_V = \|u\|_{H_0^2(\Omega)} + \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)}.$$

Розглянемо простір $V_0 = H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. При $2 < n \leqslant 5: \;\; 3 \leqslant p \leqslant 2 + \frac{4}{n-2}$ (у випадку $n \leqslant 2: \;\; p \geqslant 3$) простір V_0 вкладений у простір $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Припускатимемо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

Умова (A). $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t), \;\; (x,t) \in Q_{t_0,T};$

$a_{\alpha\beta tt} \in L^\infty(Q_{t_0;T}), \; a_{\alpha\beta x_i x_j} \in L^\infty(D_{t_0}), \;\; |\alpha| = |\beta| \leqslant 2, \;\; i, \; j = 1, ..., n;$

$$a_0 \int\limits_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha v)^2 \, dx \leqslant \int\limits_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta v D^\alpha v \, dx \leqslant a_1 \int\limits_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha v)^2 \, dx,$$

$t \in [t_0; T], \; a_0 > 0$ для довільної $v \in H_0^2(\Omega)$, де $D_\tau = Q_{t_0,T} \cap \{t = \tau\}$.

Умова (B). $0 < b_0 \leqslant b_i(x,t) \leqslant b_1, \;\; (x,t) \in Q_{t_0,T};$

$b_{it} \in L^\infty(Q_{t_0,T}), \; b_{ix_j} \in L^\infty(D_{t_0}), \;\; i, \; j = 1, ..., n.$

Умова (C). $c_{ijt} \in L^\infty(Q_{t_0,T}), \; c_{ijx_i} \in L^\infty(D_{t_0}), \;\; i, \; j = 1, ..., n;$

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geqslant c_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \;\; c_0 > 0, \;\; (x,t) \in Q_{t_0,T}.$$

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(4) називається функція u, яка задовольняє рівність*

$$\int_{t_0}^T \int\limits_{D_t} \Bigg(u_{tt} v + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u D^\alpha v + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t) u_{x_j t} v_{x_i} \Bigg) dx \, \psi(t) \, dt = \int_{t_0}^T \int\limits_{D_t} f(x,t) v \, dx \, \psi(t) \, dt \qquad (5)$$

для довільних функцій $v \in H_0^2(\Omega)$, $\psi \in L^1(t_0; T)$ і початкові умови (3), (4).

Теорема. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**; $f, \; f_t \in L^2(Q_{t_0,T})$; $u_0 \in V_0$; $u_1 \in H_0^2(\Omega)$; $p \geqslant 3$ *при* $n \leqslant 2$, $3 \leqslant p \leqslant 2 + 4/(n-2)$ *при* $2 < n \leqslant 5$.

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(4), який задовольняє включення

$$u \in L^\infty((t_0; T); V), \;\; u_t \in L^\infty((t_0; T); H_0^2(\Omega)), \;\; u_{tt} \in L^\infty((t_0; T); L^2(\Omega)).$$

T залежить від початкових умов і коефіцієнтів рівняння (1).

Доведення. Виберемо у просторі V повну систему функцій $\{\omega_k(x)\}$. Нехай

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0k}^N \omega_k(x), \quad u_1^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{1k}^N \omega_k(x),$$

причому $u_0^N(x) \to u_0(x)$ в V_0, $u_1^N(x) \to u_1(x)$ в $H_0^2(\Omega)$ при $N \to \infty$. Будемо шукати розв'язок задачі (1) - (4), використовуючи метод Гальоркіна. Нехай $\{u^N(x.t)\}$ послідовність функцій, які визначаються рівністю

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\omega_k(x), \quad N = 1, 2, ...,$$

де $C_1^N(t), ..., C_N^N(t)$ – розв'язок задачі Коші

$$\int\limits_{D_t} \Big(u_{tt}^N \omega_k + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha \omega_k + \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{x_i}^N|^{p-2} u_{x_i}^N \omega_{kx_i} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} u_{x_j t}^N \omega_{kx_i} \Big) dx = \int\limits_{D_t} f\, \omega_k\, dx, \tag{6}$$

$$C_k^N(t_0) = u_{0k}^N, \; C_{kt}^N(t_0) = u_{1k}^N, \quad k = 1, ..., N. \tag{7}$$

Домножимо кожну рівність системи (6) відповідно на функцію $C_{kt}^N(t)$, підсумуємо за k від 1 до N і зінтегруємо по проміжку $[t_0; \tau]$, де $\tau \leqslant T$. Після виконання цих операцій одержимо рівність:

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big(u_{tt}^N u_t^N + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha u_t^N + \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{x_i t}^N|^{p-2} u_{x_i}^N u_{x_i t}^N +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} u_{x_j t}^N u_{x_i t}^N \Big) dx\, dt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f\, u_t^N dx\, dt. \tag{8}$$

Враховуючи умови теореми та інтегруючи частинами, перетворимо кожний доданок у (8):

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} u_{tt}^N u_t^N dx\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{D_\tau} (u_t^N)^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (u_1^N)^2 dx;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha u_t^N dx\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha u^N dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{D_0} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u_0^N D^\alpha u_0^N dx - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t} D^\beta u^N D^\alpha u^N dx\, dt;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{x_i t}^N|^{p-2} u_{x_i}^N u_{x_i t}^N dx\, dt = \frac{1}{p} \int\limits_{D_\tau} \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{x_i}^N|^p dx -$$

$$- \frac{1}{p} \int\limits_{D_{t_0}} \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{0x_i}^N|^p dx - \frac{1}{p} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} b_{it} |u_{x_i}^N|^p dx\, dt;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f u_t^N dx\, dt \leqslant \frac{\delta_0}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (u_t^N)^2 dx\, dt + \frac{1}{2\delta_0} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f^2 dx\, dt;$$

Отже, з рівності (8) матимемо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau}\Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha u^N + \frac{2}{p}\sum_{i=1}^n b_i |u_{x_i}^N|^p\Big) dx + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} u_{x_jt}^N u_{x_it}^N dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega}\Big((u_1^N)^2 + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u_0^N D^\alpha u_0^N + \frac{2}{p}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n b_i |u_{0x_i}^N|^p\Big) dx + \frac{1}{\delta_0}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f^2 dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big(\delta_0 (u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t} D^\beta u^N D^\alpha u^N + \frac{2}{p}\sum_{i=1}^n b_{it} |u_{x_i}^N|^p\Big) dx\, dt.$$

Враховуючи умови теореми, одержимо

$$A_0 \int\limits_{D_\tau}\Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big(D^\alpha u^N\big)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^p\Big) dx + 2c_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n \big(u_{x_it}^N\big)^2 dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_0 + \frac{F_0}{\delta_0} + A_1 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big(D^\alpha u^N\big) + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^p\Big) dx\, dt; \tag{9}$$

тут $A_0 = \min\{1;\ a_0;\ b_0/p\}$, $A_1 = \max\{\delta_0;\ a_3;\ 2b_3/p\}$, $F_0 = \int\limits_{Q_{t_0,T}} f^2 dx\, dt$,

$$\Phi_0 = \int\limits_{\Omega}\Big((u_1^N)^2 + a_1 \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} D^\beta u_0^N D^\alpha u_0^N + \frac{2b_1}{p}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^N|^p\Big) dx,$$

де a_3 і b_3 – сталі з таких нерівностей:

$$a_2 \int\limits_{D_t} \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha v)^2\, dx \leqslant \int\limits_{D_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t}(x,t) D^\beta v D^\alpha v\, dx \leqslant a_3 \int\limits_{D_t} \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha v)^2\, dx,$$

$$t \in [t_0; T]; \quad b_2 \leqslant b_{it}(x,t) \leqslant b_3,\ i = 1, \ldots, n.$$

Застосовуючи лему Гронуолла - Белмана [12, с. 108] до нерівності (9), матимемо

$$\int\limits_{D_\tau}\Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big(D^\alpha u^N\big)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^p\Big) dx \leqslant \frac{\Phi_0 + \frac{F_0}{\delta_0}}{A_0} \exp\Big(\frac{A_1}{A_0}(T - t_0)\Big).$$

Тоді

$$\frac{A_1}{A_0} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big(D^\alpha u^N\big)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^p\Big) dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_1}{A_0^2}\Big(\Phi_0 + \frac{F_0}{\delta_0}\Big)(T - t_0) \exp\Big(\frac{A_1}{A_0}(T - t_0)\Big).$$

Враховуючи останню нерівність, з (9) випливає оцінка

$$\int\limits_{D_\tau}\left((u_t^N)^2+\sum_{|\alpha|=2}\left(D^\alpha u^N\right)^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^p\right)dx+\frac{2c_0}{A_0}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n\left(u_{x_it}^N\right)^2dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\Phi_0}{A_0}+\frac{F_0}{A_0\delta_0}+\frac{A_1}{A_0^2}\left(\Phi_0+\frac{F_0}{\delta_0}\right)(T-t_0)\,e^{\frac{A_1}{A_0}(T-t_0)}=A_2. \tag{10}$$

Продиференціюємо систему (6) за t:

$$\int\limits_{D_t}\left(u_{ttt}^N\omega_k+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^N D^\alpha\omega_k+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta t}D^\beta u^N D^\alpha\omega_k+\right.$$
$$+\sum_{i=1}^n b_{it}|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_i}^N\omega_{kx_i}+(p-1)\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_it}^N\omega_{kx_i}+ \tag{11}$$
$$\left.+\sum_{i,j=1}^n c_{ijt}u_{x_jt}^N\omega_{kx_i}+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}u_{x_jtt}^N\omega_{kx_i}\right)dx=\int\limits_{D_t}f_t\omega_k\,dx,\quad k=1,\dots,N.$$

Домножимо кожну рівність системи (11) відповідно на функцію $C_{ktt}^N\,e^{-\mu(t-t_0)}$, підсумуємо за k від 1 до N і зінтегруємо по проміжку $[t_0;\tau]$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left(u_{ttt}^N u_{tt}^N+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^N D^\alpha u_{tt}^N+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta t}D^\beta u^N D^\alpha u_{tt}^N+\right.$$
$$+\sum_{i=1}^n b_{it}|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_i}^N u_{x_itt}^N+(p-1)\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_it}^N|^{p-2}u_{x_it}^N u_{x_itt}^N+ \tag{12}$$
$$\left.+\sum_{i,j=1}^n c_{ijt}u_{x_jt}^N u_{x_itt}^N+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}u_{x_jtt}^N u_{x_itt}^N\right)e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}f_t u_{tt}^N\,e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt.$$

Використовуючи інтегрування частинами, перетворимо деякі доданки в рівності (12):

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}u_{ttt}^N u_{tt}^N e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\left(u_{tt}^N\right)^2e^{-\mu(\tau-t_0)}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{D_{t_0}}\left(u_{tt}^N\right)^2dx+$$
$$+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left(u_{tt}^N\right)^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt;\quad\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^N D^\alpha u_{tt}^N e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{D_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^N D^\alpha u_t^N e^{-\mu(t-t_0)}dx-\frac{1}{2}\int\limits_{D_{t_0}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^N D^\alpha u_t^N dx+$$
$$+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^N D^\alpha u_t^N e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t}D^{\beta}u_t^N D^{\alpha}u_t^N e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt;$$

$$(p-1)\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n} b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_it}^N u_{x_itt}^N e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt =$$

$$=\frac{p-1}{2}\int\limits_{D_\tau}\sum_{i=1}^{n} b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}\big(u_{x_it}^N\big)^2 e^{-\mu(\tau-t_0)}dx - \frac{p-1}{2}\int\limits_{D_{t_0}}\sum_{i=1}^{n} b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}\big(u_{x_it}^N\big)^2 dx+$$

$$+\frac{\mu(p-1)}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n} b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}\big(u_{x_it}^N\big)^2 e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt-$$

$$-\frac{(p-1)(p-2)}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n} b_i|u_{x_i}^N|^{p-3}\big(u_{x_it}^N\big)^3 \operatorname{sign}\big(u_{x_i}^N\big)e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt-$$

$$-\frac{p-1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n} b_{it}|u_{x_i}^N|^{p-2}\big(u_{x_it}^N\big)^2 e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt.$$

Використовуючи нерівність Коші [12, с. 24] і теорему вкладення [11, с. 44], зробимо оцінку

$$\int\limits_{D_t}\sum_{i=1}^{n} b_i|u_{x_i}^N|^{p-3}\big(u_{x_it}^N\big)^3 \operatorname{sign}\big(u_{x_i}^N\big)dx \leqslant$$

$$\leqslant b_1\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{D_t}|u_{x_i}^N|^{(p-3)p_1}dx\right)^{\frac{1}{p_1(p-3)}(p-3)}\left(\int\limits_{D_t}|u_{x_it}^N|^{3p_2}dx\right)^{\frac{1}{3p_2}3}\leqslant$$

$$\leqslant b_1 w_3\left(\int\limits_{D_t}\sum_{i,j=1}^{n}(u_{x_ix_j}^N)^2dx\right)^{(p-3)/2}\left(\int\limits_{D_t}\sum_{i,j=1}^{n}(u_{x_ix_jt}^N)^2dx\right)^{3/2}.$$

Тут $1/p_1+1/p_2=1$, причому $p_1(p-3)\leqslant\dfrac{2n}{n-2}$, $3p_2\leqslant\dfrac{2n}{n-2}$. Тоді згідно з теоремою вкладення, маємо

$$\left(\int\limits_{D_t}|u_{x_i}^N|^{(p-3)p_1}dx\right)^{1/(p_1(p-3))}\leqslant w_1\left(\int\limits_{D_t}\sum_{j=1}^{n}(u_{x_ix_j}^N)^2dx\right)^{1/2},$$

$$\left(\int\limits_{D_t}|u_{x_it}^N|^{3p_2}dx\right)^{1/(3p_2)}\leqslant w_2\left(\int\limits_{D_t}\sum_{j=1}^{n}(u_{x_ix_jt}^N)^2dx\right)^{1/2},$$

де $w_3=w_1^{p-3}w_2^3\,n$, $p_2=\dfrac{2n}{3(n-2)}$, $p_1=\dfrac{2n}{6-n}$. Також згідно з умовами теореми одержимо

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}u_{x_itt}^N u_{x_jtt}^N\geqslant c_0\sum_{i=1}^{n}(u_{x_itt}^N)^2;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f_t u_{tt}^N e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt \leqslant \frac{\delta_1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (u_{tt}^N)^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt + \frac{1}{2\delta_1} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f_t^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt.$$

Отже, з рівності (12) отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D_\tau}\Bigg(\left(u_{tt}^N\right)^2 + a_2 \sum_{|\alpha|=2} \left(D^\alpha u_t^N\right)^2 + (p-1)\sum_{i=1}^n b_i |u_{x_i}^N|^{p-2} (u_{x_i t}^N)^2\Bigg) e^{-\mu(\tau-t_0)} dx + \\
&+ 2c_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i tt}^N)^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{D_{t_0}}\Bigg(\left(u_{tt}^N\right)^2 + a_1 \sum_{|\alpha|=2} \left(D^\alpha u_t^N\right)^2 + (p-1)\sum_{i=1}^n b_i |u_{x_i}^N|^{p-2} (u_{x_i t}^N)^2\Bigg) dx + \\
&+ \frac{1}{\delta_1} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f_t^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Bigg((a_3 - \mu a_0) \sum_{|\alpha|=2} \left(D^\alpha u_t^N\right)^2 + \\
&+ (b_3 - \mu b_0)(p-1) \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^{p-2} (u_{x_i t}^N)^2\Bigg) e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt + \\
&+ b_1 w_3 (p-1)(p-2) \int_{t_0}^{\tau} e^{-\mu(t-t_0)} \left(\int\limits_{D_t} \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i x_j}^N)^2 dx\right)^{(p-3)/2} \times \\
&\times \left(\int\limits_{D_t} \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i x_j t}^N)^2 dx\right)^{3/2} dt - \\
&- 2 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t} D^\beta u^N D^\alpha u_{tt}^N + \sum_{i=1}^n b_{it} |u_{x_i}^N|^{p-2} u_{x_i}^N u_{x_i tt}^N + \\
&+ \sum_{i,j=1}^n c_{ijt} u_{x_j t}^N u_{x_i tt}^N\Bigg) e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt.
\end{aligned} \tag{13}$$

З рівняння (1) легко одержати

$$\begin{aligned}
\int\limits_{D_{t_0}} (u_{tt}^N)^2 dx \leqslant 4 \int\limits_{D_{t_0}} \Bigg(f^2 + \Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u_0^N)\Bigg)^2 + \\
+ \left(\sum_{i=1}^n \left(b_i \left|u_{0x_i}^N\right|^{p-2} u_{0x_i}^N\right)_{x_i}\right)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^n \left(c_{ij} u_{1x_j}^N\right)_{x_i}\right)^2\Bigg) dx.
\end{aligned} \tag{14}$$

Використовуючи теорему вкладення, матимемо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D_{t_0}} \left(\left(\sum_{i=1}^n \left(b_i \left|u_{0x_i}^N\right|^{p-2} u_{0x_i}^N\right)_{x_i}\right)^2 dx \leqslant \\
&\leqslant 2n^2 b_1^2 \left((p-1)^2 w_4^{2(p-2)} w_5^2 \|u_0^N\|_{H^3(\Omega)}^{2(p-1)} + w_6^{2(p-1)} \|u_0^N\|_{H^4(\Omega)}^{2(p-1)}\right),
\end{aligned}$$

тому що

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left|u^N_{0x_i}\right|^{2(p-2)n} dx\right)^{1/(2(p-2)n)} \leqslant w_4 \|u^N_0\|_{H^3(\Omega)},$$

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left|u^N_{0x_ix_j}\right|^{2n?(n-2)} dx\right)^{n-2/(2n)} \leqslant w_5 \|u^N_0\|_{H^3(\Omega)},$$

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left|u^N_{0x_i}\right|^{2(p-1)} dx\right)^{1/(2(p-1))} \leqslant w_6 \|u^N_0\|_{H^4(\Omega)}.$$

Аналогічно оцінимо решту доданків правої частини нерівності (14):

$$\int\limits_{D_{t_0}} \Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u^N_0)\Big)^2 dx \leqslant 4na_4 \|u^N_0\|^2_{H^1(\Omega)} + 12n^2 a_4 \|u^N_0\|^2_{H^2(\Omega)} +$$
$$+ 32n^3 a_4 \|u^N_0\|^2_{H^3(\Omega)} + 8n^4 a_4 \|u^N_0\|^2_{H^4(\Omega)};$$
$$\int\limits_{D_{t_0}} \Big(\sum_{i,j=1}^n \Big(c_{ij} u^N_{1x_j}\Big)_{x_i}\Big)^2 dx \leqslant 2n^2 c_1 \big(\|u^N_1\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u^N_1\|^2_{H^2(\Omega)}\big);$$

тут c_1, a_4 - такі додатні сталі, що

$$\Big(\sum_{i,j=1}^n a_{\alpha\beta x_i x_j}\Big)^2 \leqslant a_4,\ \Big(\sum_{i=1}^n a_{\alpha\beta x_i}\Big)^2 \leqslant a_4,\ |\alpha| = |\beta| \leqslant 2,$$
$$\sum_{i,j=1}^n c^2_{ij} \leqslant c_1,\ \sum_{i,j=1}^n c^2_{ijx_i} \leqslant c_1.$$

Отже, з нерівності (14) випливає оцінка

$$\int\limits_{D_{t_0}} (u^N_{tt})^2 dx \leqslant A_3, \tag{15}$$

де A_3 - додатна стала, яка залежить від норм початкових функцій та правої частини рівняння (1).

Використовуючи теорему вкладення, одержимо

$$(p-1) \int\limits_{D_{t_0}} \sum_{i=1}^n b_i \left|u^N_{0x_i}\right|^{p-2} \left(u^N_{1x_i}\right)^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant (p-1) b_1 \sum_{i=1}^n \Big(\int\limits_{\Omega} \left|u^N_{0x_i}\right|^{(p-2)n/2} dx\Big)^{2/n} \Big(\int\limits_{\Omega} \left|u^N_{1x_i}\right|^{2n/(n-2)} dx\Big)^{(n-2)/n} \leqslant$$
$$\leqslant (p-1) b_1 n \big(w_7^{p-2} \|u^N_0\|^{p-2}_{H^2(\Omega)} w_8^2 \|u^N_1\|^2_{H^2(\Omega)}\big),$$
$$a_1 \int\limits_{D_{t_0}} \sum_{|\alpha|=2} \left(D^\alpha u^N_t\right)^2 dx = a_1 \|u^N_1\|^2_{H^2(\Omega)},$$

де сталі w_7, w_8 – взяті з нерівностей

$$\left(\int_\Omega \left|u^N_{0x_i}\right|^{(p-2)n/2} dx\right)^{n/(2(p-2))} \leqslant w_7 \|u^N_0\|_{H^2(\Omega)},$$

$$\left(\int_\Omega \left|u^N_{1x_i}\right|^{2n/(n-2)} dx\right)^{(n-2)/(2n)} \leqslant w_8 \|u^N_1\|_{H^2(\Omega)}.$$

Отже, одержимо оцінку

$$\int_{D_{t_0}} \left(\left(u^N_{tt}\right)^2 + a_1 \sum_{|\alpha|=2} \left(D^\alpha u^N_1\right)^2 + (p-1)\sum_{i=1}^n b_i |u^N_{0x_i}|^{p-2}(u^N_{1x_i})^2\right) dx \leqslant A_4,$$

де A_4 - додатна стала, яка залежить від норм початкових функцій та правої частини рівняння (1).

Отже, нерівність (13) матиме вигляд

$$\int_{D_\tau} \left(\left(u^N_{tt}\right)^2 + a_2 \sum_{|\alpha|=2} \left(D^\alpha u^N_t\right)^2 + (p-1)\sum_{i=1}^n b_i |u^N_{x_i}|^{p-2}(u^N_{x_i t})^2\right) e^{-\mu(\tau-t_0)} dx +$$
$$+ 2c_0 \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n (u^N_{x_i tt})^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt \leqslant A_4 + \frac{1}{\delta_1} \int_{Q_{t_0,\tau}} f_t^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt +$$
$$+ 2 \int_{D_{t_0}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t} D^\beta u^N_0 D^\alpha u^N_1 dx + \int_{Q_{t_0,\tau}} \left((a_3 - \mu a_0) \sum_{|\alpha|=2} \left(D^\alpha u^N_t\right)^2 +\right.$$
$$\left. + (b_3 - \mu b_0)(p-1) \sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^{p-2} (u^N_{x_i t})^2\right) e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt +$$
$$+ b_1 w_3 (p-1)(p-2) A_2^{(p-3)/2} \int_{t_0}^\tau e^{-\mu(t-t_0)} \left(\int_{D_t} \sum_{i,j=1}^n (u^N_{x_i x_j t})^2 dx\right)^{3/2} dt +$$
$$+ 2 \int_{Q_{t_0,\tau}} \left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} \left(a_{\alpha\beta tt} - \mu a_{\alpha\beta t}\right) D^\beta u^N D^\alpha u^N_t + \right. \tag{16}$$
$$\left. + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\delta_3} b_{it}^2 |u^N_{x_i}|^{2(p-1)} + \frac{nc_2}{\delta_2}(u^N_{x_i t})^2\right)\right) e^{-\mu(\tau-t_0)} dx\, dt -$$
$$- 2 \int_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t} D^\beta u^N D^\alpha u^N_t e^{-\mu(\tau-t_0)} dx + (\delta_2 + \delta_3) \int_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n \left(u^N_{x_i tt}\right)^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt.$$

Позначимо

$$A_5(\mu) = A_4 + \frac{1}{\delta_1} \int_{Q_{t_0,T}} f_t^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt + a_3 n^2 (\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|u_1\|^2_{H^2(\Omega)}) +$$
$$+ \frac{a_3 n^2 A_2}{\delta_4} + \frac{b_4 n A_2^{p-1}}{\mu\delta_3} + \frac{nc_2 A_0 A_2}{2\delta_2 c_0} + \frac{n^2(a_5 + \mu a_2) A_2}{\mu \delta_5},$$
$$A_6 = \min\{1;\ a_2 - a_3 n^2 \delta_4;\ (p-1)b_0;\ 2c_0 - \delta_2 - \delta_3\},\ A_6 > 0,$$

$$A_7 = b_1 w_3 (p-1)(p-2) A_2^{(p-3)/2},$$

де δ_2, δ_3, δ_4, a_5, b_4 - такі сталі, що $2c_0 - \delta_2 - \delta_3 > 0$, $a_2 - a_3 n^2 \delta_4 > 0$, $|a_{\alpha\beta tt}| \leqslant a_5$, $b_{it}^2 \leqslant b_4$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$, $i = 1, ..., n$, $(x,t) \in Q_{t_0,T}$.

З нерівності (16) одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau}\Big(\big(u_{tt}^N\big)^2 + \sum_{|\alpha|=2}\big(D^\alpha u_t^N\big)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^{p-2}(u_{x_i t}^N)^2\Big) e^{-\mu(\tau - t_0)} dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i tt}^N)^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt \leqslant \tag{17}$$

$$\leqslant \frac{A_5(\mu)}{A_6} + \frac{A_7}{A_6}\int_{t_0}^\tau e^{-\mu(t-t_0)} \Bigg(\int\limits_{D_t}\sum_{|\alpha|=2}\big(D^\alpha u_t^N\big)^2 dx\Bigg)^{3/2} dt.$$

Зауважимо, що сталі μ, δ_5 підбираються так, щоб

$$\frac{b_3}{b_0} \leqslant \mu, \quad \frac{3a_3 + n^2 a_5 \delta_5 + \mu n^2 a_2 \delta_5}{a_0} \leqslant \mu. \tag{18}$$

Позначимо

$$z(\tau) = e^{-\mu(\tau - t_0)} \int\limits_{D_\tau}\sum_{|\alpha|=2}\big(D^\alpha u_t^N\big)^2 dx,$$

тоді згідно з нерівністю (17) одержимо

$$z(\tau) \leqslant \frac{A_5(\mu)}{A_6} + \frac{A_7}{A_6}\int_{t_0}^\tau e^{\mu(t-t_0)/2} z(t)^{3/2} dt.$$

Якщо виконується умова

$$e^{\mu(T-t_0)/2} < 1 + \frac{\mu A_6^{1/2}}{A_5^{1/2}(\mu)}, \tag{19}$$

тоді на підставі леми Біхарі [12, с. 110], одержимо

$$z(\tau) \leqslant \frac{A_5(\mu)}{A_6\Big[1 - \frac{1}{2}\big(\frac{A_5(\mu)}{A_6}\big)^{1/2}\int_{t_0}^\tau e^{\mu(t-t_0)/2} dt\Big]^2} = A_8. \tag{20}$$

Отже, якщо існують додатні сталі μ, T, які задовольняють умову (19), то

$$\int\limits_{D_\tau}\Big(\big(u_{tt}^N\big)^2 + \sum_{|\alpha|=2}\big(D^\alpha u_t^N\big)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^{p-2}(u_{x_i t}^N)^2\Big) e^{-\mu(\tau - t_0)} dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_i tt}^N)^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt \leqslant \frac{A_5(\mu)}{A_6} + \frac{A_7}{A_6}\int_{t_0}^T e^{\mu(t-t_0)/2}\big(A_8\big)^{3/2} dt = A_9.$$

Звідси одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau}\Big(\big(u_{tt}^N\big)^2 + \sum_{|\alpha|=2}\big(D^\alpha u_t^N\big)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^{p-2}(u_{x_i t}^N)^2\Big) dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_i tt})^2dx\,dt \leqslant A_{10}, \quad t_0\leqslant\tau\leqslant T. \tag{21}$$

Врахувавши оцінки (10) і (21), матимемо

$$\int\limits_{D_\tau}\left(\left(u_t^N\right)^2+\left(u_{tt}^N\right)^2+\sum_{|\alpha|=2}\left(D^\alpha u^N\right)^2+\sum_{|\alpha|=2}\left(D^\alpha u_t^N\right)^2+\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^p\right)dx\leqslant A_{11},$$

$t_0\leqslant\tau\leqslant T$.

Отже, існує послідовність $\{u^j(x,t)\}$ така, що:

$$\begin{aligned} &u^j \to u \quad *-\text{слабко в } L^\infty((t_0;T);H_0^2(\Omega));\\ &u^j_t \to u_t \quad *-\text{слабко в } L^\infty((t_0;T);H_0^2(\Omega));\\ &u^j_{tt} \to u_{tt} \quad *-\text{слабко в } L^\infty((t_0;T);L^2(\Omega));\\ &|u^j_{x_i}|^{p-2}u^j_{x_i} \to |u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} \quad \text{слабко в } L^q(Q_{t_0,T}). \end{aligned}$$

Звідси, врахувавши систему рівнянь (6), для $j\geqslant j_0$ матимемо

$$\int\limits_{D_t}\left(u^j_{tt}v^{j_0}+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u^j D^\alpha v^{j_0}+\sum_{i=1}^{n}b_i|u^j_{x_i}|^{p-2}u^j_{x_i}v^{j_0}_{x_i}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}u^j_{x_j t}v^{j_0}_{x_i}\right)dx=\int\limits_{D_t}f\,v^{j_0}dx, \tag{22}$$

де $v^{j_0}(x)=\sum_{k=1}^{j_0}v_k\omega_k(x)$. Сукупність функцій v^{j_0} всюди щільна в V_0. Зробивши граничний перехід в (22) при $j\to\infty$, одержимо рівність (1), яка розуміється в сенсі простору розподілів $D'((t_0;T);V_0^*)$. Оскільки, $u_t\in L^\infty((t_0;T);H_0^2(\Omega))$, $u_{tt}\in L^\infty((t_0;T);L^2(\Omega))$, то маємо, що функція u задовольняє початкові умови (3), (4). Отже, u є узагальненим розв'язком мішаної задачі (1) - (4).

Зауважимо, що значення сталої T береться як розв'язок нерівності (19).

Теорему доведено.

---

1. *Tsutsumi Masayoshi, Iino Riichi.* On the global solution of a certain nonlinear partial differential equations // Proc. Japan. Acad.– 1969.– Vol.45. –, N6.– P. 466-469.
2. *Хлуднев А.М.* О разрешимости начально-краевых задач для одной слабо нелинейной системы // Дифференциальные уравнения.– 1978.– Т.14. – N11.– С. 2026-2037.
3. *Medeiros Luiz Adauto.* On a new class of nonlinear wave equations // J. Math. Anal. and Appl.– 1979.– Vol.69. – N1.– P. 252-262.
4. *Menzala Gustavo Perla.* On global classial solutions of a nonlinear wave equation // Appl. Anal.– 1980.– Vol.10. – N3.– P. 179-195.
5. *Ramos Oswaldo Ch.* Reqularity property for the nonlinear beam opertor // Ann. Acad. bras. cicna.– 1989.– Vol.61. – N1.– P. 15-25.
6. *Narazaki Takashi.* Global classical solutons of semilinear evolution equation // Saitama Math. J.– 1986.– Vol.4. – P. 11-34.

7. *Похожаев С.И.* Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений //Мат. сб.– 1975.–Т.96. – N1.– С. 152-166.
8. *Маскудов Ф.Г., Алиев Ф.А.* Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении// Докл. АН СССР.– 1988.– Т.300. – N6.– С.1312-1315.
9. *Лавренюк С.П.* Про одну змішану задачу для рівняння типу коливання пластинки // Доп. АН УРСР. Сер.А.– 1991.– N7.– С. 23-25.
10. *Лавренюк С.П., Онишкевич Г.М.* Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку одного нелінійного параболічного рівняння // Доп. НАН України.– 1996.– N6.– С. 5-16.
11. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
12. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1967.

Barabash G.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SOME NONLINEAR PARABOLIC EQUATION

In paper the initial boundary value problem for nonlinear parabolic equation with second derivative in time is considered. Sufficient conditions of existence of generalized solution of this problem are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.99