ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С.27–37*
VISNYK LVIV UNIV. *Ser.Mech-Math. 1999. Vol. 54. P.27–37*

УДК 517.95

Ірина Березницька, Андрій Дребот, Юрій Макар

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Ми розглянули обернені задачі знаходження залежного від часу коефіцієнта температуропровідності у випадку, коли крайові умови та умови перевизначення є лінійними комбінаціями зі змінними коефіцієнтами значень невідомої функції та її перших похідних на кінцях проміжка й інтеграла по всьому проміжку від невідомої функції. Випадки задання звичайних крайових умов та умови перевизначення, що складається з лінійної комбінації крайової та інтегральної умови, розглянуто в праці [1]. Випадки задання нелокальних крайових умов та умов перевизначення описані в праці [2].

В області $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо задачу знаходження функцій $(a,u) \in C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}), a(t) > 0, t \in [0,T]$, які задовольняють рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t),\ (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,h], \tag{2}$$

крайові умови та умови перевизначення вигляду

$$\sum_{j=1}^{5} K_{ij}u_j(t) = g_i(t),\ i = 1,2,3,\ t \in [0,T],$$

де через $u_j(t)$ позначено

$$u_1(t) = u(0,t),\ u_2(t) = u(h,t),\ u_3(t) = u_x(0,t),$$
$$u_4(t) = u_x(h,t),\ u_5(t) = \int_0^h u(x,t)dx.$$

Припустимо, що ранг матриці, складеної з коефіцієнтів $K_{ij}(t)$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,5}$, дорівнює 3. Залежно від розташування відмінного від нуля мінора третього порядку дані умови приводять до шести випадків. Розглянемо один з них:

$$u_x(0,t) = \nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_1(t),\ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(h,t) = \nu_3(t)u(0,t) + \nu_4(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_2(t),\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$u_x(h,t) = \nu_5(t)u(0,t) + \nu_6(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Припустимо, що виконуються такі умови:
(A):

$$\varphi(x) \in C^2[0,h],\ f(x,t) \in C^{2,0}(\overline{\Omega}),\ \mu_i(t) \in C^1[0,T],\ i=1,2,3;$$
$$\nu_j(t) \in C^1[0,T],\ j=\overline{1,6};$$

(B):

$$\varphi'(0) = \nu_1(0)\varphi(0) + \nu_2(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_1(0),$$

$$\varphi(h) = \nu_3(0)\varphi(0) + \nu_4(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_2(0),$$

$$\varphi'(h) = \nu_5(0)\varphi(0) + \nu_6(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_3(0).$$

Задачу (1)–(5) зведемо до системи рівнянь. Для цього припустимо, що відомі значення

$$u(0,t) = p(t),\ t \in [0,T], \tag{6}$$

$$\int_0^h u(x,t)dx = q(t),\ t \in [0,T]. \tag{7}$$

Розв'язок u задачі (1)–(3), (5), як відомо [2], за допомогою функції Гріна $G(x,t,\xi,\tau)$ можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \int_0^h \varphi(\xi)G(x,t,\xi,0)d\xi - \int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau) + \nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))G(x,t,0,\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^t a(\tau)(\mu_3(\tau) + \nu_5(\tau)p(\tau) + \nu_6(\tau)q(\tau))G(x,t,h,\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^h f(\xi,\tau)G(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned} G(x,t,\xi,\tau) =& \frac{1}{2\sqrt{\pi(r(t)-r(\tau))}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(r(t)-r(\tau))} \right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(r(t)-r(\tau))} \right) \right); \quad r(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Підставивши цей розв'язок в умови (6), (7), одержимо рівняння стосовно функцій $p(t)$ і $q(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) =& \int_0^h G(0,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau) + \nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))G(0,t,0,\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^t a(\tau)(\mu_3(\tau) + \nu_5(\tau)p(\tau) + \\ &+ \nu_6(\tau)q(\tau))G(0,t,h,\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^h f(\xi,\tau)G(0,t,\xi,\tau)d\xi d\tau,\ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{9}$$

$$q(t) = \int_0^h dx \int_0^h G(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^h dx \int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau) + \nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))\times$$
$$\times G(x,t,0,\tau)d\tau + \int_0^h dx \int_0^t a(\tau)(\mu_3(\tau) + \nu_5(\tau)p(\tau) + \nu_6(\tau)q(\tau))G(x,t,h,\tau)d\tau +$$
$$+ \int_0^h dx \int_0^t \int_0^h f(\xi,\tau)G(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau, \ t \in [0,T].$$

Змінюючи порядок диференціювання і враховуючи, що $\int_0^h G(x,t,\xi,\tau)dx = 1$, маємо:

$$q(t) = \int_0^h \varphi(\xi)d\xi - \int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau) - \mu_3(\tau) + (\nu_1(\tau) - \nu_5(\tau))p(\tau) +$$
$$+(\nu_2(\tau) - \nu_6(\tau))q(\tau))d\tau + \int_0^t \int_0^h f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \ t \in [0,T]. \tag{10}$$

Знайдемо похідну $p'(t)$, використовуючи співвідношення

$$G_t(x,t,\xi,\tau)a(\tau) = -a(t)G_\tau(x,t,\xi,\tau), \ G_t(x,t,\xi,\tau) = a(t)G_{xx}(x,t,\xi.\tau).$$

Інтегруючи двічі частинами, і скориставшись рівностями

$$G_\xi(0,t,0,0) = 0, \ G_\xi(0,t,h,0) = 0,$$

одержимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^h \varphi(\xi)G(0,t,\xi,0)d\xi\right) = a(t)\int_0^h \varphi(\xi)G_{\xi\xi}(0,t,\xi,0)d\xi =$$
$$= a(t)\left[G(0,t,0,0)\varphi(0) - G(0,t,h,0)\varphi(h) + \int_0^h G(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi\right].$$

Обчислимо похідну наступного доданка формули (9), враховуючи, що $G(x,t,\xi,t) = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau) + \nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))G(0,t,0,\tau)d\tau\right) =$$
$$= a(t)\Big[G(0,t,0,0)(\mu_1(0) + \nu_1(0)p(0) + \nu_2(0)q(0)) +$$
$$+ \int_0^t (\mu_1(\tau) + \nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))' G(0,t,0,\tau)d\tau\Big].$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t a(\tau)(\mu_3(\tau) + \nu_5(\tau)p(\tau) + \nu_6(\tau)q(\tau))G(0,t,h,\tau)d\tau\right) =$$
$$= a(t)\Big[G(0,t,h,0)(\mu_3(0) + \nu_5(0)p(0) + \nu_6(0)q(0)) +$$
$$+ \int_0^t (\mu_3(\tau) + \nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))' G(0,t,h,\tau)d\tau\Big],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t\int_0^h f(\xi,\tau)G(0,t,\xi,\tau)d\tau\right)=f(0,t)+a(t)\left[\int_0^t f_\xi(0,\tau)G(0,t,0,\tau)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^t f_\xi(h,\tau)G(0,t,h,\tau)d\tau+\int_0^t d\tau\int_0^h f_{\xi\xi}(\xi,\tau)G(0,t,\xi,\tau)d\xi\right].$$

Звідси, використовуючи умову узгодженості (B), одержуємо

$$p'(t)=f(0,t)+a(t)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi r(t)}}\int_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4r(t)}\right)d\xi-\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))'+\mu_1'(\tau)-f_x(0,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{r(t)-r(\tau)}\right)d\tau$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_5(\tau)p(\tau)+\nu_6(\tau)q(\tau))'+\mu_3'(\tau)-f_x(h,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2h^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\tau$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^h\int_0^t\frac{f_{\xi\xi}(\xi,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\xi d\tau\right],\ t\in[0,T]. \tag{11}$$

Диференціюючи рівняння (10) за t, знайдемо похідну $q'(t)$:

$$q'(t)=a(t)((\nu_5(t)-\nu_1(t))p(t)+(\nu_6(t)-\nu_2(t))q(t)+\mu_3(t)-\mu_1(t))+$$

$$+\int_0^h f(x,t)dx,\quad t\in[0,T]. \tag{12}$$

Підставимо (8) в умову (4), врахувавши (6) і (7). Одержане рівняння диференціюємо за t. Врахувавши значення $p'(t)$, $q'(t)$, що визначені відповідно рівняннями (11), (12), зведемо його до рівняння, розв'язаного щодо $a(t)$:

$$a(t)=[\mu_2'(t)+\nu_3'(t)p(t)+\nu_4'(t)q(t)+\nu_4(t)\int_0^h f(x,t)dx+\nu_3(t)f(0,t)-f(h,t)]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{\pi r(t)}}\int_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+(2n-1)h)^2}{4r(t)}\right)d\xi-\right.$$

$$-\frac{\nu_3(t)}{\sqrt{\pi r(t)}}\int_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4r(t)}\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))'+\mu_1'(\tau)-f_x(0,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2h^2}{4(r(t)-r(\tau)}\right)d\tau$$

$$+\frac{\nu_3(t)}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))'+\mu_1'(\tau)-f_x(0,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{r(t)-r(\tau)}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_5(\tau)p(\tau)+\nu_6(\tau)q(\tau))'+\mu_3'(\tau)-f_x(h,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{r(t)-r(\tau)}\right)d\tau-$$

$$-\frac{\nu_3(t)}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_5(\tau)p(\tau)+\nu_6(\tau)q(\tau))'+\mu_3'(\tau)-f_x(h,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2h^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\tau$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^h \frac{f_{\xi\xi}(\xi,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+(2n-1)h)^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{\nu_3(t)}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^h \frac{f_{\xi\xi}(\xi,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\xi d\tau+$$

$$+\nu_4(t)((\nu_1(t)-\nu_5(t))p(t)+(\nu_2(t)-\nu_6(t))q(t)+\mu_1(t)-\mu_3(t))\Big]^{-1},\ t\in[0,T]. \quad (13)$$

Отже, задача (1)-(5) звелась до системи рівнянь (9)-(13) стосовно $a(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $p'(t)$, $q'(t)$. Нехай виконуються умови

$$\begin{gathered}(C):\quad \nu_i(t)\leqslant 0,\ i=1,2,3,\ \nu_4(t)<0,\ \nu_i(t)\geqslant 0, i=5,6;\\ \nu_i'(t)\leqslant 0,\ i=1,2,\ \nu_i'(t)\geqslant 0,\ i=\overline{3,6};\ \mu_1(t)\leqslant 0,\ \mu_3(t)\geqslant 0,\\ \mu_3(t)-\mu_1(t)>0,\ \mu_1'(t)-f_x(0,t)\leqslant 0,\ \mu_3'(t)-f_x(h,t)\geqslant 0,\\ \mu_2'(t)+\nu_4(t)\int_0^h f(x,t)dx+\nu_3(t)f(0,t)-f(h,t)>0,\ t\in[0,T];\\ \varphi(x)\geqslant 0,\ \varphi''(x)\geqslant 0,\ x\in[0,h];\ f(x,t)\geqslant 0,\ f_{xx}(x,t)\geqslant 0,\ (x,t)\in\overline{\Omega}.\end{gathered}$$

Розглядаючи систему рівнянь (9)-(13) як операторне рівняння

$$\alpha(t)=P\alpha(t),\ t\in[0,T], \quad (14)$$

де $\alpha(t)=(a(t),p(t),q(t),p'(t),q'(t))$, застосуємо для його дослідження теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [3]. Спочатку визначимо оцінки розв'язків цього рівняння. Умова (С) дає

$$p(t)\geqslant 0,\ q(t)\geqslant 0,\ p'(t)\geqslant 0,\ q'(t)\geqslant 0,\ a(t)>0,\ t\in[0,T].$$

З рівняння (13) одержуємо

$$\begin{aligned}a(t)\leqslant (\max_{[0,T]}(\mu_2'(t)+\nu_4(t)\int_0^h f(x,t)dx-f(h,t)+\nu_3(t)f(0,t)+\\ +p(t)\max_{[0,T]}\nu_3'(t)+q(t)\max_{[0,T]}\nu_4'(t))(\min_{[0,T]}(\nu_4(t)(\mu_1(t)-\mu_3(t)))^{-1}\leqslant\\ \leqslant C_1+C_2(p(t)+q(t)),\end{aligned} \quad (15)$$

де константи C_1, C_2 залежать від максимумів модулів функцій $\nu_3(t)$, $\nu_4(t)$, $\nu_3'(t)$, $\nu_4'(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_3(t)$, $\mu_2'(t)$, $f(x,t)$. З рівнянь (9), (10) одержуємо оцінки

$$p(t)\leqslant C_3+C_4\int_0^t a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))d\tau+C_5\int_0^t\frac{a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}d\tau+$$
$$+C_6r(t)+C_7\sqrt{r(t)}, \quad (16)$$

$$q(t)\leqslant C_8+C_9\int_0^t a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))d\tau+C_{10}r(t), \quad (17)$$

врахувавши, що для $z\geqslant 0$

$$\frac{2z}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n^2z^2)\leqslant 1,\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-(2n-1)^2z^2)\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n^2z^2).$$

Додавши (16) і (17), одержуємо

$$p(t)+q(t)\leqslant C_{11}+C_{12}\int_0^t a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))d\tau+$$

$$+C_5\int_0^t \frac{a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}d\tau+C_7\sqrt{r(t)}+C_{13}r(t). \tag{18}$$

До цієї нерівності застосуємо таку лему.

Лема. *Для довільних функцій $a(t),v(t)\in C[0,T], a(t)>0$ з нерівності*

$$v(t)\leqslant B_1+B_2\sqrt{r(t)}+B_3r(t)+B_4\int_0^t a(\tau)v(\tau)d\tau+B_5\int_0^t\frac{a(\tau)v(\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}d\tau,\ t\in[0,T],$$

де $B_i(i=\overline{1,5})-$ додатні константи, випливає оцінка

$$v(t)\leqslant(B_6+B_7\sqrt{r(t)}+B_8r(t)+B_9r(t)\sqrt{r(t)})\exp\left((B_4+\pi B_5^2)r(t)+\frac{4}{3}B_4B_5r^{3/2}(t)\right),$$

константи B_6,B_7,B_8,B_9 залежать від $B_i, i=\overline{1,5}$.

Доведення леми виконуємо аналогічно до леми 2.6 у [2].

Використовуючи лему та оцінку (18), з нерівності (15) одержуємо

$$a(t)\leqslant C_1+K(r(t)), \tag{19}$$

де

$$K(r(t))=C_2(C_{14}+C_{15}\sqrt{r(t)}+C_{16}r(t)+C_{17}r(t)\sqrt{r(t)})\exp\Bigg((C_{12}+\pi C_5^2)r(t)+$$

$$+\frac{4}{3}C_5C_{12}r(t)^{3/2}\Bigg), \tag{20}$$

Перепишемо (19) у вигляді

$$\frac{a(t)}{C_1+K(r(t))}\leqslant 1. \tag{21}$$

Замінивши в нерівності (21) змінну t на τ, проінтегрувавши за τ в межах від 0 до t, зробивши під знаком інтеграла заміну $\sigma=r(\tau)$, одержимо нерівність

$$\int_0^{r(t)}\frac{d\sigma}{C_1+K(\sigma)}\leqslant t. \tag{22}$$

Функція $\beta(s)=\displaystyle\int_0^s\frac{d\sigma}{C_1+K(\sigma)}$ є неперервною монотонно зростаючою, тому існує обернена до неї неперервна монотонно зростаюча функція $\beta^{-1}(s)$, визначена на деякому відрізку $[0,b]$. Оцінимо число b. Використовуючи (20), отримуємо

$$\beta(s)\leqslant\frac{1}{C_2}\int_0^s\frac{d\sigma}{C_{15}\sqrt{\sigma}+C_{17}\sigma\sqrt{\sigma}}=\frac{2}{C_2\sqrt{C_{15}C_{17}}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{C_{17}s}{C_{15}}}\right).$$

Оскільки $C_2>0, C_{15}>0, C_{17}>0$, то

$$b=\lim_{s\to\infty}\beta(s)\leqslant\frac{\sqrt{\pi}}{C_{18}}.$$

Отже, з нерівності (22) маємо оцінку для $r(t)$:

$$r(t) \leqslant \beta^{-1}(t),\ t \in [0, t_0],$$

де $t_0 = \min(T, b)$, що разом з (19) дає

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty,\ t \in [0, t_0], \tag{23}$$

число A_1 залежить тільки від вихідних даних задачі. За наявності оцінки (23) з (12) і (18), після застосування леми, одержуємо оцінки

$$0 \leqslant p(t) \leqslant p_0 < \infty,\ t \in [0, t_0], \tag{24}$$

$$0 \leqslant q(t) \leqslant q_0 < \infty,\ t \in [0, t_0], \tag{25}$$

$$0 \leqslant q'(t) \leqslant q_1 < \infty,\ t \in [0, t_0], \tag{26}$$

де числа p_0, q_0, q_1 залежать від A_1 і вихідних даних задачі. З рівняння (11) отримуємо

$$p'(t) \leqslant C_{15} + a(t)\left(C_{16}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}} + C_{17}\int_0^t \frac{p'(\tau)}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}}d\tau\right). \tag{27}$$

Приймемо в (27) $t = \sigma$, домножимо на $\dfrac{1}{\sqrt{r(t) - r(\sigma)}}$ і проінтегруємо за σ від 0 до t. Використовуючи формулу

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{r(t) - r(\sigma)}}\int_0^\sigma \frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{r(\sigma) - r(\tau)}} = \pi\int_0^t \mu(\tau)d\tau,$$

з (27) маємо

$$\int_0^t \frac{p'(\tau)d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}} \leqslant C_{15}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}} + C_{16}\pi T + C_{17}\pi\int_0^t p'(\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{r(t) - r(\tau)}} + \pi(C_{16}T + C_{17}p_0).$$

Оцінимо (13) знизу, використовуючи останню нерівність і оцінки (24)-(26). Звідси маємо нерівність

$$\min_{[0,t_0]} a(t) \geqslant \frac{C_{20}}{C_{21} + C_{22}/\sqrt{\min_{[0,t_0]} a(t)}},$$

C_{20}, C_{21}, C_{22} – додатні сталі, яка дає оцінку для $a(t)$ знизу:

$$0 < A_0 \leqslant a(t),\ t \in [0, t_0], \tag{28}$$

де

$$A_0 = \frac{1}{4C_{21}^2}\left(\sqrt{C_{22}^2 + 4C_{20}C_{21}} - C_{22}\right)^2.$$

Враховуючи це, з (27) одержимо

$$0 \leqslant p'(t) \leqslant p_1 < \infty, t \in [0, t_0]. \tag{29}$$

Як у праці [2], наявність оцінок (23)-(26), (28)-(30) та умов (B), (C) дає змогу застосувати до операторного рівняння (14) теорему Шаудера і довести існування розв'язку $(a(t), p(t), q(t), p'(t), q'(t))$ системи (9)- (13). Розв'язуючи при знайдених $a(t), p(t), q(t)$ задачу (1)-(5), знаходимо $u(x,t)$.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)-(4). Припустимо, що $(a_i(t), u_i(x,t)), i = 1, 2$ – два її розв'язки, для їхньої різниці $b(t) = a_1(t) - a_2(t), v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ одержимо

$$v_t = a_1(t)v_{xx} + b(t)u_{2xx}, \ (x,t) \in \Omega, \tag{30}$$

$$v(x,0) = 0, \ x \in [0,h] \tag{31}$$

$$v_x(0,t) = \nu_1(t)v(0,t) + \nu_2(t)\int_0^h v(x,t)dx, \tag{32}$$

$$v(h,t) = \nu_3(t)v(0,t) + \nu_4(t)\int_0^h v(x,t)dx, \tag{33}$$

$$v_x(h,t) = \nu_5(t)v(0,t) + \nu_6(t)\int_0^h v(x,t)dx. \tag{34}$$

Припустивши, що відомі значення

$$v(0,t) = p(t), \ t \in [0,T], \tag{35}$$

$$\int_0^h v(x,t)dx = q(t), \ t \in [0,T] \tag{36}$$

за допомогою функції Гріна знаходимо розв'язок задачі (30)-(32), (34):

$$v(x,t) = -\int_0^t G_1(x,t,0,\tau)a_1(\tau)(\nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))d\tau +$$
$$+\int_0^t G_1(x,t,h,\tau)a_1(t)(\nu_5(\tau)p(\tau) + \nu_6(\tau)q(\tau))d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^h b(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi\, d\tau, \tag{37}$$

де

$$G_i(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(r_i(t) - r_i(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(r_i(t)-r_i(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(r_i(t)-r_i(\tau))}\right)\right); \ \ r_i(t) = \int_0^t a_i(\tau)d\tau, \ i = 1, 2.$$

Підставивши (37) у (33), (35), (36), продиференціюємо одержані рівності за t і одержимо систему рівнянь стосовно $b(t), p(t), q(t), p'(t), q'(t)$ вигляду

$$A(t)b(t) = \int_0^t K_1(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_2(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_3(t,\tau)q(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t K_4(t,\tau)p'(\tau)d\tau + \int_0^t K_5(t,\tau)q'(\tau)d\tau,$$

$$p(t) = \int_0^t K_6(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_7(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_8(t,\tau)q(\tau)d\tau,$$

$$q(t) = \int_0^t K_9(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_{10}(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_{11}(t,\tau)q(\tau)d\tau,$$

$$p'(t) = \int_0^t K_{12}(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_{13}(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_{14}(t,\tau)q(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t K_{15}(t,\tau)p'(\tau)d\tau + \int_0^t K_{16}(t,\tau)q'(\tau)d\tau$$

$$q'(t) = \int_0^t K_{17}(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_{18}(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_{19}(t,\tau)q(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t K_{20}(t,\tau)p'(\tau)d\tau + \int_0^t K_{21}(t,\tau)q'(\tau)d\tau$$

з інтегровними ядрами $K_i(t,\tau)$, $i = \overline{1,21}$, у якій

$$A(t) = \int_0^h \varphi''(\xi)G_2(h,t,\xi,0)d\xi -$$

$$- \int_0^t ((\nu_1(\tau)p_2(\tau) + \nu_2(\tau)q_2(\tau))' + \mu_1'(\tau) - f_x(0,\tau))G_2(h,t,h,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t ((\nu_5(\tau)p_2(\tau) + \nu_6(\tau)q_2(\tau))' + \mu_3'(\tau) - f_x(h,\tau))G_2(h,t,0,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h f_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_2(h,t,\xi,\tau)d\xi d\tau - \nu_3(t)(\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(0,t,\xi,0)d\xi -$$

$$- \int_0^t ((\nu_1(\tau)p_2(\tau) + \nu_2(\tau)q_2(\tau))' + \mu_1'(\tau) - f_x(0,\tau))G_2(0,t,0,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t ((\nu_5(\tau)p_2(\tau) + \nu_6(\tau)q_2(\tau))' + \mu_3(\tau) - f_x(h,\tau))G_2(0,t,h,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h f_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_2(0,t,\xi,\tau)d\xi d\tau) -$$

$$-\nu_4(t)((\nu_5(t) - \nu_1(t))p_2(t) + (\nu_6(t) - \nu_2(t))q_2(t) + \mu_3(t) - \mu_1(t)) > 0, \ t \in [0,t_0],$$

де

$$p_2(t) = u_2(0,t), \ q_2(t) = \int_0^h u_2(x,t)dx.$$

Застосування властивостей системи інтегральних рівнянь Вольтера другого роду дає, що $b(t) = p(t) = q(t) = p'(t) = q'(t) = 0$, $t \in [0,T]$, і тоді $v(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \Omega$ як розв'язок однорідної задачі, яка відповідає (30)–(34). Отже, доведено таке твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (A), (B), (C), то розв'язок задачі (1)-(5) існує при $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$, де число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$ визначене вихідними даними задачі, і він єдиний в області існування.*

За подібною схемою досліджують інші випадки. Розглянемо обернену задачу у випадку крайових умов та умов перевизначення вигляду

$$u(0,t) = \nu_1(t)u_x(0,t) + \nu_2(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_1(t),\ t \in [0,T], \tag{38}$$

$$u(h,t) = \nu_3(t)u_x(0,t) + \nu_4(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_2(t),\ t \in [0,T], \tag{39}$$

$$u_x(h,t) = \nu_5(t)u_x(h,t) + \nu_6(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{40}$$

Теорема 2. *Нехай, крім умови (A) теореми 1, виконуються такі умови:*

$$\varphi(0) = \nu_1(0)\varphi'(0) + \nu_2(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_1(0),$$

$$\varphi(h) = \nu_3(0)\varphi'(0) + \nu_4(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_2(0),$$

$$\varphi'(h) = \nu_5(0)\varphi'(0) + \nu_6(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_3(0),$$

$$\Delta(t) \equiv 0\nu_1(t)\nu_4(t) - \nu_2(t)\nu_3(t) \neq 0,\ \frac{\nu_1(t)}{\Delta(t)} < 0,\ \frac{\nu_2(t)}{\Delta(t)} \geqslant 0,$$

$$\frac{\nu_3(t)}{\Delta(t)} > 0,\ \frac{\nu_4(t)}{\Delta(t)} \leqslant 0,\ \nu_5(t) \leqslant 0,\ \nu_6(t) \geqslant 0,\ \left(\frac{\nu_i(t)}{\Delta(t)}\right)' \geqslant 0,\ i = 1,2$$

$$\left(\frac{\nu_i(t)}{\Delta(t)}\right)' \leqslant 0,\ i = 3,4,\ \nu_5'(t) \leqslant 0,\ \nu_6(t) \geqslant 0,\ \mu_3'(t) > 0,\ \mu_4(t) \leqslant 0,$$

$$\mu_3'(t) - f_x(h,t) \geqslant 0, \mu_4'(t) - f_x(0,t) \leqslant 0$$

$$\left(\frac{\nu_3(t)\mu_1(t) - \nu_1(t)\mu_2(t)}{\Delta(t)}\right)' + \frac{\nu_1(t)f(h,t) - \nu_3(t)f(0,t)}{\Delta(t)} - \int_0^h f(x,t)dx > 0,\ t \in [0,T];$$

$$\varphi(x) \geqslant 0, \varphi(x)''(x) \geqslant 0, x \in [0,h];\ f(x,t) \geqslant 0, f_{xx}(x,t) \in \overline{\Omega};$$

$$\frac{-\nu_3(0)\varphi(0) + \nu_1(0)\varphi(h)}{\Delta(0)} > 0, \frac{-\nu_3(0)\varphi''(0) + \nu_1(0)\varphi''(h)}{\Delta(0)} > 0.$$

Тоді розв' язок задачі (1), (2), (38)-(40) існує при $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$, де число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$, визначене вихідними даними задачі, і він єдиний в області існування.

Нехай задані крайові умови та умови перевизначення вигляду

$$u(h,t) = \nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)u_x(0,t) + \mu_1(t),\ t \in [0,T], \tag{41}$$

$$u_x(h,t) = \nu_3(t)u(0,t) + \nu_4(t)u_x(0,t) + \mu_2(t),\ t \in [0,T], \tag{42}$$

$$\int_0^h u(x,t)dx = \nu_5(t)u(0,t) + \nu_6(t)u_x(0,t) + \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{43}$$

Умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі (1),(2),(41)-(43) визначають такою теоремою.

Теорема 3. *Нехай, крім умов (A) теореми 1, виконуються умови*

$$\varphi(h) = \nu_1(0)\varphi(0) + \nu_2(0)\varphi'(0) + \mu_1(0),$$
$$\varphi'(h) = \nu_3(0)\varphi(0) + \nu_4(0)\varphi'(0) + \mu_2(0),$$
$$\int_0^h \varphi(x)dx = \nu_5(0)\varphi(0) + \nu_6(0)\varphi'(0) + \mu_3(0);$$
$$\nu_i(t) \leqslant 0,\ i = 1,4,6,\ \nu_i(t) \geqslant 0,\ i = 3,5,\ \nu_2(t) < 0,$$
$$\nu_i'(t) \leqslant 0,\ i = 1,2,4,6,\ \nu_i(t) \geqslant 0,\ i = 3,5,\ \mu_1(t) \geqslant 0,\ \mu_2(t) > 0,$$
$$\mu_1'(t) \leqslant 0,\ \mu_2'(t) - f_x(h,t) \geqslant 0,\ \mu_3'(t) - \int_0^h f(x,t)dx > 0,\ t \in [0,T];$$
$$\varphi(x) \geqslant 0,\ \varphi''(x) \geqslant 0,\ x \in [o,h];\ f(x,t) \geqslant 0,\ f_x(0,t) \geqslant 0,\ f_{xx}(x,t) \geqslant 0,$$
$$\frac{\nu_5(t)}{\mu_2(t)}\varphi''(x) + \frac{\nu_6(t)}{\mu_2(t)\mu_3(t)}(\varphi''(h-x) - \nu_1(t)\varphi''(x)) < 1,\ (x,t) \in \overline{\Omega}$$

Тоді існує розв'язок задачі для $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$, *де число* $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$ *визначене вихідними даними задачі, і він єдиний в області існування.*

---

1. *Березницька І.Б., Дребот А.Й., Іванчов М.І., Макар Ю.П.* Обернена задача з інтегральним перевизначенням// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип.48. – С.71-79.
2. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами.- Препринт. – К., 1995.
3. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М., 1969.

Bereznitska I., Drebot A., Makar Yu.

INVERSE PROBLEMS FOR THE HEAT EQUATION WITH NONLOCAL AND INTEGRAL CONDITIONS

In the paper inverse problems for finding an unknown time-dependent major coefficient in the heat equation are considered. Overdetermination and boundary conditions are given as linear combinations of boundary values and integral of the solution.

Стаття надійшла до редколегії 26.03.99