ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 64–74

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 64–74

УДК 517.927

Юрій Жерновий

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛІНІЙНИМ ВХОДЖЕННЯМ СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

1. Вступ. Теореми єдиності розв'язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, розв'язаних стосовно старшої похідної, розглянуті в працях [1, с.95-114; 2, 3]. У цій статті ми довели теореми єдиності розв'язку двоточкових крайових задач для системи двох рівнянь першого порядку

$$h(t,x,y,x') = 0, \quad f(t,x,y,y') = 0,$$

для рівнянь другого порядку $F(t,x'') = 0$, $F(t,x,x',x'') = 0$ та для системи рівнянь другого порядку $f(t,x,x',x'') = 0$, характерною особливістю яких є нелінійне входження старшої похідної. Для рівнянь другого порядку побіжно розглянуто питання про апріорні оцінки розв'язку крайових задач.

Нехай $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, $I = [a,b]$. Якщо $x(t)$, $t \in I$, є неперервна функція, яка має k неперервних похідних, то писатимемо $x \in C^k(I)$, і, аналогічно, $x \in AC^k(I)$, коли k-а похідна абсолютно неперервна. Якщо функція $f(t,x_1,\ldots,x_p)$: $I \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ задовольняє умову Каратеодорі [1, с.15], то писатимемо, що $f(t,x_1,\ldots,x_p) \in \mathrm{Car}(I \times \mathbb{R}^p)$. Якщо матимемо справу з вектор-функціями $x(t)$: $I \to \mathbb{R}^n$ або $f(t,x)$: $I \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, то для позначення введених вище класів функцій використовуватимемо відповідно символи $C_n^k(I)$, $AC_n^k(I)$ і $\mathrm{Car}_n(I \times \mathbb{R}^p)$. Там, де трапляються сумовані функції, маємо на увазі, що відповідне співвідношення виконується майже всюди. Під зростанням (спаданням) функції за яким-небудь аргументом розуміємо монотонне зростання (спадання) в строгому сенсі.

2. Апріорні оцінки і єдиність розв'язку (рівняння другого порядку). Розглянемо нелінійну крайову задачу

$$N[x] \equiv F(t,x'') = 0, \quad (t,x'') \in I \times \mathbb{R}; \tag{1}$$

$$\lambda_1[x] \equiv \varphi\big(x(a), x'(a)\big) = 0, \quad \lambda_2[x] \equiv \psi\big(x(b), x'(b)\big) = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Нехай функція $F(t,x'')$ має неперервну частинну похідну за x'' і*

$$\frac{\partial F}{\partial x''} > 0, \quad (t,x'') \in I \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

а функції $\varphi(s_1, s_2)$, $\psi(\tau_1, \tau_2)$ мають неперервні частинні похідні за кожною змінною для всіх $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$, причому

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\right| > 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} \leqslant 0, \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2; \\ &\left|\frac{\partial\psi}{\partial \tau_1}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial \tau_2}\right| > 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial \tau_1}\frac{\partial\psi}{\partial \tau_2} \geqslant 0, \quad (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Нехай $x(t)$ – розв'язок задачі (1), (2), $z_1(t)$, $z_2(t)$ – двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють крайові умови (2). Тоді якщо $N[z_1] = \psi_1(t) \geqslant 0$, $N[z_2] = \psi_2(t) \leqslant 0$, для всіх $t \in I$, то справедливі оцінки $z_1(t) \leqslant x(t) \leqslant z_2(t)$, для всіх $t \in I$.

Доведення. Віднімаючи почленно рівності $N[z_1] = \psi_1(t)$, $\lambda_1[z_1] = 0$, $\lambda_2[z_1] = 0$ відповідно від рівностей $N[x] = 0$, $\lambda_1[x] = 0$, $\lambda_2[x] = 0$, одержимо

$$\begin{gathered} F(t, x'') - F(t, z_1'') = -\psi_1(t); \\ \varphi\big(x(a), x'(a)\big) - \varphi\big(z_1(a), z_1'(a)\big) = 0, \quad \psi\big(x(b), x'(b)\big) - \psi\big(z_1(b), z_1'(b)\big) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Оскільки функції $F(t, x'')$, $\varphi(s_1, s_2)$, $\psi(\tau_1, \tau_2)$ задовольняють умови леми Адамара [4, с.81], то знайдеться така неперервна для $t \in I$ функція $r(t)$ і сталі α_0, α_1, β_0, β_1, що

$$\begin{gathered} F(t, x'') - F(t, z_1'') = r(t)u''(t), \quad \psi\big(x(b), x'(b)\big) - \psi\big(z_1(b), z_1'(b)\big) = \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b), \\ \varphi\big(x(a), x'(a)\big) - \varphi\big(z_1(a), z_1'(a)\big) = \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a), \end{gathered} \tag{6}$$

де $u(t) = x(t) - z_1(t)$. Тоді з (5) отримаємо

$$u'' = -\frac{\psi_1(t)}{r(t)}, \quad l_1[u] \equiv \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0, \quad l_2[u] \equiv \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0. \tag{7}$$

З (3) випливає, що $r(t) > 0$ для всіх $t \in I$, а з (4) маємо, що

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| > 0, \quad \alpha_0\alpha_1 \leqslant 0, \quad \beta_0\beta_1 \geqslant 0. \tag{8}$$

При виконанні умов (8) функція Гріна задачі (7)

$$G(t, s) = \begin{cases} \big[\alpha_0(s-a) - \alpha_1\big]\big[\beta_0(b-t) + \beta_1\big]/P, & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b; \\ \big[\beta_0(b-s) + \beta_1\big]\big[\alpha_0(t-a) - \alpha_1\big]/P, & a \leqslant t \leqslant s \leqslant b, \end{cases}$$

де $P = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_0\beta_0(b-a)$, задовольняє умову $G(t, s) \leqslant 0$ для $(t, s) \in I \times I$. Записавши розв'язок задачі (7) у вигляді

$$u(t) = -\int_a^b G(t, s)\frac{\psi_1(s)}{r(s)}ds,$$

одержимо, що $u(t) = x(t) - z_1(t) \geqslant 0$ для всіх $t \in I$. Теорема доведена.

Зауваження 1.1. Умову (3) можна замінити умовою

$$\frac{\partial F}{\partial x''} < 0, \quad (t, x'') \in I \times \mathbb{R}. \tag{9}$$

Тоді для розв'язку задачі (1), (2) одержимо оцінки $z_2(t) \leqslant x(t) \leqslant z_1(t)$.

Зауваження 1.2. У випадку лінійних крайових умов $l_1[x] = A$, $l_2[x] = B$ умови (4) мають вигляд (8).

Наслідком теореми 1 є теорема про єдиність розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 2. *Якщо виконуються умови (3) (або (9)) і (4), то крайова задача (1), (2) не може мати двох розв'язків.*

Доведення. Припустимо, що $x_1(t) \neq x_2(t)$ - два розв'язки задачі (1), (2). Приймемо $x_1(t) = z_1(t)$, з теореми 1 одержимо, що $x_1(t) \leqslant x_2(t)$. З іншого боку, прийнявши $x_2(t) = z_1(t)$, матимемо, що $x_2(t) \leqslant x_1(t)$. Отже, $x_1(t) = x_2(t)$.

Зауваження 2.1. Умова (3) (або (9)) для функції F є суттєвою. Справді, розглянемо крайову задачу

$$x'' - \alpha(t)\sin x'' = 0, \qquad l_1[x] = A, \quad l_2[x] = B, \tag{10}$$

припускаючи, що умови (8) виконуються. Якщо $\alpha(t) > 1$ для всіх $t \in I$, то умова (3) не виконується і задача (10) має не менше трьох розв'язків (вони відповідають загальним розв'язкам рівнянь)

$$x''(t) = c_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad k \geqslant 3,$$

де $c_i(t)$ - абсциси точок перетину графіків функцій $y = x$, $y = \alpha(t)\sin x$, $t \in I$). Якщо ж $0 < \alpha(t) < 1$ для всіх $t \in I$, то умова (3) виконується і задача (10) має єдиний розв'язок, який відповідає загальному розв'язку рівняння $x'' = 0$. Умова (3) виконується також, наприклад, для задачі

$$x'' + (x'')^3 = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,$$

яка має єдиний розв'язок.

Тепер розглянемо крайову задачу

$$M[x] \equiv F(t, x, x', x'') = 0, \quad (t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3; \tag{11}$$

$$\lambda_1[x] \equiv \varphi(x(a), x'(a)) = 0, \quad \nu_2[x] \equiv \psi(x(b)) = 0. \tag{12}$$

Теорема 3. *Нехай функція $F(t, x, x', x'')$ має неперервні похідні за x, x', x'', функція $\varphi(s_1, s_2)$ має неперервні похідні за s_1, s_2 для всіх $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, а функція $\psi(s)$ неперервна і має похідну для всіх $s \in \mathbb{R}$, причому*

$$\frac{\partial F}{\partial x} \leqslant M_1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x'}\right| \leqslant M_2, \quad \frac{\partial F}{\partial x''} \geqslant M_3 > 0, \quad (t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3, \tag{13}$$

і виконуються нерівності

$$\begin{gathered} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\right| > 0, \;\; \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \leqslant 0, \;\; (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2; \;\; \psi'(s) \neq 0, \;\; s \in \mathbb{R}; \\ \frac{p^2 A_0^2(s_1, s_2) M_1}{8M_3} + \frac{p A_0(s_1, s_2) M_2}{2M_3} - 1 \leqslant 0, \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, \end{gathered} \tag{14}$$

де

$$p = b - a, \quad A_0(s_1, s_2) = \left(p\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} - 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\right) \Big/ \left(p\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\right)$$

і треба прийняти $M_1 = 0$, якщо $\partial F/\partial x < 0$ для $(t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3$. Нехай $x(t)$ - розв'язок задачі (11), (12), $z_1(t)$, $z_2(t)$ - двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють крайові умови (12). Тоді якщо $M[z_1] = \psi_1(t) \geqslant 0$,

$M[z_2] = \psi_2(t) \leqslant 0$ для всіх $t \in I$, то справедливі оцінки $z_1(t) \leqslant x(t) \leqslant z_2(t)$, для всіх $t \in I$.

Доведення. Віднімаючи почленно рівності $M[z_1] = \psi_1(t)$, $\lambda_1[z_1] = 0$, $\nu_2[z_1] = 0$ відповідно від рівностей $M[x] = 0$, $\lambda_1[x] = 0$, $\nu_2[x] = 0$, одержимо

$$\begin{gathered} F(t, x, x', x'') - F(t, z_1, z_1', z_1'') = -\psi_1(t); \\ \varphi\big(x(a), x'(a)\big) - \varphi\big(z_1(a), z_1'(a)\big) = 0, \quad \psi\big(x(b)\big) - \psi\big(z_1(b)\big) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Прийнявши $u(t) = x(t) - z_1(t)$ і застосувавши лему Адамара та теорему про середнє, отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} &F(t, x, x', x'') - F(t, z_1, z_1', z_1'') = q(t)u + p(t)u' + r(t)u'', \\ &\psi\big(x(b)\big) - \psi\big(z_1(b)\big) = \beta_0 u(b) = 0, \end{aligned}$$

де $\beta \neq 0$, і рівність (6). Тому з (15) матимемо

$$u'' + \tilde{p}(t)u' + \tilde{q}(t)u = -\tilde{\psi}_1(t), \quad \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = u(b) = 0, \tag{16}$$

де

$$\tilde{p}(t) = p(t)/r(t), \quad \tilde{q}(t) = q(t)/r(t), \quad \tilde{\psi}_1(t) = \psi_1(t)/r(t).$$

З (13) випливає, що

$$q(t) \leqslant M_1, \quad |p(t)| \leqslant M_2, \quad r(t) \geqslant M_3 > 0, \quad t \in I,$$

а з (14) одержимо нерівності

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \ \ \alpha_0\alpha_1 \leqslant 0; \quad \frac{p^2 a_0^2 M_1}{8M_3} + \frac{p a_0 M_2}{2M_3} - 1 \leqslant 0, \tag{17}$$

де $a_0 = (p\alpha_0 - 2\alpha_1)/(p\alpha_0 - \alpha_1)$. Тому правильні оцінки

$$\tilde{q}(t) \leqslant M_1/M_3, \quad |\tilde{p}(t)| \leqslant M_2/M_3,$$

які разом з умовами (17) гарантують існування функції Гріна $G(t,s)$ задачі (16), причому $G(t,s) \leqslant 0$ для $(t,s) \in I \times I$ (див. наслідок теореми 4 і теорему 7 праці [3]). Записавши розв'язок задачі (16) у вигляді

$$u(t) = -\int_a^b G(t,s)\tilde{\psi}_1(s)\,ds,$$

одержимо, що $u(t) = x(t) - z_1(t) \geqslant 0$ для всіх $t \in I$. Теорема доведена.

Зауваження 3.1. Аналогічна теорема правильна для рівняння (11) з крайовими умовами

$$\nu_1[x] \equiv \varphi\big(x(a)\big) = 0, \quad \lambda_2[x] \equiv \psi\big(x(b), x'(b)\big) = 0.$$

З теореми 3, так само, як і з теореми 1, випливає теорема єдиності для розв'язку задачі (11), (12).

Теорема 4. *Якщо виконуються умови (13), (14), то крайова задача (11), (12) не може мати двох розв'язків.*

3. Система двох рівнянь першого порядку. Розглянемо крайову задачу

$$h(t, x, y, x') = 0, \qquad f(t, x, y, y') = 0, \tag{18}$$

$$x(a) = A, \qquad x(b) = B, \tag{19}$$

де $h,\ f \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, $A,\ B \in \mathbb{R}$. Нехай $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in C^1(I)$. Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
H_x(t) &= \big[h\big(t, x_1(t), y_1(t), x_1'(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_1(t), x_1'(t)\big)\big] / \big(x_1(t) - x_2(t)\big),\\
H_{x'}(t) &= \big[h\big(t, x_2(t), y_2(t), x_1'(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_2(t), x_2'(t)\big)\big] / \big(x_1'(t) - x_2'(t)\big),\\
F_y(t) &= \big[f\big(t, x_2(t), y_1(t), y_1'(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_2(t), y_1'(t)\big)\big] / \big(y_1(t) - y_2(t)\big),\\
F_{y'}(t) &= \big[f\big(t, x_2(t), y_2(t), y_1'(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_2(t), y_2'(t)\big)\big] / \big(y_1'(t) - y_2'(t)\big).
\end{aligned}$$

Ці позначення мають сенс лише для тих $t \in I$, для яких $x_1(t) \neq x_2(t)$, $x_1'(t) \neq x_2'(t)$, $y_1(t) \neq y_2(t)$, $y_1'(t) \neq y_2'(t)$ відповідно і лише для таких значень t вони використовуватимуться в доведеннях.

Теорема 5. *Нехай $h(t, x, y, x')$ зростає за x і за y і спадає за x', $f(t, x, y, y')$ зростає за x, не зростає за y і спадає за y'. Тоді крайова задача (18), (19) не може мати двох розв'язків.*

Доведення. Припустимо, що задача (18), (19) має два розв'язки $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$ і $\big(x_2(t), y_2(t)\big)$, так що

$$\max_{t \in I}\big(|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)|\big) > 0.$$

Тоді не може бути, що $x_1(t) = x_2(t)$ для всіх $t \in I$, оскільки завдяки зростанню функції h за y з рівнянь

$$h(t, x_1, y_1, x_1') = 0, \quad h(t, x_1, y_2, x_1') = 0$$

випливає, що $y_1(t) = y_2(t)$ для всіх $t \in I$. Розглянемо $u(t) = x_1(t) - x_2(t) \not\equiv 0$, $t \in I$. Можемо вважати, що існує точка $\tau \in I$, в якій $u(\tau) > 0$. Нехай (t_1, t_2), $t_1 < t_2$ – найбільший інтервал, що містить точку τ, в якому $u(t) > 0$. Враховуючи крайові умови (19), маємо $u(t_1) = u(t_2) = 0$.

Покажемо, що для будь-якого $t \in [t_1, t_2]$ $\quad v(t) = y_1(t) - y_2(t) \geqslant 0$. Якщо це не так, то знайдеться точка $t_0 \in (t_1, t_2)$, в якій $v(t_0) < 0$. Тоді припустимо, що існує точка $t_* \in (t_1, t_0)$ така, що $v(t_*) = 0$, $v(t) < 0$ для всіх $t \in (t_*, t_0]$. Отже, $v'(t_*) \leqslant 0$. Використовуючи друге рівняння (18), одержимо

$$0 = f\big(t_*, x_1(t_*), y_1(t_*), y_1'(t_*)\big) - f\big(t_*, x_2(t_*), y_1(t_*), y_2'(t_*)\big) > 0,$$

з врахуванням того, що f зростає за x і спадає за y'. Одержана суперечність доводить, що $v(t) < 0$ для всіх $t \in (t_1, t_0]$.

В околі точки t_0, крім тих точок, де $v'(t) = 0$, функція $v(t)$ задовольняє диференціальне рівняння першого порядку

$$v' = \tilde{a}(t) + F_{yy'}(t)\, v, \tag{20}$$

де

$$\begin{gathered}
\tilde{a}(t) = a(t)\alpha_{y'}(t), \quad F_{yy'}(t) = F_y(t)\alpha_{y'}(t) \leqslant 0, \quad \alpha_{y'}(t) = -1/F_{y'}(t) > 0,\\
a(t) = f\big(t, x_1(t), y_1(t), y_1'(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_1(t), y_1'(t)\big) > 0.
\end{gathered}$$

Доведемо, що $v'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (t_1, t_0]$. Нехай існує точка $\tau_* \in (t_1, t_0]$ така, що $v'(\tau_*) = 0$. Оскільки $u(\tau_*) > 0$, $v(\tau_*) < 0$, то, враховуючи зростання $f(t, x, y, y')$ за x і не зростання за y, з другого рівняння (18) одержимо суперечність

$$0 = f\big(\tau_*, x_1(\tau_*), y_1(\tau_*), y_1'(\tau_*)\big) - f\big(\tau_*, x_2(\tau_*), y_2(\tau_*), y_1'(\tau_*)\big) > 0,$$

яка доводить, що $v'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (t_1, t_0]$. Інтегруючи рівняння (20), одержуємо

$$v(t) = \Big(v(t_0) + \int_{t_0}^{t} \tilde{a}(\tau)\exp\big(-B(\tau)\big)d\tau\Big)\exp\big(B(t)\big), \tag{21}$$

де

$$B(t) = \int_{t_0}^{t} F_{yy'}(\tau)\,d\tau \geqslant 0, \quad t \in [t_1, t_0], \quad v(t_0) < 0, \quad \tilde{a}(\tau) > 0, \quad \tau \in (t_1, t_0].$$

З (21) при $t \to t_1$ випливає, що

$$v(t_1) \leqslant v(t_0)\exp\big(B(t_1)\big) \leqslant v(t_0) < 0.$$

Тому $v(t) < 0$ для всіх $t \in [t_1, t_0]$.

Отже, в точці $t = t_1$ маємо: $u(t_1) = 0$, $u'(t_1) \geqslant 0$ і $v(t_1) < 0$. Враховуючи монотонність h за y і x' з першого рівняння (18) отримаємо

$$0 = h\big(t_1, x_1(t_1), y_1(t_1), x_1'(t_1)\big) - h\big(t_1, x_1(t_1), y_2(t_1), x_2'(t_1)\big) < 0.$$

Одержана суперечність свідчить про помилковість припущення, що знайдеться точка $t_0 \in (t_1, t_2)$, де $v(t_0) < 0$, тому $v(t) \geqslant 0$ для всіх $t \in [t_1, t_2]$.

Далі, використовуючи перше рівняння системи (18), знаходимо, що $u(t)$ для $t \in (t_1, t_2)$, крім тих точок, де $u'(t) = 0$, задовольняє рівняння

$$u' = \tilde{a}_0(t) + H_{xx'}(t)\,u, \tag{22}$$

де

$$\tilde{a}_0(t) = a_0(t)\beta_{x'}(t), \quad H_{xx'}(t) = H_x(t)\beta_{x'}(t) > 0, \quad \beta_{x'}(t) = -1/H_{x'}(t) > 0,$$
$$a_0(t) = h\big(t, x_2(t), y_1(t), x_1'(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_2(t), x_1'(t)\big) \geqslant 0.$$

Покажемо, що $u'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$. Нехай існує точка $\tau_0 \in (t_1, t_2)$ така, що $u'(\tau_0) = 0$. Оскільки $u(\tau_0) > 0$, $v(\tau_0) \geqslant 0$, то, враховуючи зростання $h(t, x, y, x')$ за x і y, з першого рівняння (18) одержимо суперечність

$$0 = h\big(\tau_0, x_1(\tau_0), y_1(\tau_0), x_1'(\tau_0)\big) - h\big(\tau_0, x_2(\tau_0), y_2(\tau_0), x_1'(\tau_0)\big) > 0,$$

яка доводить, що $u'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$.

Інтегруючи рівняння (22) від $t = \tau_1 \in (t_1, t_2)$ до $t \in [\tau_1, t_2)$, одержимо

$$u(t) = \Big(u(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} \tilde{a}_0(\tau)\exp\big(-B_0(\tau)\big)d\tau\Big)\exp\big(B_0(t)\big), \quad t \in [\tau_1, t_2), \tag{23}$$

де

$$B_0(t) = \int_{\tau_1}^{t} H_{xx'}(\tau)\,d\tau > 0, \quad t \in (\tau_1, t_2], \quad u(\tau_1) > 0, \quad \tilde{a}_0(\tau) \geqslant 0, \quad \tau \in [\tau_1, t_2].$$

З (23) при $t \to t_2$ матимемо

$$u(t_2) \geqslant u(\tau_1)\exp\big(B_0(t_2)\big) > u(\tau_1) > 0,$$

що суперечить умові $u(t_2) = 0$. Одержана суперечність доводить теорему 5.

Розглянемо систему

$$x' = h(t,x,y), \quad f(t,x,y,y') = 0 \tag{24}$$

з крайовими умовами (19), де $h \in \mathrm{Car}(I \times \mathbb{R}^2)$, $f \in C(I \times \mathbb{R}^3)$. Для x_1, $x_2 \in AC(I)$, y_1, $y_2 \in C^1(I)$ введемо позначення

$$H_x(t) = \big[h\big(t, x_1(t), y_1(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_1(t)\big)\big] / \big(x_1(t) - x_2(t)\big).$$

Теорема 6. *Нехай $h(t,x,y)$ зростає за y, $f(t,x,y,y')$ задовольняє умови теореми 5 і для будь-якого $M > 0$ існує сумовна на I функція $k(t) \geqslant 0$ така, що*

$$|H_x(t)| \leqslant k(t) \tag{25}$$

для будь-яких x_1, $x_2 \in AC(I)$, y_1, $y_2 \in C^1(I)$, $|x_i(t)| \leqslant M$, $|y_i(t)| \leqslant M$ для всіх $t \in I$ $(i = 1, 2)$, причому нерівність (25) виконується майже для всіх t у кожному інтервалі з відрізка I, де $x_1(t) \neq x_2(t)$. Тоді крайова задача (24), (19) не може мати двох розв'язків.

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$ і $\big(x_2(t), y_2(t)\big)$. Так само, як і в доведенні теореми 5, легко показати, що не може бути випадку, коли $x_1(t) = x_2(t)$ для всіх $t \in I$. Тому $u(t) = x_1(t) - x_2(t) \not\equiv 0$. Нехай (t_1, t_2) – найбільший інтервал, в якому $u(t) > 0$. Очевидно, що $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$ і $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Як і в доведенні теореми 5, з припущення, що $v(t_0) < 0$, де $t_0 \in (t_1, t_2)$, одержимо, що $v(t) < 0$ для всіх $t \in [t_1, t_0]$. Після цього доведення закінчується як в теоремі 1 праці [1, с.96-97].

Розглянемо систему

$$h(t,x,y,x') = 0, \quad y' = f(t,x,y) \tag{26}$$

з крайовими умовами (19), де $h \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, $f \in \mathrm{Car}(I \times \mathbb{R}^2)$. Для x_1, $x_2 \in C^1(I)$, y_1, $y_2 \in AC(I)$ введемо позначення

$$F_y(t) = \big[f\big(t, x_2(t), y_1(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_2(t)\big)\big] / \big(y_1(t) - y_2(t)\big).$$

Теорема 7. *Нехай $h(t,x,y,x')$ задовольняє умови теореми 5, $f(t,x,y)$ не спадає за x і для будь-якого $M > 0$ існує сумовна на I функція $k_1(t)$ така, що*

$$F_y(t) \leqslant k_1(t) \tag{27}$$

для будь-яких x_1, $x_2 \in C^1(I)$, y_1, $y_2 \in AC(I)$, $|x_i(t)| \leqslant M$, $|y_i(t)| \leqslant M$ для всіх $t \in I$ $(i = 1, 2)$, причому нерівність (27) виконується в кожному інтервалі з відрізка I, де $y_1(t) \neq y_2(t)$. Тоді крайова задача (26), (19) не може мати двох розв'язків.

Доведення. Починаючи доведення, як і в теоремі 5, одержимо, що (t_1, t_2) – найбільший інтервал, в якому $u(t) > 0$. Використовуючи умову (27), покажемо, як в доведенні теореми 1 праці [1, с.96-97], що $v(t) < 0$ для всіх $t \in [t_1, t_0]$. Доведення закінчується як в теоремі 5.

Зауваження 7.1. Теореми 5, 6 і 7 залишаються правильними, якщо крайові умови (19) замінити умовами

$$L_1\big(x(a), y(a)\big) = 0, \qquad L_2\big(x(a), x(b), y(a), y(b)\big) = 0,$$

де $L_1 \in C(\mathbb{R}^2)$, $L_2 \in C(\mathbb{R}^4)$, $L_1(s_1, -s_2)$ зростає за s_1 і не спадає за s_2, а $L_2(z_1, z_2, z_3, z_4)$ зростає за z_2 і не спадає за z_1, z_3, z_4. Доведення проводиться як в теоремі 3 праці [1, с.102].

4. Рівняння другого порядку як частковий випадок системи двох рівнянь першого порядку. Розглянемо крайову задачу

$$F(t, x, x', x'') = 0, \tag{28}$$

$$x(a) = \varphi\big(x'(a)\big), \quad x(b) = -\psi\big(x'(b)\big), \tag{29}$$

де $F \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, φ, $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Теорема 8. *Нехай $\varphi(s)$, $\psi(s)$ не спадають за s (зокрема, сталі), а $F(t, x, x', x'')$ зростає за x, не зростає за x' і спадає за x''. Тоді задача (28), (29) не може мати двох розв'язків.*

Ця теорема є наслідком теореми 6 і зауваження 7.1.

Зауваження 8.1. Умови монотонності для функції F при виконанні всіх інших умов теореми 8 є достатніми, але не є необхідними для єдиності розв'язку крайової задачі (28), (29). Наприклад, крайова задача (10) при $0 < \alpha(t) < 1$, $t \in I$, має єдиний розв'язок, хоча умови теореми 8 для функції $F = x'' - \alpha(t)\sin x''$ не виконуються. Те саме можна сказати і про просту лінійну задачу

$$x'' + x = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = b,$$

для якої F зростає за x і x''. Разом з тим можна навести приклади, коли при не виконанні умов теореми 8 єдиність розв'язку крайової задачі порушується. Наприклад, задача

$$x'' = (x'')^3, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B \tag{30}$$

має 3 розв'язки. Зауважимо, що для задачі (30) не виконуються також умови (3) і (9) теореми 2.

Зауваження 8.2. Інколи за допомогою теореми 8 можна дійти висновку про розв'язність нелінійної крайової задачі. Крайова задача

$$x^3 - (x'')^3 = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,$$

для якої виконуються умови теореми 8, може мати лише єдиний розв'язок. Оскільки

$$x^3 - (x'')^3 = (x - x'')\big((x'')^2 + xx'' + x^2\big),$$

а задача

$$x - x'' = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$$

має єдиний розв'язок, то розв'язок задачі

$$(x'')^2 + xx'' + x^2 = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$$

не існує, якщо $|A| + |B| > 0$.

Для рівняння (28) розглянемо задачу

$$x'(a) = \varphi\big(x(a)\big), \quad x'(b) = -\psi\big(x(b)\big), \tag{31}$$

де $F \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, φ, $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Теорема 9. *Нехай функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ задовольняють умови теореми 8, а $F(t,x,x',x'')$ зростає за x і за x' і спадає за x''. Тоді задача (28), (31) не може мати двох розв'язків.*

Ця теорема є наслідком твердження, яке одержуємо з теореми 5 і зауваження 7.1, якщо в них замінити x на y і y на x.

5. Система рівнянь другого порядку. Для системи диференціальних рівнянь

$$f(t,x,x',x'')=0, \qquad t\in I, \tag{32}$$

розглянемо два випадки задання крайових умов:

$$x(a)=Ax'(a)+c, \qquad x(b)=-Bx'(b)+d; \tag{33}$$

$$x(a)=c, \qquad x(b)=d. \tag{34}$$

Тут $f\in \mathrm{Car}_n(I\times\mathbb{R}^{3n})$, c, $d\in\mathbb{R}^n$, A і B – додатно визначені $n\times n$ матриці.

Введемо позначення: $x_{12}(t,s)=(1-s)x_1(t)+sx_2(t)$, $x'_{12}(t,s)=(1-s)x'_1(t)+$ $+sx'_2(t)$, $x''_{12}(t,s)=(1-s)x''_1(t)+sx''_2(t)$, G^* – транспонована матриця до матриці G, G^{-1} – обернена матриця до G. Символом (x,y) будемо позначати скалярний добуток векторів $x=(x_1,\dots,x_n)$ і $y=(y_1,\dots,y_n)$: $(x,y)=x_1y_1+\dots+x_ny_n$, тоді норма вектора x дорівнює $|x|=\sqrt{(x,x)}$.

Теорема 10. *Нехай вектор-функція $f(t,x,x',x'')$ така, що елементи якобіанів*

$$F(t,x,x',x'')=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad G(t,x,x',x'')=\frac{\partial f}{\partial x'}, \quad H(t,x,x',x'')=\frac{\partial f}{\partial x''}$$

задовольняють умову Каратеодорі на $I\times\mathbb{R}^{3n}$. Нехай

$$H_2(t)=\left(-\int_0^1 H\big(t,x_{12}(t,s),x'_{12}(t,s),x''_{12}(t,s)\big)\,ds\right)^{-1}.$$

Припустимо, що матриця $H_2(t)\big(4F-GG^*H_2^*(t)\big)$, де аргументами функцій F, G і G^* є t, $x_{12}(t,s)$, $x'_{12}(t,s)$, $x''_{12}(t,s)\big)$, – невід'ємно визначена майже для всіх $t\in I$ і будь-яких $x_1(t)$, $x_2(t)\in AC^1_n(I)$. Тоді задача (32), (33), так само, як і задача (32), (34), може мати не більше одного розв'язку.

Доведення. Припустимо, що існують два різних розв'язки x_1 і x_2 якої-небудь із задач (32), (33) або (32), (34). Згідно з лемою Адамара, їхня різниця $u(t)=x_2(t)-x_1(t)$ задовольняє на I рівняння

$$F_1(t)u+G_1(t)u'+H_1(t)u''=0, \tag{35}$$

де

$$F_1(t)=\int_0^1 F\,ds, \quad G_1(t)=\int_0^1 G\,ds, \quad H_1(t)=\int_0^1 H\,ds,$$

а аргумент в F, G і H дорівнює $\big(t,x_{12}(t,s),x'_{12}(t,s),x''_{12}(t,s)\big)$.

Рівняння (35) запишемо у вигляді

$$u''=F_2(t)u+G_2(t)u',$$

де

$$F_2(t)=\big(-H_1(t)\big)^{-1}F_1(t), \quad G_2(t)=\big(-H_1(t)\big)^{-1}G_1(t).$$

Оскільки

$$G_2^* = \big(H_2(t)G_1(t)\big)^* = G_1^*(t)H_2^*(t) = \int_0^1 G^*\,dsH_2^*(t),$$

то на підставі нерівності Коші-Буняковського для будь-якого сталого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ і майже для всіх $t \in I$ одержуємо

$$\big|G_2^*(t)v\big|^2 = \Big|\int_0^1 G^*\,dsH_2^*(t)v\Big|^2 \leqslant \int_0^1 \big|G^*H_2^*(t)v\big|^2\,ds.$$

Доведемо, що

$$\big(u(t), \big(4F_2(t) - G_2(t)G_2^*(t)\big)u(t)\big) \geqslant 0. \tag{36}$$

Справді,

$$\big(u(t), \big(4F_2(t) - G_2(t)G_2^*(t)\big)u(t)\big) = \big(u(t), 4F_2(t)u(t)\big) - \big|G_2^*(t)u(t)\big|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \big(u(t), 4F_2(t)u(t)\big) - \int_0^1 \big|G^*H_2^*(t)u(t)\big|^2\,ds = \big(u(t), 4H_2(t)\int_0^1 F\,dsu(t)\big) -$$

$$-\int_0^1 \big(H_2^*(t)u(t), GG^*H_2^*(t)u(t)\big)\,ds = \int_0^1 \big(u(t), H_2(t)\big(4F - GG^*H_2^*(t)\big)u(t)\big)\,ds \geqslant 0.$$

Розглянемо функцію $r(t) = \frac{1}{2}\big(u(t), u(t)\big)$. Тоді $r'(t) = \big(u(t), u'(t)\big)$,

$$r''(t) = \big(u(t), u''(t)\big) + \big|u'(t)\big|^2 = \big(F_2(t)u, u\big) + \big(G_2(t)u', u\big) + |u'|^2 =$$

$$= \big|u' + \frac{1}{2}G_2^*(t)u\big|^2 + \big(u, \big(F_2(t) - \frac{1}{4}G_2(t)G_2^*(t)\big)u\big) \geqslant$$

$$\geqslant \big(u, \big(F_2(t) - \frac{1}{4}G_2(t)G_2^*(t)\big)u\big) \geqslant 0.$$

Остання нерівність виконується на підставі (36). Оскільки $r''(t) \geqslant 0$, $t \in I$, то функція $r(t)$ не може мати максимуму всередині $[a, b]$ і для завершення доведення достатньо повторити міркування, викладені в [1, с.113], використовуючи крайові умови $u(a) = Au'(a)$, $u(b) = -Bu'(b)$, які задовольняє функція $u(t)$ у випадку задачі (32), (33), і крайові умови $u(a) = u(b) = 0$ у випадку задачі (32), (34).

Зауваження 10.1. Нехай у крайових умовах (33) A і B – невід'ємно визначені матриці, а матриця $H_2(t)\big(4F - GG^*H_2^*(t)\big)$ – додатно визначена майже для всіх $t \in I$ і будь-яких $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t) \in AC_n^1(I)$. Тоді задача (32), (33) не може мати двох розв'язків. Доведення цього факту цілком аналогічне доведенню теореми 10.

Зауваження 10.2. Якщо $H(t, x, x', x'') = -E$, де E – одинична матриця, то з теореми 10 випливає, як частковий випадок, теорема 11 праці [1, с.112].

1. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига, 1978.

2. *Клоков Ю.А.* Единственность решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка// Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т.8.– N 8. – С.1377-1385.

3. *Пак С.А.* Об априорной оценке решений краевых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т.3.– N 6. – С.890-897.

4. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.,1970.

Zhernovyi Yu.

ABOUT UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE TWO-POINT BOUNDARY PROBLEMS FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A NONLINEAR OCCURENCE OF THE HIGHER DERIVATIVE

Conditions of uniqueness of the solution of the two-point boundary problems for the system $h(t,x,y,x')=0$, $f(t,x,y,y')=0$, the equations $F(t,x'')=0$, $F(t,x,x',x'')=0$ and the system $f(t,x,x',x'')=0$ are obtained. The question about a priori estimates of the solutions of the boundary problems is examined for the equations of the second order.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.99