ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 51–63

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 51–63

УДК 539.3

Петро Доманський

РІВНЯННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ІЗ МАТЕРІАЛУ МУРНАГАНА

1. Вихідні співвідношення. Розглянемо ізотропне пружне тіло K. Розрізняємо три конфігурації цього тіла: γ_0, γ_τ і γ_τ^*. Першу з них називаємо відліковою, а дві інші – актуальними. Відлікову γ_0-конфігурацію вважають природною (недеформованою), коли в тілі нема напружень та деформацій. Актуальну γ_τ-конфігурацію назвемо базовою (незбуреною). Вона виникла внаслідок дії на тіло K з моменту часу $\tau = \tau_0$ масових і поверхневих сил. Другу актуальну γ_τ^*-конфігурацію, яка відповідає збуренню початкових умов у γ_τ-конфігурації, будемо називати збуреною. Місце точки $k \in K$ в γ_0, γ_τ, γ_τ^*-конфігураціях визначаємо радіус-векторами $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\vec{r} = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0$, $\vec{r}_* = \vec{r}_*(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}_*$ відповідно, де $\vec{u}_0$, $\vec{u}_*$ – вектори переміщень із γ_0 в γ_τ і γ_τ^*-конфігурації; $\{\xi^i\}$ – лагранжеві координати, за які приймаємо координати місця точки $k \in K$ у відліковій конфігурації в єдиній для всіх конфігурацій нерухомій у просторі прямокутній декартовій системі координат, $\vec{r}_0 = \xi^1 \vec{\ni}_1^{\,0} + \xi^2 \vec{\ni}_2^{\,0} + \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0} \equiv \xi^k \vec{\ni}_k^{\,0}$. Напружений стан γ_τ і γ_τ^*-конфігурацій визначаємо тензорами напружень Піоли-Кірхгофа $\hat{P}_0 = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r})$ і $\hat{P}_* = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*)$, де $\hat{P}_0$ – тензорна функція, яка характеризує зв'язок між тензором напружень і градієнтом місця; $\vec{\nabla}_0 = \vec{\ni}_0^{\,i} \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ – набла-оператор Гамільтона в γ_0-конфігурації; $\{\vec{\ni}_0^{\,i}\}$ – база, біортогональна до бази $\{\vec{\ni}_i^{\,0}\}$; "$\otimes$" – операція тензорного (зовнішнього) добутку. Приймаємо, що $\vec{u}_* = \vec{u}_0 + \vec{u}$, $\hat{P}_* = \hat{P}_0 + \hat{P}$. Величини $\hat{P}$ і $\vec{u}$ назвемо збуренням (варіацією) тензора напружень Піоли-Кірхгофа і вектора переміщення в γ_τ-конфігурації відповідно.

Надалі приймемо, що у формулах, де відбувається підсумовування за індексами, які повторюються зверху і знизу, індекси α, β, γ змінюються від 1 до 2, а всі інші – від 1 до 3.

Нехай у γ_0 - конфігурації тіло K є циліндричним сталого поперечного перерізу D, два характерні розміри якого є значно менші від висоти. Положення точок осі тіла будемо характеризувати радіусом-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0}$, де ξ^3 - осьова координата $(0 \leqslant \xi^3 \leqslant b)$, $\vec{\ni}_3^{\,0}$ - базисний орт у напрямі цієї осі. Положення довільної точки визначаємо радіусом-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \qquad \vec{R}_0 = \vec{R}_0(\xi^1, \xi^2) = \xi^\alpha \vec{\ni}_\alpha^{\,0}, \qquad (\xi^1, \xi^2) \in D.$$

Збурення вектора переміщення $\vec{u} = \vec{u}(\vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \tau)$ подамо у вигляді розвинення за заданою базою тензорних функцій $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{30}; \tau). \tag{1}$$

Тут індекси "$(i-1)$" та "(i) свідчать про ранг тензорних функцій, "$\overset{i}{\cdot}$" означає i-кратний внутрішній добуток тензорів. Як випливає з формули Тейлора для відображення одного нормованого простору в інший, за базу можна вибрати, зокрема, систему тензорних функцій $\{\vec{R}_0^n\}$, де $\vec{R}_0^n$ – n-кратний зовнішній добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе.

У праці [1] показано, що за наближеного одновимірного формулювання задачі рівняння стійкості руху циліндричного тіла можна записати у вигляді

$$\int\limits_D \left(\vec{\ni}_3^0 \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} - \delta^{\alpha\beta} \vec{\ni}_\beta^0 \cdot \hat{P} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} - \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \right) d\Sigma_0 + \hat{F}^{(i)} = 0, \tag{2}$$

де

$$\hat{F}^{(i)} = \int\limits_D \rho_0 \left(\vec{f}_* - \vec{f} \right) \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\Sigma_0 + \int\limits_{\Gamma_0} \vec{n}_{12} \cdot \hat{P} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} dl_0;$$

$\vec{f}$ – вектор масових сил; $\vec{f}_*$ – його значення в γ_τ^*-конфігурації; Γ_0 – межа області D; $\vec{n}_{12}$ – вектор зовнішньої нормалі до бічної поверхні циліндричного тіла в γ_0-конфігурації; $\delta^{\alpha\beta}$ – символи Кронекера.

Мета запропонованої праці – побудувати в локальній формі і проаналізувати рівняння стійкості руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана.

2. Рівняння стійкості руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана. Густину потенціальної енергії деформації для матеріалу Мурнагана задає функція інваріантів міри деформації Коші-Гріна $\hat{G} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^T$ [2]:

$$U_0 = \frac{1}{4} \left[\left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2} l + \frac{n}{2} \right) I_1(\hat{G}) + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu - 3l - 2m) I_1^2(\hat{G}) + \right.$$
$$\left. + \left(-2\mu + 3m - \frac{n}{2} \right) I_2(\hat{G}) - m I_1(\hat{G}) I_2(\hat{G}) + \frac{1}{6}(l + 2m) I_1^3(\hat{G}) + \frac{n}{2} \left(I_3(\hat{G}) - 1 \right) \right].$$

Тут λ, μ - сталі Ляме; l, m, n - сталі Мурнагана; індексом "T" позначено операцію транспонування.

Якщо взяти похідну від функції U_0 за градієнтом місця $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$, то одержимо тензор напружень Піоли-Кірхгофа для матеріалу Мурнагана

$$\hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = \frac{1}{4} \left\{ \left[-n + 2(2\lambda - n) I_1(\hat{C}) - 8m I_2(\hat{C}) + 4l I_1^2(\hat{C}) \right] \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} + 2 \left[4\mu + \right. \right.$$
$$\left. \left. + n + 4m I_1(\hat{C}) \right] \hat{C} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} + n \left[1 + 2 I_1(\hat{C}) + 4 I_2(\hat{C}) + 8 I_3(\hat{C}) \right] \vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^T \right\}, \tag{3}$$

де $\hat{C} = \left(\hat{G} - \hat{I} \right)/2$ – тензор деформації Коші-Гріна; $\hat{I}$ – одиничний тензор; $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона в γ_τ-конфігурації.

Обмежимося випадком, коли у формулі (3) зберігаються члени до другого порядку включно стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$, тобто приймаємо, що

$$\hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = \left(\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \right) \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \frac{1}{2} \left[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T + \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+ (n-2m+2l)(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0)^2 + (2m-n)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot\, \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\Big]\, \hat{I} + \\
&+ (2m-n)\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) + n\varepsilon^2(\vec{u}_0) + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

де $\hat{T}(\vec{u}_0) = \lambda \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{I} + 2\mu \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)$, $\quad \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T)/2$ – тензор напружень Коші і тензор деформації лінійної теорії пружності.

Знайдемо збурення тензора напружень Піоли-Кірхгофа, яке визначається формулою (4):

$$
\begin{aligned}
&\hat{P}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*) - \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \\
&+ \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \Big[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot\, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + (n-2m)\left(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} - \right. \\
&\left. - \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot\, \hat{\varepsilon}(\vec{u})\right) + 2l \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\Big]\, \hat{I} + (2m-n)\left[\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\right] + \\
&+ \mu\left(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\right) + \\
&+ n\left(\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) \cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \hat{\varepsilon}(\vec{u}) \cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\right) + \left(\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\right) \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\Big[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot\, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + \\
&+ (n-2m+2l)(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u})^2 + (2m-n)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot\, \hat{\varepsilon}(\vec{u})\Big]\, \hat{I} + (2m-n)\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \\
&+ n\varepsilon^2(\vec{u}) + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Введемо позначення

$$
\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 = a^{ij} \vec{\exists}_i^0 \otimes \vec{\exists}_j^0,\ \hat{T}(\vec{u}_0) = \sigma^{ij} \vec{\exists}_i^0 \otimes \vec{\exists}_j^0,\ \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = \varepsilon^{ij} \vec{\exists}_i^0 \otimes \vec{\exists}_j^0,\ \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 = a. \tag{6}
$$

Якщо підставити (1), (6) у вираз (5) для збурення тензора напружень $\hat{P}$ і домножити одержаний результат зліва на вектор $\vec{\exists}_j^0$, то після перетворень одержимо вектори $\vec{P}_j = \vec{\exists}_j^0 \cdot \hat{P}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{P}_j = &\sum_{r=1}^{N}\left(\hat{A}_{j1}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot}\, \hat{u}^{(r)} + \hat{A}_{j2}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot}\, \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3}\right) + \sum_{r,k=1}^{N}\left(\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot}\, \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)} + \right. \\
&+ \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot}\, \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{B}_{j3}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot}\, \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} + \\
&\left. + \hat{B}_{j4}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot}\, \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3}\right).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Тут

$$
\begin{aligned}
&\hat{A}_{j1}^{(r+1)} = \hat{C}_j^\alpha \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha},\ \hat{A}_{j2}^{(r+1)} = \hat{C}_j^3 \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)};\ \hat{C}_j^i = (\lambda + a(n-2m+ \\
&+2l))\vec{\exists}_j^0 \otimes \vec{\exists}_0^i + \left(\delta_j^i\left(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\right) + \delta_{sj}\left(2\mu + \frac{n}{2}\right)\varepsilon^{si}\right)\hat{I} + \\
&+\left(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\right)\vec{\exists}_0^i \otimes \vec{\exists}_j^0 + \delta_{sj}(\lambda + 2m - n)a^{sk}\vec{\exists}_k^0 \otimes \vec{\exists}_0^i + \\
&+\delta_{sj}\left(\mu a^{sk} + \frac{n}{2}\varepsilon^{sk}\right)\vec{\exists}_0^i \otimes \vec{\exists}_k^0 + \delta_j^i\left(\sigma^{ks} + \frac{n}{2}\varepsilon^{ks}\right)\vec{\exists}_s^0 \otimes \vec{\exists}_k^0 + \\
&+\left(\lambda a^{is} + (2m-n)\varepsilon^{is}\right)\vec{\exists}_j^0 \otimes \vec{\exists}_s^0 + \left(\mu a^{is} + \frac{n}{2}\varepsilon^{is}\right)\vec{\exists}_s^0 \otimes \vec{\exists}_j^0,
\end{aligned}
$$

$$\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} = \left\{\left[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^{\alpha}\hat{I}+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^{\,0}\otimes\vec{\ni}_0^{\,\alpha}+\frac{n}{4}\vec{\ni}_0^{\,\alpha}\otimes\vec{\ni}_j^{\,0}\right]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\ni}_0^{\,\beta}+\right.$$
$$+\left[\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\vec{\ni}_j^{\,0}\otimes\vec{\ni}_0^{\,\beta}+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\delta_j^{\beta}\hat{I}+\left(m-\frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^{\,\beta}\otimes\vec{\ni}_j^{\,0}\right]\otimes$$
$$\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\ni}_0^{\,\alpha}+\left[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^{\alpha}\vec{\ni}_0^{\,\beta}+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\beta}\vec{\ni}_j^{\,0}\right]\otimes\vec{\ni}_0^{\,s}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes$$
$$\left.\otimes\vec{\ni}_s^{\,0}+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\beta}\hat{I}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\ni}_j^{\,0}\right\}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^{\alpha}},$$

$$\hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} = \left\{\left[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^{\alpha}\hat{I}+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^{\,0}\otimes\vec{\ni}_0^{\,\alpha}+\frac{n}{4}\vec{\ni}_0^{\,\alpha}\otimes\vec{\ni}_j^{\,0}\right]\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^{\,3}+\right.$$
$$+\left[\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\vec{\ni}_j^{\,0}\otimes\vec{\ni}_0^{\,3}+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\delta_j^{3}\hat{I}+\left(m-\frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^{\,3}\otimes\vec{\ni}_j^{\,0}\right]\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes$$
$$\left.\otimes\vec{\ni}_0^{\,\alpha}+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^{\alpha}\vec{\ni}_0^{\,3}\otimes\vec{\ni}_0^{\,s}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^{\,0}\right\}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^{\alpha}},$$

$$\hat{B}_{j3}^{(k+r+1)} = \left\{\left[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^{3}\hat{I}+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^{\,0}\otimes\vec{\ni}_0^{\,3}+\frac{n}{4}\vec{\ni}_0^{\,3}\otimes\vec{\ni}_j^{\,0}\right]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\ni}_0^{\,\beta}+\right.$$
$$+\left[\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\vec{\ni}_j^{\,0}\otimes\vec{\ni}_0^{\,\beta}+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\delta_j^{\beta}\hat{I}+\left(m-\frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^{\,\beta}\otimes\vec{\ni}_j^{\,0}\right]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes$$
$$\left.\otimes\vec{\ni}_0^{\,3}+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^{3}\vec{\ni}_0^{\,\beta}\otimes\vec{\ni}_0^{\,s}\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^{\beta}}\otimes\vec{\ni}_s^{\,0}\right\}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)},$$

$$\hat{B}_{j4}^{(k+r+1)}=\left\{\left[\left(\lambda+\mu+m-\frac{n}{4}\right)\delta_j^{3}\hat{I}+\left(l-\frac{m}{2}+\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^{\,0}\otimes\vec{\ni}_0^{\,3}+\left(m-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_0^{\,3}\otimes\vec{\ni}_j^{\,0}\right]\otimes\right.$$
$$\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^{\,3}+\left[\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_j^{3}\vec{\ni}_0^{\,3}+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^{\,0}\right]\otimes\vec{\ni}_0^{\,s}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^{\,0}+$$
$$\left.+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\hat{I}\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_j^{\,0}\right\}\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}.$$

Якщо внести вирази (7) для векторів $\vec{P}_j$ у систему рівнянь стійкості руху (2), згрупувати подібні члени та виконати інтегрування по області D, то одержимо систему диференціальних рівнянь стійкості руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана в локальній формі:

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{A}_1^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+\hat{A}_2^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\hat{A}_3^{(i+k)}\overset{k}{\cdot}\hat{u}^{(k)}\right)+\sum_{k,r=1}^{N}\left[\hat{B}_1^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{\partial^2\hat{u}^{(r)}}{(\partial\xi^3)^2}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}\right)+\hat{B}_2^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\frac{\partial^2\hat{u}^{(r)}}{(\partial\xi^3)^2}\otimes\hat{u}^{(k)}+$$
$$+\hat{B}_3^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial^2\hat{u}^{(k)}}{(\partial\xi^3)^2}+\hat{B}_4^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+$$
$$+\hat{B}_5^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\frac{\partial\hat{u}^{(r)}}{\partial\xi^3}\otimes\hat{u}^{(k)}+\hat{B}_6^{(i+k+r)}\overset{k+r}{\cdot}\hat{u}^{(r)}\otimes\frac{\partial\hat{u}^{(k)}}{\partial\xi^3}+ \qquad (8)$$

$$+\hat{B}_7^{(i+k+r)} \overset{k+r}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)}\Big] + \hat{F}^{(i)} = \rho_0 \sum_{k=1}^{N} \hat{M}^{(i+k)} \overset{k}{\cdot} \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial\tau)^2}, \quad (i = \overline{1,N}),$$

де

$$\hat{A}_1^{(i+k)} = \int\limits_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Bigg\{ \Bigg[\delta_t^3 \Big(\lambda + \mu + a\Big(\frac{n}{2} - m + 2l\Big)\Big) + \delta_{tj}\Big(\frac{n}{2}\varepsilon^{3j} + \Big(\lambda +$$

$$+\mu + 2m - n\Big)a^{3j}\Big)\Bigg]\vec{\ni}_3^0 + \Bigg[\delta_t^3\Big((\lambda+\mu)a^{3j} + \Big(2m - \frac{n}{2}\Big)\varepsilon^{3j}\Big) + \delta_{ts}\Big(\sigma^{js} + \frac{n}{2}\varepsilon^{js}\Big)\Bigg] \times$$

$$\times \vec{\ni}_j^0 + \Bigg[\mu + \frac{a(2m-n)}{2} + \Big(2\mu + \frac{n}{2}\Big)\varepsilon^{33}\Bigg]\vec{\ni}_t^0\Bigg\} \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{A}_2^{(i+k)} =$$

$$= \int\limits_D \vec{\ni}_0^t \otimes \Bigg\{ \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Bigg[\Bigg(\delta_t^3\Big(\frac{n}{2} - m + 2l\Big)\frac{\partial a}{\partial \xi^3} + \delta_{ts}\Big(\frac{n}{2}\frac{\partial \varepsilon^{3s}}{\partial \xi^3} + \Big(\lambda +$$

$$+\mu + 2m - n\Big)\frac{\partial a^{3s}}{\partial \xi^3}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_3^0 + \Bigg(\delta_t^3\Big((\lambda+\mu)\frac{\partial a^{3s}}{\partial \xi^3} + \Big(2m - \frac{n}{2}\Big)\frac{\partial \varepsilon^{3s}}{\partial \xi^3}\Big) + \delta_{tj}\Big(\frac{\partial \sigma^{sj}}{\partial \xi^3} +$$

$$+\frac{n}{2}\frac{\partial \varepsilon^{sj}}{\partial \xi^3}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_s^0 + \Bigg(\frac{2m-n}{2}\frac{\partial a}{\partial \xi^3} + \Big(2\mu + \frac{n}{2}\Big)\frac{\partial \varepsilon^{33}}{\partial \xi^3}\Bigg)\vec{\ni}_t^0\Bigg] \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} + \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes$$

$$\otimes \Bigg[\Bigg(\delta_t^3\Big(\lambda + a(n - 2m + 2l)\Big) + \delta_{ts}(\lambda + 2m - n)a^{3s}\Bigg)\vec{\ni}_0^\alpha + \Bigg(\delta_t^\alpha\Big(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\Big) +$$

$$+\delta_{ts}\Big(\mu a^{\alpha s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{\alpha s}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_3^0 + \Big(2\mu + \frac{n}{2}\Big)\varepsilon^{3\alpha}\vec{\ni}_t^0 + \Bigg(\delta_t^\alpha\Big(\mu a^{3s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{3s}\Big) + \delta_t^3\Big(\lambda a^{\alpha s} +$$

$$+(2m-n)\varepsilon^{\alpha s}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_s^0\Bigg] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \Bigg[\Bigg(\delta_t^\alpha(\lambda + a(n - 2m + 2l)) +$$

$$+\delta_{ts}\Big(\lambda + 2m - n\Big)a^{\alpha s}\Bigg)\vec{\ni}_3^0 + \Big(2\mu + \frac{n}{2}\Big)\varepsilon^{\alpha 3}\vec{\ni}_t^0 + \Bigg(\delta_t^3\Big(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\Big) +$$

$$+\delta_{ts}\Big(\mu a^{3s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{3s}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_0^\alpha + \Bigg(\delta_t^3\Big(\mu a^{\alpha s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{\alpha s}\Big) + \delta_t^\alpha\Big(\lambda a^{3s} + (2m-n)\varepsilon^{3s}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_s^0\Bigg] \otimes$$

$$\otimes \hat{\Phi}^{(k-1)}\Bigg\} d\Sigma_0, \tag{9}$$

$$\hat{A}_3^{(i+k)} = \int\limits_D \vec{\ni}_0^t \otimes \Bigg\{\hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Bigg[\Bigg(\delta_t^3(n - 2m + 2l)\frac{\partial a}{\partial \xi^3} + \delta_{ts}(\lambda + 2m - n)\frac{\partial a^{3s}}{\partial \xi^3}\Bigg)\vec{\ni}_0^\alpha +$$

$$+\Bigg(\delta_t^\alpha\frac{2m-n}{2}\frac{\partial a}{\partial \xi^3} + \delta_{ts}\Big(\mu\frac{\partial a^{\alpha s}}{\partial \xi^3} + \frac{n}{2}\frac{\partial \varepsilon^{\alpha s}}{\partial \xi^3}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_3^0 + \Big(2\mu + \frac{n}{2}\Big)\frac{\partial \varepsilon^{3\alpha}}{\partial \xi^3}\vec{\ni}_t^0 +$$

$$+\Bigg(\delta_t^\alpha\Big(\mu\frac{\partial a^{3s}}{\partial \xi^3} + \frac{n}{2}\frac{\partial \varepsilon^{3s}}{\partial \xi^3}\Big) + \delta_t^3\Big(\lambda\frac{\partial a^{\alpha s}}{\partial \xi^3} + (2m-n)\frac{\partial \varepsilon^{\alpha s}}{\partial \xi^3}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_s^0\Bigg] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} -$$

$$-\frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \Bigg[\Bigg(\delta_t^\alpha\Big(\lambda + a(n - 2m + 2l)\Big) + \delta_{st}(\lambda + 2m - n)a^{\alpha s}\Bigg)\vec{\ni}_0^\beta +$$

$$+\Bigg(\delta_t^\beta\Big(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\Big) + \delta_{st}\Big(\mu a^{\beta s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{\beta s}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_0^\alpha + \Bigg(\delta^{\alpha\beta}\Big(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\Big) +$$

$$+\Big(2\mu + \frac{n}{2}\Big)\varepsilon^{\alpha\beta}\Bigg)\vec{\ni}_t^0 + \Bigg(\delta_t^\beta\Big(\mu a^{\alpha s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{\alpha s}\Big) + \delta_t^\alpha\Big(\lambda a^{\beta s} + (2m-n)\varepsilon^{\beta s}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_s^0 +$$

$$+\delta^{\alpha\beta}\delta_{ts}\left(\sigma^{js}+\frac{n}{2}\varepsilon^{js}\right)\vec{\ni}_j^0\Bigg]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\Bigg\}d\Sigma_0;$$

$$\hat{B}_1^{(i+k+r)}=\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\Bigg[\left((\lambda+2\mu+m)\vec{\ni}_t^0+\left(l+\frac{m}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^3\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3+$$

$$+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{m}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0\Bigg]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_2^{(i+k+r)}=\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\Bigg[\left(\frac{m}{2}\delta_t^3\vec{\ni}_0^3+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_t^0\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\vec{\ni}_0^\alpha+$$

$$+\left(\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha+\left(m-\frac{n}{2}\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3\right)\otimes$$

$$\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\vec{\ni}_0^3+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^s\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\vec{\ni}_s^0\Bigg]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_3^{(i+k+r)}=\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\Bigg[\left(l\delta_t^3\vec{\ni}_0^3+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_t^0\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^\alpha+$$

$$+\left(\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha+\frac{n}{4}\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3\Bigg]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}d\Sigma_0,\quad \hat{B}_4^{(i+k+r)}=$$

$$=\hat{B}_2^{(i+k+r)}+\hat{B}_3^{(i+k+r)}-\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\Bigg[\left(\left(\left(\frac{n}{4}-\frac{m}{2}+l\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3+\right.\right.$$

$$\left.+\left(m-\frac{n}{4}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0+$$

$$+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_t^0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^\alpha\Bigg]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,\quad \hat{B}_5^{(i+k+r)}=\hat{B}_8^{(i+k+r)}-$$

$$-\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\Bigg[\left(\left(\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^\beta+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\delta^{\alpha\beta}\vec{\ni}_t^0+\right.\right.$$

$$\left.+\left(m-\frac{n}{2}\right)\delta_t^\beta\vec{\ni}_0^\alpha\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_0^3+\tag{10}$$

$$+\left(\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3+\frac{n}{4}\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_0^\beta\Bigg]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_6^{(i+k+r)}=\hat{B}_8^{(i+k+r)}-\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\gamma}\otimes\Bigg[\left(\left(\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\gamma}\vec{\ni}_t^0+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\delta_t^\gamma\vec{\ni}_0^\alpha+\frac{n}{4}\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^\gamma\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3+$$

$$+\left(\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\delta_t^\gamma\vec{\ni}_0^3+\left(m-\frac{n}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^\gamma\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^\alpha+$$

$$+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\gamma}\delta_t^3\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0\Bigg]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_7^{(i+k+r)} = -\int\limits_D \vec{\ni}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \Bigg[\vec{\ni}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \Bigg(\Bigg(\mu + \frac{n}{4}\Bigg) \times$$

$$\times \Bigg(\delta^{\alpha\gamma}\vec{\ni}_0^\beta + \delta^{\alpha\beta}\vec{\ni}_0^\gamma\Bigg) + \Bigg(\lambda + m - \frac{n}{2}\Bigg)\delta^{\beta\gamma}\vec{\ni}_0^\alpha\Bigg) + \Bigg(\Bigg(\frac{n}{2} - m + l\Bigg)\delta_t^\gamma \vec{\ni}_0^\beta +$$

$$+\Bigg(m - \frac{n}{2}\Bigg)\delta_t^\beta \vec{\ni}_0^\gamma\Bigg) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha + \Bigg(\Bigg(\frac{m}{2} - \frac{n}{4}\Bigg)\delta_t^\gamma \vec{\ni}_0^\alpha +$$

$$+\frac{n}{4}\delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^\gamma\Bigg) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \Bigg(\Bigg(\mu + \frac{n}{4}\Bigg)\delta^{\alpha\gamma}\delta_t^\beta +$$

$$+\Bigg(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4}\Bigg)\delta^{\alpha\beta}\delta_t^\gamma\Bigg)\vec{\ni}_0^s \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^0\Bigg] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_8^{(i+k+r)} =$$

$$= \int\limits_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Bigg[\Bigg(\Bigg(\frac{n}{2} - m + l\Bigg)\delta_t^3 \vec{\ni}_0^\beta + \Bigg(m - \frac{n}{2}\Bigg)\delta_t^\beta \vec{\ni}_0^3\Bigg) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha +$$

$$+\Bigg(\Bigg(\frac{m}{2} - \frac{n}{4}\Bigg)\delta_t^3 \vec{\ni}_0^\alpha + \frac{n}{4}\delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^3\Bigg) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \Bigg(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4}\Bigg)\delta^{\alpha\beta}\delta_t^3 \vec{\ni}_0^s \otimes$$

$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^0 + \Bigg(\mu + \frac{n}{4}\Bigg)\delta^{\alpha\beta}\vec{\ni}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^3\Bigg] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0,$$

$$\hat{M}^{(i+k)} = \int\limits_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\ni}_t^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0.$$

Із системи рівнянь (8), як частковий випадок, можна одержати систему рівнянь стійкості руху циліндричного тіла зі стандартного матеріалу другого порядку [3]. Для цього достатньо у формулах (9), (10) прийняти $l = m = n = 0$. Лінеаризована система рівнянь стійкості руху випливає з (8) при $B_j^{(i+k+r)} = 0 \quad (j = \overline{1,8})$.

3. Рівняння стійкості руху циліндричного тіла зі стандартного матеріалу другого порядку при складному навантаженні. Нехай циліндричне тіло перебуває під дією стаціонарних поверхневих сил, які характеризуються вектором поверхневих зусиль

$$\vec{P}_{03} = \begin{cases} \Bigg(\mu N_1 \xi^1 - \dfrac{N_0}{S}\Bigg)\vec{\ni}_3^0 - \mu N_2\Bigg(\xi^2 \vec{\ni}_1^0 - \xi^1 \vec{\ni}_2^0\Bigg) & \text{при} \quad \xi^3 = b, \\ \Bigg(\dfrac{N_0}{S} - \mu N_1 \xi^1\Bigg)\vec{\ni}_3^0 + \mu N_2\Bigg(\xi^2 \vec{\ni}_1^0 - \xi^1 \vec{\ni}_2^0\Bigg) & \text{при} \quad \xi^3 = 0, \end{cases}$$

де N_0 - інтенсивність рівномірно розподілених по поперечних перерізах $\xi^3 = 0, b$ осьових стискальних зусиль; N_1, N_2 - кути згину та закручування, віднесені до одиниці довжини; S - площа області D. За базовий приймаємо розв'язок відповідної задачі, сформульованої в рамках статичної лінійної теорії пружності [2,4]

$$u_0 = \Bigg[\nu Q \xi^1 - M\Bigg(\nu\Bigg(\left(\xi^1\right)^2 - \left(\xi^2\right)^2\Bigg) + \left(\xi^3\right)^2\Bigg) - N_2 \xi^2 \xi^3\Bigg]\vec{\ni}_1^0 +$$

$$+\Bigg(\nu Q \xi^2 - 2\nu M \xi^1 \xi^2 + N_2 \xi^1 \xi^2\Bigg)\vec{\ni}_2^0 + \Bigg(2M\xi^1\xi^3 - Q\xi^3\Bigg)\vec{\ni}_3^0. \tag{11}$$

Тут $Q = N_0/ES$, $M = N_1/4(1+\nu)$, $\nu = \lambda/\big(2(\lambda+\mu)\big)$ - коефіцієнт Пуассона, $E = 2\mu(1+\nu)$ - модуль пружності.

Із (11) знаходимо

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 = \nu(Q - 2M\xi^1)\vec{\ni}_\alpha^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} + (2\nu M\xi^2 - N_2\xi^3)(\vec{\ni}_2^{\,0} \otimes \vec{\ni}_1^{\,0} - \vec{\ni}_1^{\,0} \otimes \vec{\ni}_2^{\,0}) +$$
$$+2M\xi^3(\vec{\ni}_1^{\,0} \otimes \vec{\ni}_3^{\,0} - \vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_1^{\,0}) + N_2(\xi^1\vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_2^{\,0} - \xi^2\vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_1^{\,0}) + (2M\xi^1 - Q)\vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_3^{\,0},$$
$$\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = \nu(Q - 2M\xi^1)\vec{\ni}_\alpha^{\,0} \otimes \vec{\ni}_0^{\,\alpha} - \frac{N_2\xi^2}{2}(\vec{\ni}_1^{\,0} \otimes \vec{\ni}_3^{\,0} + \vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_1^{\,0}) + \frac{N_2\xi^1}{2}\Big(\vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_2^{\,0} + \tag{12}$$
$$+\vec{\ni}_2^{\,0} \otimes \vec{\ni}_3^{\,0}\Big) + (2M\xi^1 - Q)\vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_3^{\,0}, \quad \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 = (1-2\nu)(2M\xi^1 - Q), \quad \hat{T}(u_0) =$$
$$= -\mu N_2\Big[\xi^2(\vec{\ni}_1^{\,0} \otimes \vec{\ni}_3^{\,0} + \vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_1^{\,0}) - \xi^1(\vec{\ni}_2^{\,0} \otimes \vec{\ni}_3^{\,0} + \vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_2^{\,0})\Big] + E(2M\xi^1 - Q)\vec{\ni}_3^{\,0} \otimes \vec{\ni}_3^{\,0}.$$

Запишемо систему рівнянь стійкості руху (8) для базових параметрів (12) у випадку, коли у розвиненні збурення вектора переміщення (1) зберігається лише два доданки. За базу розвинення вибираємо $\{\vec{R}_0^n\}$, тобто приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k\vec{\ni}_0^{\,k}$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k}\vec{\ni}_0^{\,\alpha} \otimes \vec{\ni}_0^{\,k}$. Система (8) складається тепер з векторного ($i = 1$) і тензорного ($i = 2$) диференціальних рівнянь. Запишемо їх у координатній формі, якщо за осі координат вибрати головні центральні осі. Якщо обчислити коефіцієнти (9), (10) для базових параметрів (12), прийнявши $l = m = n = 0$, підставити їх у (8) і виконати відповідні згортки, то одержимо

$$\mu\left[(1-2Q)\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} + \big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3} - N_2\xi^3\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3}\right] - \frac{J^{22}N_2(\lambda+2\mu)}{S}\frac{\partial^2 u_{23}}{(\partial\xi^3)^2} -$$
$$-2M(\lambda+\mu)\left(\xi^3\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} - \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right) + \frac{4\mu M J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{11}}{(\partial\xi^3)^2} - 2M\xi^3\left[\lambda\frac{\partial u_\alpha^\alpha}{\partial\xi^3} + \mu\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi^3}\right] + \Pi_1 =$$
$$= \rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}, \; \mu\left[(1-2Q)\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^3)^2} + \big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3} + N_2\xi^3\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3} - 2M\xi^3\frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3}\right] +$$
$$+\frac{J^{11}N_2(\lambda+2\mu)}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{4\mu M J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{12}}{(\partial\xi^3)^2} + \Pi_2 = \rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2},$$
$$\Big[(\lambda+2\mu)(1-2Q) - EQ\Big]\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{N_2(\lambda+2\mu)}{S}\left(J^{11}\frac{\partial^2 u_{12}}{(\partial\xi^3)^2} - J^{22}\frac{\partial^2 u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}\right) -$$
$$-2M(\lambda+\mu)\xi^3\left(\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} - \frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}\right) + \frac{2MJ^{11}(E+2(\lambda+2\mu))}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2} +$$
$$+\lambda\left[\big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u_\alpha^\alpha}{\partial\xi^3} + N_2\xi^3\left(\frac{\partial u_{12}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3}\right)\right] + \Pi_3 = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2},$$
$$\frac{\mu(1-2Q)J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{11}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{4\mu M J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} - \frac{2M(\lambda+\mu)J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2} -$$
$$-\lambda\Big(1+(\nu-1)Q\Big)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} + 2M(\lambda+\mu)\xi^3\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3} -$$
$$-\frac{2MJ^{11}}{S}\big(\mu+(2-\nu)\lambda\big)\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3} + \frac{N_2}{S}\Big(\mu J^{11} + (\lambda+2\mu)J^{22}\Big)\frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3} +$$

$$+\frac{N_2J^{11}}{S}(\mu-\lambda)\frac{\partial u_{12}}{\partial\xi^3}-(1+2\nu Q)(\lambda u^\alpha_\alpha+2\mu u_{11})+(\lambda+\mu)\xi^3\big(N_2(u_{21}-u_{12})-$$

$$-2Mu_{13}\big)+\Pi^{11}=\rho_0\frac{J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_{11}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\mu(1-2Q)J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_{22}}{(\partial\xi^3)^2}-\lambda\Big(1+(\nu-1)Q\Big)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+2M\lambda\xi^3\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}-\frac{2M}{S}\Big(\mu\nu J^{22}+$$

$$+\lambda(1-\nu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}-\frac{N_2}{S}\Big(\mu J^{22}+(\lambda+2\mu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{12}}{\partial\xi^3}+\frac{N_2J^{22}}{S}(\lambda-\mu)\frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3}-\Big(1+$$

$$+2\nu Q\Big)(\lambda u^\alpha_\alpha+2\mu u_{22})+(\lambda+\mu)N_2\xi^3(u_{21}-u_{12})-2\lambda M\xi^3u_{13}+\Pi^{22}=\rho_0\frac{J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_{22}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\mu(1-2Q)J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{(\lambda+2\mu)N_2J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{2M(\lambda+\mu)J^{22}\xi^3}{S}\frac{\partial^2u_{23}}{(\partial\xi^3)^2}+ \qquad (13)$$

$$+\lambda N_2\xi^3\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+2\mu M\xi^3\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}-\frac{N_2}{S}\Big(\mu J^{11}+(\lambda+2\mu)J^{22}\Big)\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi^3}+\frac{N_2J^{22}(\mu-\lambda)}{S}\frac{\partial u_{22}}{\partial\xi^3}+$$

$$+\mu N_2\xi^3u_{21}+N_2\xi^3(\lambda u^\alpha_\alpha+\mu u_{11})-\mu(1+2\nu Q)(u_{12}+u_{21})+\Pi^{21}=\rho_0\frac{J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_{21}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\mu(1-2Q)J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_{12}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{(\lambda+2\mu)N_2J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{4\mu MJ^{11}}{S}\frac{\partial^2u_2}{(\partial\xi^3)^2}-\lambda N_2\xi^3\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+$$

$$+\frac{N_2}{S}\Big(\mu J^{22}+(\lambda+2\mu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{22}}{\partial\xi^3}+\frac{N_2J^{11}(\lambda-\mu)}{S}\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi^3}+\frac{2M}{S}\Big(\lambda\nu J^{22}+$$

$$+\mu(1-\nu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3}-2\mu M\xi^3u_{23}-N_2\xi^3(\lambda+\mu)u^\alpha_\alpha-\mu(1+2\nu Q)(u_{12}+u_{21})+$$

$$+\Pi^{12}=\rho_0\frac{J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_{12}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{J^{11}}{S}\big((\lambda+2\mu)(1-2Q)-EQ\big)\frac{\partial^2u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{2MJ^{11}}{S}\big(E+2(\lambda+2\mu)\big)\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}+$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)N_2J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_2}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{2M(\lambda+\mu)J^{11}\xi^3}{S}\frac{\partial^2u_{11}}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}-$$

$$-2M\xi^3\bigg((\lambda+\mu)\Big(u_{11}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Big)+\lambda u_{22}\bigg)-\mu N_2\xi^3\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}-\frac{2MJ^{11}}{S}(\nu\lambda+(2-\nu)\mu)\times$$

$$\times\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi^3}+\frac{2M}{S}\Big(\nu\mu J^{22}+\lambda(1-\nu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{22}}{\partial\xi^3}+\frac{\mu N_2}{S}\Big(J^{11}+J^{22}\Big)\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3}-$$

$$-\mu(1-2Q)u_{13}+\Pi^{13}=\rho_0\frac{J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_{13}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{J^{22}}{S}\big((\lambda+2\mu)(1-2Q)-EQ\big)\frac{\partial^2u_{23}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{(\lambda+2\mu)N_2J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{2M(\lambda+\mu)J^{22}\xi^3}{S}\times$$

$$\times\frac{\partial^2u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}+\mu N_2\xi^3\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}+\frac{2MJ^{22}}{S}\big(\lambda(\nu-1)-\mu(1+\nu)\big)\frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3}-$$

$$-\frac{\mu N_2}{S}\Big(J^{11}+J^{22}\Big)\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}-\frac{2M}{S}\Big(\nu\lambda J^{22}+\mu(1-\nu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{12}}{\partial\xi^3}-$$

$$-2\mu M\xi^3 u_{12} - \mu(1-2Q)u_{23} + \Pi^{23} = \rho_0 \frac{J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{23}}{\partial\tau^2}.$$

Тут

$$\Pi_\alpha = (\lambda+2\mu)\Bigg[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{S}\Bigg(\frac{\partial^2 u_{\beta 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3} +$$

$$+\frac{\partial^2 u_{\beta\alpha}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\Bigg)\Bigg] + \mu\Bigg[u_{\alpha 3}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial\xi^3)^2}\Bigg(u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\Bigg) +$$

$$+\frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\Bigg(\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3}\Bigg) + u_{\beta\alpha}\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}}{\partial\xi^3} + u_{\beta 3}\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}}{\partial\xi^3}\Bigg] +$$

$$+\lambda\Bigg(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\Bigg) + \frac{F_\alpha}{S} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\Pi_3 = (\lambda+2\mu)\Bigg[\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3} + u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3} + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\frac{\partial^2 u_{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3} +$$

$$+3\Bigg(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\frac{\partial^2 u_{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\Bigg)\Bigg] + \mu\Bigg(u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}\frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}}{\partial\xi^3}\Bigg) +$$

$$+\lambda\Bigg(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} + u^{\beta\alpha}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\Bigg) + \frac{F_3}{S},$$

$$\Pi^{\alpha\alpha} = \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\Bigg[(\lambda+2\mu)\Bigg(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3} +$$

$$+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^\alpha}{(\partial\xi^3)^2}\Bigg) + \mu\Bigg(u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2} + u^{\alpha s}\frac{\partial^2 u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha s}}{\partial\xi^3}\Bigg) +$$

$$+\lambda\Bigg(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3}\Bigg)\Bigg] - \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{S}\Bigg(\frac{\lambda}{2}\frac{\partial u_{\beta s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot s}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} +$$

$$+\mu\Bigg(\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\Bigg)^2\Bigg) - \mu\Bigg(u^{\alpha 3}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3} + u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\Bigg(u^{\alpha\beta} + u^{\beta\alpha}\Bigg) + u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}u^{\alpha s} +$$

$$+\Bigg(\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}\Bigg)^2\Bigg) - \frac{\lambda}{2}\Bigg(u_{\gamma s}u^{\gamma s} + \frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^s}{\partial\xi^3} + 2u^{\alpha\alpha}\Bigg(u^\gamma_\gamma + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Bigg)\Bigg) + \frac{F_{\alpha\alpha}}{S},$$

$$\Pi^{\alpha\gamma} = \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\Bigg[(\lambda+2\mu)\Bigg(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3} +$$

$$+\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^\gamma}{(\partial\xi^3)^2}\Bigg) + \mu\Bigg(u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2} + u^{\gamma s}\frac{\partial^2 u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\gamma s}}{\partial\xi^3}\Bigg) +$$

$$+\lambda\Bigg(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^3}\Bigg)\Bigg] -$$

$$-\mu\Bigg(u^{\alpha 3}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3} + u^{\alpha\beta}u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot} + u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}u^{\beta\gamma} + u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}u^{\gamma s} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3} + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{S}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\Bigg) -$$

$$-\lambda\left(u^{\beta}_{\beta}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)u^{\alpha\gamma}+\frac{F_{\gamma\alpha}}{S}\quad(\alpha\neq\gamma),$$

$$\Pi^{\alpha 3}=\frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\Bigg[(\lambda+2\mu)\bigg(\frac{\partial^2 u_s}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha s}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha s}}{(\partial\xi^3)^2}+2\bigg(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}+$$

$$+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\bigg)\bigg)+\mu\bigg(u_{\beta 3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\bigg)+\lambda\bigg(u^{\beta}_{\beta}\frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}+$$

$$+\frac{\partial u^{\beta}_{\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\bigg)\Bigg]-\mu\Bigg[u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}\frac{\partial u^{s}}{\partial\xi^3}+u_{\beta 3}\Big(u^{\alpha\beta}+u^{\beta\alpha}\Big)+\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{S}\frac{\partial u^{\beta 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\Bigg]-\lambda\bigg(u^{\alpha 3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+u^{\beta}_{\beta}u^{\alpha 3}\bigg)+F_{3\alpha},$$

$$F_{kn}=\vec{\ni}^{\,0}_{n}\otimes\vec{\ni}^{\,0}_{k}\cdot\cdot\hat{F}^{(2)},\quad F_{k}=\vec{\ni}^{\,0}_{k}\cdot\hat{F}^{(1)},\quad u_{\alpha k}=u^{\cdot k}_{\alpha\cdot}=u^{\alpha\cdot}_{\cdot k}=u^{\alpha k},$$

$$J^{\alpha\alpha}=\int\limits_{D}\Big(\xi^{\alpha}\Big)^{2}d\Sigma_0\quad-$$

моменти інерції області D стосовно осей координат.

Якщо в системі рівнянь (13) знехтувати нелінійними членами, то одержимо лінеаризовані рівняння стійкості руху циліндричного тіла при великих (скінченних) початкових деформаціях.

4. Лінеаризовані рівняння стійкості руху при малих початкових деформаціях. Розглянемо в прийнятому наближенні лінеаризовану систему рівнянь стійкості руху при малих початкових деформаціях у випадку "мертвих" масових сил і "мертвого" поверхневого навантаження бічної поверхні. Такі рівняння одержимо з рівнянь (8), якщо в останніх знехтуємо нелінійними членами, приймемо $F_k=0$, $F_{k\alpha}=0(k=\overline{1,3};\alpha=\overline{1,2})$, а у формулах (9) – $\varepsilon^{ij}=0$, $a^{ij}=0$, $a=0$. У результаті після підрахунків

$$\mu\bigg(\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}\bigg)-\frac{\mu N_2 J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{23}}{(\partial\xi^3)^2}=\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2},$$

$$\mu\bigg(\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3}\bigg)+\frac{\mu N_2 J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}=\rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2},$$

$$(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\mu N_2}{S}\bigg(J^{11}\frac{\partial^2 u_{12}}{(\partial\xi^3)^2}-J^{22}\frac{\partial^2 u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}\bigg)+$$

$$+\frac{2MEJ^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}+\lambda\frac{\partial u^{\alpha}_{\alpha}}{\partial\xi^3}=\rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\mu J^{\alpha\alpha}}{S}\frac{\partial^2 u_{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2}-\lambda\bigg(u^{\beta}_{\beta}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\bigg)-2\mu u_{\alpha\alpha}=\frac{\rho_0 J^{\alpha\alpha}}{S}\frac{\partial^2 u_{\alpha\alpha}}{\partial\tau^2},\quad(\alpha=\overline{1,2})$$

$$\frac{\mu J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{\mu N_2 J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\Big(u_{12}+u_{21}\Big)=\frac{\rho_0 J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial\tau^2},\tag{14}$$

$$\frac{\mu J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{12}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\mu N_2 J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\Big(u_{12}+u_{21}\Big)=\frac{\rho_0 J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{J^{11}}{S}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\mu N_2 J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{2MEJ^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}-$$

$$-\mu\left(u_{13}+\frac{\partial u_1}{\partial \xi^3}\right)+EQu_{13}=\frac{\rho_0 J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{\partial \tau^2},$$
$$\frac{J^{22}}{S}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^2 u_{23}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{\mu N_2 J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}-$$
$$-\mu\left(u_{23}+\frac{\partial u_2}{\partial \xi^3}\right)+EQu_{23}=\frac{\rho_0 J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{23}}{\partial \tau^2}.$$

Проведемо короткий аналіз системи рівнянь (14) у випадку, коли $N_2 = 0$ і $M = 0$, тобто циліндричне тіло перебуває тільки під дією осьового стискання. Два перші і два останні рівняння цієї системи описують поперечні коливання у двох головних площинах. Розглянемо такі коливання в площині, яка характеризується індексом 1. Знехтуємо інерцією обертання, тобто проаналізуємо систему

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}\right)=\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2},$$
$$\frac{J^{11}}{S}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\left(u_{13}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\right)+EQu_{13}=0.$$

З цих двох рівнянь одержуємо

$$\frac{J^{11}}{S}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^3 u_{13}}{(\partial\xi^3)^3}-\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}+EQ\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}=0.$$

Приймемо $u_{13} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi^3}$, тобто знехтуємо і деформацією зсуву. В результаті одержуємо

$$J^{11}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+EQS\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+S\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}=0. \qquad (15)$$

Якщо прийняти $\nu = 0$ і знехтувати малим доданком у коефіцієнті при старшій похідній, то одержимо добре відоме рівняння [5,6]

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+S\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}=0,$$

яке зазвичай використовуємо під час дослідження стійкості руху циліндричних тіл.

Враховуючи деформацію зсуву, замість (15) одержимо рівняння

$$J^{11}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+\rho_0 S\left(1-\frac{EQ}{\mu}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-$$
$$-\frac{\rho_0 J^{11}(\lambda+2\mu-EQ)}{\mu}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \qquad (16)$$

У випадку, коли беруть до уваги інерцію обертання, але нехтують деформацією зсуву,одержуємо рівняння

$$J^{11}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+\rho_0 S\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \qquad (17)$$

Якщо прийняти $\nu = 0$ і знехтувати малими доданками в коефіцієнтах, то рівняння (16) і (17) набудуть відповідно вигляду

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4} + N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} + \rho_0 S\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2} - 2\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2} = 0,$$
$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4} + N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} + \rho_0 S\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2} - \rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2} = 0.$$

Друге з цих рівнянь одержано в працях В. З. Власова (див. напр.[5]).

Якщо з першого рівняння системи (14) визначити $\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}$ і результат підставити в передостаннє рівняння цієї системи, то одержимо рівняння стійкості руху

$$J^{11}(\lambda + 2\mu - EQ)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4} + N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} + \rho_0 S\left(1 - \frac{EQ}{\mu}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2} +$$
$$+\frac{\rho_0^2 J^{11}}{\mu}\frac{\partial^4 u_1}{\partial\tau^4} - \rho_0 J^{11}\left(1 + \frac{(\lambda + 2\mu - EQ)}{\mu}\right)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2} = 0,$$

яке враховує і деформацію зсуву, й інерцію обертання. З нього рівняння (15), (16), (17) можна одержати як часткові випадки.

---

1. *Доманський П. П.* Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл // Доп. НАН України. - 1997. - N6. - С. 53-59.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости.- М., 1980.
3. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах.- Л.,1986.
4. *Банах І. Я.* Побудова розв'язку задачі про напружено-деформівний стан циліндра при складному навантаженні методом розкладу за тензорними функціями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С. 114-123.
5. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. – М., 1959.
6. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – М., 1967.

Domans'kyj P.

EQUATIONS OF STABILITY MOVEMENT OF CYLINDRICAL SOLIDS OF MURNAGAN MATERIAL

Equations of stability movement of cylindrical solids of Murnaghan material are obtained by using of decomposition of variation of trasference vector by tensor basis. Special cases of these equations under compound load are considered. Comparative analysis is done for the results obtained.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.98