ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 48–50

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 48–50

УДК 517.98

Юрій Джала

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО УНІТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай $\mathbb{S}^{n-1}$ – одинична сфера в $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}, n > 2)$, μ – міра Лебега на $\mathbb{S}^{n-1}$ і $G \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{S}^{n-1}, \mu)$. Позначимо через U оператор, який діє з простору $H \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{R}^n)$ в простір $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{R}_+, G)$ $\quad (\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} (0, \infty))$ згідно з формулою

$$(Uf(t)) \stackrel{\text{def}}{=} t^{(n-1)/2} f(t\omega), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{1}$$

Оскільки $dx = t^{n-1} dt d\omega$, де $dx, d\omega, dt$ – відповідні елементи об'єму, то

$$||Uf||^2_{\mathcal{H}} = \int\limits_{\mathbb{R}_+} ||Uf(t)||^2_G dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} t^{n-1} |f(t\omega)|^2 d\mu dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = ||f||^2_H.$$

Очевидно також, що $\operatorname{Im} U = \mathcal{H}$. Отже, U – унітарний. Оператор U виникає під час вивчення спектральних властивостей диференціальних операторів, які є збуреннями самоспряженого оператора Лапласа в просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$. Зокрема, важливо знати як оператор U діє на гладкі функції. В праці [1] була доведена така теорема.

Теорема 1. *Нехай $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$, $s > 0$. Тоді оператор U неперервно відображає простір Соболєва $H^s(\mathbb{R}^n)$ в простір Соболєва $H^s(\mathbb{R}_+, G)$.*

Ми доводимо, що справджується теорема 2.

Теорема 2. *Нехай $n = 2m > 2, m \in \mathbb{N}, 0 < r < s \leqslant 1$. Тоді оператор U неперервно відображає $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^r(\mathbb{R}_+, G)$.*

Для доведення теореми 2 нам треба такий результат, який є частковим випадком теореми вкладення для просторів Соболєва [2, с.188].

Теорема S. *Нехай $n \geqslant 3$, $1 < s < n/2$ і $q = 2n/(n - 2s)$. Тоді простір $H^s(\mathbb{R}^n)$ неперервно вкладений у простір $L_q(\mathbb{R}^n)$, тобто існує стала A_s така, що для всіх $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$*

$$||f||_{L_q} \leqslant A_s ||f||_{H^s}. \tag{2}$$

Використовуючи теорему S, доведемо, що правильна лема 1.

Лема 1. *Нехай $n \geqslant 3$ і $s > 1$. Тоді існує стала C_s така, що для всіх $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2} |f(x)|^2 dx \ \leqslant C_s^2 ||f||^2_{H^s} , \tag{3}$$

© Джала Юрій , 1999

де $|\cdot|$ *– евклідова норма в* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Очевидно, що лему досить довести для $s \in (1, n/2)$. Приймемо $q = 2n/(n-2s), p = q/2$ і $p' = n/2s$. Нехай $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2}|f(x)|^2 dx \leqslant ||f||_H^2 + \int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-2}|f(x)|^2 dx. \tag{4}$$

Оцінимо інтеграл у лівій частині (3) за допомогою нерівності Юнга, враховуючи, що $1/p + 1/p' = 1$. Маємо

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-2}|f(x)|^2 dx \leqslant \left(\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-2p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2p} dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-n/s} dx\right)^{1/p'} ||f||_{L_q}^2. \tag{5}$$

Звідси, беручи до уваги (2) і те, що

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-n/s} dx = \mu(\mathbb{S}^{n-1}) \int\limits_0^1 t^{(n-1-n/s)} dt = \mu(\mathbb{S}^{n-1}) s/n(s-1),$$

одержуємо нерівність

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-2}|f(x)|^2 dx \leqslant A_s^2 \left(\frac{s}{n(s-1)}\right)^{1/p'} ||f||_{H^s}^2,$$

з якої, враховуючи (4), одержуємо правильність твердження леми. Лему доведено.

Доведення теореми 2. Нехай $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, що $Uf \in C^\infty(\mathbb{R}_+, G)$. За допомогою безпосередніх обчислень визначаємо, що правильна рівність

$$(Uf)' = U\varphi + U\psi, \tag{6}$$

де $\varphi, \psi \in H$ і

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \frac{n-1}{2}\frac{f(x)}{|x|}, \qquad \psi(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \left(\nabla f(x) \Big| \frac{x}{|x|}\right)_{\mathbb{R}^n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Тут ∇f – градієнт функції f, $(\cdot\,|\,\cdot)$ – скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$. З леми 1 випливає, що

$$||\varphi||_H \leqslant \frac{n-1}{2} C_l ||f||_{H^l}, \qquad l > 1. \tag{7}$$

Крім того,

$$||\psi||_H \leqslant ||\nabla f||_{L_2} \leqslant ||f||_{H^1} \leqslant ||f||_{H^l}, \qquad l > 1. \tag{8}$$

Зі співвідношень (6)–(8), враховуючи унітарність оператора U, маємо, що для довільних $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ і $l > 1$

$$||(Uf)'|| \leqslant \left(1 + \frac{n-1}{2} C_l\right) ||f||_{H^l}. \tag{9}$$

Оскільки множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ є всюди щільна в $H^s(\mathbb{R}^n)$, то з (9) випливає, що оператор U неперервно відображає $H^1(\mathbb{R}^n)$ в $H^l(\mathbb{R}_+, G)$. Тоді згідно з інтерполяційною теоремою [3,с.41] оператор U неперервно відображає інтерполяційний простір $(H^l(\mathbb{R}^n), H)_\theta$ в інтерполяційний простір $(H^1(\mathbb{R}_+, G), \mathcal{H})_\theta$. Приймаючи $\theta = r, l = s/r$, де $0 < r < s \leqslant 1$, одержуємо твердження теореми.

---

1. *Микитюк Я.В.* Про властивості одного унітарного оператора// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1986. – Вип. 25. – С.41-42.
2. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М., 1986.
3 *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М., 1971.

Djala Yu.

ON PROPERTIES OF SOME UNITARY OPERATOR

Let $\mathbb{S}^{n-1}$ be the unit sphere in $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}, n > 2)$, μ the Lebesque measure on $\mathbb{S}^{n-1}$ and $G \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{S}^{n-1}, \mu)$. Properties of the operator U acting from the space $H \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{R}^n)$ into the space $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{R}_+, G)$ $(\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} (0, \infty))$ by the formula

$$(Uf(t)) \stackrel{\text{def}}{=} t^{(n-1)/2} f(t\omega), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \mathbb{S}^{n-1},$$

are investigated. It is shown that the operator U continuously maps the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ into $H^r(\mathbb{R}_+, G)$, $0 < r < s \leqslant 1$.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.99