ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 84–95

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 84–95

УДК 517.95

Володимир Ільків

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НОРМАЛЬНИХ АНІЗОТРОПНИХ СИСТЕМ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В області D^p, яка є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і p-вимірного тора Ω_p, розглянемо нормальну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними і сталими коефіцієнтами

$$L\left(\partial/\partial t, D\right)u(t,x) \equiv \sum_{\substack{|\widehat{s}|\leqslant N\\ s_0\leqslant n}} A_{\widehat{s}}D^s\left(\partial/\partial t\right)^{s_0}u = 0, \tag{1}$$

де $A_{\widehat{s}}$ – квадратні матриці розміру m з комплексними елементами, $u = u(t,x) = \operatorname{col}\bigl(u_1(t,x),\dots,u_m(t,x)\bigr)$ – вектор розміру m; $x = (x_1,\dots,x_p)$, $N \geqslant n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, $\widehat{s} = (s_0,s) = (s_0,s_1,\dots,s_p)$, $|\widehat{s}| = s_0 + s_1 + \dots + s_p = s_0 + |s|$; $D^s = D_1^{s_1}\dots D_p^{s_p}$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$ $(j=\overline{1,p})$.

Максимальні порядки похідних за змінними x_j, що входять у систему, можуть бути довільними, не залежати один від одного та від n, тобто система анізотропна стосовно порядків похідних компонент u_j $(j=\overline{1,m})$ вектор-функції u і є загальною нормальною (розв'язаною щодо старших похідних за часом $\partial^n u_j/\partial t^n$) системою зі сталими коефіцієнтами.

Запишемо оператор $L(\lambda, D)$ у вигляді полінома за змінною λ, а саме:

$$L(\lambda,D) = L_0(D)\lambda^n + L_1(D)\lambda^{n-1} + \dots + L_{n-1}(D)\lambda + L_n(D), \tag{2}$$

де $L_j(D) = \sum\limits_{|s|\leqslant N-n+j} A_{n-j,s}D^s$ $(j=\overline{0,n})$. Оскільки система – нормальна, то $L_0(D) = I_m$, де I_m – одинична матриця.

Ставимо задачу знаходження розв'язку u системи (1), що задовольняє нелокальні крайові умови за часовою змінною t такого вигляду:

$$\nu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} - \mu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=T} = \varphi_j(x),\ j=\overline{0,n-1}, \tag{3}$$

де ν, μ – комплексні числа ($|\nu| \leqslant 1$, $|\mu| \leqslant 1$, $\nu\mu \neq 0$), $T > 0$, $\varphi_j(x)$ – задані вектор-функції розміру m.

Задачу (1), (3) для ізотропної ($N = n$) системи (1) розглядали в праці [1]. За допомогою метричного підходу [2] визначено умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в шкалах соболєвських періодичних за просторовою змінною x просторів $\mathbb{H}_q$ для всіх (за винятком деякої множини малої міри) векторів (ν,μ). Побудовано явний вигляд розв'язку.

Будемо вивчати розв'язність анізотропної ($N \geqslant n$) задачі (1), (3) у згаданих вище соболєвських просторах, тобто праві частини $\varphi_j(x)$ умов (3) та шукані розв'язки задачі (1), (3) розглядаємо у шкалі просторів $\mathbb{H}_q$ ($q \in \mathbb{R}$), вважаючи що $\mathbb{H}_q$ є поповненням множини тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \hat{\varphi}(k) e^{ikx}$ за нормою

$$||\varphi||_q^2 = \sum_{k \in Z^p} \widetilde{k}^{2q} |\hat{\varphi}(k)|^2,$$

де $k = (k_1, \ldots, k_p)$, $kx = (k_1 x_1 + \cdots + k_p x_p)$, $\widetilde{k}^2 = 1 + k_1^2 + \cdots + k_p^2$.

Введемо також псевдодиференціальні оператори (ПДО) $F(D)$, які породжені послідовністю комплексних чисел $F(k)$ за формулою

$$F(D)\varphi(x) = \sum_{k \in Z^p} F(k) \hat{\varphi}(k) e^{ikx},$$

де функція $\varphi(x) = \sum\limits_{k \in Z^p} \hat{\varphi}(k) e^{ikx}$. Очевидно, що кожна така функція $\varphi(x)$ ($\varphi(x) \in \mathbb{H}_q$) також породжує ПДО, а саме $\hat{\varphi}(D)$. У цьому випадку $\varphi(x) = \hat{\varphi}(D)\delta(x)$, де $\delta(x) = \sum\limits_{k \in Z^p} e^{ikx}$ – дельта-функція Дірака, і $\delta(x) \in \mathbb{H}_q$ при $q < -p/2$ [3].

Згідно з формулою (2) задача (1), (3) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною

$$\partial v(t,x)/\partial t = L(D) v(t,x), \tag{4}$$

$$\nu v(0,x) - \mu v(T,x) = \varphi(x), \tag{5}$$

де $v = \operatorname{col}\big(u, \partial u/\partial t, \ldots, \partial^{n-1} u/\partial t^{n-1}\big) = \operatorname{col}(v_0, v_1, \ldots, v_{nm-1})$, $\varphi(x) = \operatorname{col}\big(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)\big) = \operatorname{col}\big(\varphi^0(x), \varphi^1(x), \ldots, \varphi^{nm-1}(x)\big)$,

$$L(D) = \begin{pmatrix} 0 & I_{(n-1)m} & & \\ -L_n(D) & -L_{n-1}(D) & \ldots & -L_1(D) \end{pmatrix} = \big(L_{ij}(D)\big)_{i,j=\overline{1,nm}}.$$

Нехай

$$l_\varphi(\lambda, D) = \lambda^{n(D)} + l_{\varphi 1}(D) \lambda^{n(D)-1} + \cdots + l_{\varphi n(D)}(D) \; -$$

мінімальний многочлен (ПДО) вектора $\varphi(x)$ щодо матриці $L(D)$, тобто $l_\varphi(L(D), D)\varphi(x) = 0$, і $l_\varphi(\lambda, D) \equiv \prod\limits_{j=1}^{\gamma_\varphi(D)} \big(\lambda - \lambda_j(D)\big)^{\alpha_{\varphi j}(D)}$, де корені $\lambda_j(D)$ є також коренями (можливо більшої кратності) характеристичного многочлена $l(\lambda, D) \equiv \det\big(\lambda I_{nm} - L(D)\big)$ системи (4); отже,

$$l(\lambda, D) \equiv \lambda^{nm} + l_1(D)\lambda^{nm-1} + \cdots + l_{nm}(D) = \prod_{j=1}^{\gamma(D)} \big(\lambda - \lambda_j(D)\big)^{\alpha_j(D)}.$$

Нехай n_i – степінь многочлена $l_i(D) \equiv \sum_{|s| \leqslant n_i} a_{i,s} D^s$ щодо змінної D, n_{ij} – степінь елемента $L_{ij}(D)$ матриці $L(D)$. Вважаємо, що для $l_i(D) \equiv 0$ відповідне число $n_i = -\infty$, аналогічно для чисел n_{ij}. Позначимо через n_l зведений порядок системи (4) (матриці $L(D)$), а саме: $n_l = \max\limits_{n_i \geqslant 0} n_i/i \geqslant 0$; він характеризує зростання коренів $\lambda_j(k)$ характеристичного рівняння $l(\lambda, k) = 0$ при $\widetilde{k} \to \infty$, а саме $\lambda_j(k) = O(\widetilde{k}^{n_l})$.

Виберемо дійсні числа $d_1, \ldots, d_{nm-1}$ ($d_{nm} = 0$) так, щоб вираз $\max\limits_{n_{ij} \geqslant 0}(d_i - d_j + n_{ij})$ приймав мінімальне значення, яке позначимо через n_L. Якщо наборів $d_1, \ldots, d_{nm-1}$ таких чисел декілька, то вибираємо, наприклад, довільний з тих, у яких мінімальна сума $d_1^2 + \cdots + d_{nm-1}^2$.

Числа $n_L, d_1, \ldots, d_{nm-1}$ характеризують зростання елементів $L_{ij}(D)$ матриці $L(D)$, а саме $L_{ij}(k) = O(\widetilde{k}^{n_L - d_i + d_j})$ при $\widetilde{k} \to \infty$, тобто ПДО-матриця $ZL(D)Z^{-1}\widetilde{D}^{-n_L}$ є обмеженим оператором:

$$||ZL(D)Z^{-1}\widetilde{D}^{-n_L}|| \leqslant C_0, \tag{6}$$

де $Z = \operatorname{diag}(\widetilde{D}^{d_1}, \ldots, \widetilde{D}^{d_{nm}})$, $\widetilde{D}$ – ПДО, породжений послідовністю $\widetilde{k}$, $C_0 > 0$ – деяка константа, $||\cdot||$ – евклідова норма. З (6) випливає, що $n_l \leqslant n_L$. Для одного ($m = 1$) рівняння $n_l = n_L$ і $d_i = (n - i)n_l$ ($i = \overline{1, n}$).

Дослідимо задачу (4), (5). Необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (4), (5) є нерозв'язність у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$ алгебраїчного рівняння [1]

$$\det\left((\beta_1 + i\beta_2 k_0)I_{nm} - L(k)\right) = 0, \tag{7}$$

де $\beta_1 T = \ln(\nu/\mu)$, $\beta_2 T = 2\pi$, $i = \sqrt{-1}$. Ця умова означає, що число ν не належить точковому спектру оператора $\mu e^{L(D)T}$; його спектр є зліченною множиною з точками скупчення, розташування яких в комплексній площині може бути довільним.

Отже, для будь-якого числа ν із одиничного круга з вилученим точковим спектром оператора $\mu e^{L(D)T}$ задача (4), (5) має не більше одного розв'язку для всіх функцій $\varphi(x)$. Доведемо, що після вилучення точок спектра з деякими їхніми околами існує єдиний розв'язок задачі (4), (5), який має певну гладкість (належить простору з шкали просторів $\mathbb{H}_q$).

Теорема 1. *Для існування розв'язку задачі (4), (5) у шкалі просторів $\mathbb{H}_q$ необхідно, щоб для деяких сталих $K > 0$ і $L \in \mathbb{R}$ для всіх векторів $k \in Z^p$ виконувалась нерівність*

$$\left|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}\right| \geqslant K\widetilde{k}^L, \ j = \overline{1, \gamma(k)}. \tag{8}$$

Доведення. Нехай $\widetilde{L} \in \mathbb{R}$ – довільне число і умова (8) не виконується, тобто для деякого $L < \min(0, \widetilde{L})$ виконується обернена нерівність

$$\left|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}\right| < \frac{|\nu|}{2}\widetilde{k}^L < \frac{|\nu|}{2},$$

для деякого j ($1 \leqslant j \leqslant \gamma(k)$) і деякої безмежної послідовності $\widetilde{\mathbb{Z}}^p$ векторів $k \in Z^p$. Звідси випливає, що $\operatorname{Re}\lambda_j(k) \geqslant \ln|\nu/2\mu|/T$ і $e^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)t} \geqslant \widetilde{K} = \min(1, |\nu/2\mu|)$.

Якщо $E_j(k)$ – власний одиничний вектор матриці $L(k)$, який відповідає власному значенню $\lambda_j(k)$, то вектор-функція

$$\widetilde{v}(t, x) = \sum_{k \in \widetilde{\mathbb{Z}}^p} E_j(k) \frac{e^{\lambda_j(k)t + ikx}}{\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}}$$

є розв'язком системи (4) і

$$\widetilde{\varphi}(x) \equiv \nu\widetilde{v}(0, x) - \mu\widetilde{v}(T, x) = \sum_{k \in \widetilde{\mathbb{Z}}^p} E_j(k)e^{ikx}.$$

Компоненти вектора $\widetilde{\varphi}(x)$ є елементами простору $\mathbb{H}_q$ при довільному $q < -p/2$, однак

$$\sum_{\alpha=0}^{nm-1} \|\widetilde{v}_\alpha\|^2_{\mathbb{H}_{\widetilde{L}}} = \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^p} \widetilde{k}^{2\widetilde{L}} \frac{e^{\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)t}}{\left|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}\right|^2} \geqslant \left(\frac{2\widetilde{K}}{|\nu|}\right)^2 \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^p} \widetilde{k}^{2(\widetilde{L}-L)}.$$

Оскільки останній ряд розбігається, то для кожного $t \in [0,T]$ хоча б одна компонента $\widetilde{v}_\alpha \notin \mathbb{H}_{\widetilde{L}}$. Теорему доведено.

Побудуємо розв'язок задачі (4), (5) використовуючи такі позначення: $R_\Lambda(f(\lambda))$ – розділена різниця порядку $s-1$ $(s \geqslant 1)$ функції $f(\lambda)$ для набору комплексних чисел $\Lambda = \Big(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{\alpha_1},\ldots,\underbrace{\lambda_\gamma,\ldots,\lambda_\gamma}_{\alpha_\gamma}\Big)$ $(s = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\gamma)$, яку можна подати у вигляді

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \sum_{j=1}^{\gamma} \frac{1}{(\alpha_j-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\alpha_j-1}\Big(f(\lambda)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\gamma}(\lambda-\lambda_i)^{-\alpha_i}\Big)\Big|_{\lambda=\lambda_j} = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{(\alpha_1-1)!\ldots(\alpha_\gamma-1)!}\frac{\partial^{s-\gamma}}{\partial\lambda_1^{\alpha_1-1}\ldots\partial\lambda_\gamma^{\alpha_\gamma-1}}\Big(\sum_{j=1}^{\gamma} f(\lambda_j)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\gamma}(\lambda-\lambda_i)^{-1}\Big),$$

зокрема при $\gamma = s$

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \sum_{j=1}^{s} f(\lambda_j)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{-1},$$

і $R_\Lambda(f(\lambda)) = f^{(s-1)}(\lambda_1)/(s-1)!$ при $\gamma = 1$. Формула (9) правильна для функції $f(\lambda)$, аналітичної в точках $\lambda_1,\ldots,\lambda_\gamma$, а для функції $f(\lambda)$, яка аналітична в опуклій області, що містить точки $\lambda_1,\ldots,\lambda_\gamma$, справджується така інтегральна формула

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{\gamma-2}} f^{(s-1)}\Big(\sum_{i=1}^{\gamma} t_{i-1}(\lambda_i-\lambda_{i-1})\Big)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{\gamma}\frac{(t_{j-1}-t_j)^{\alpha_j-1}}{(\alpha_j-1)!}dt_1\ldots dt_{\gamma-1} = \prod_{l=1}^{\gamma}\frac{1}{(\alpha_l-1)!}\frac{\partial^{\alpha_l-1}}{\partial\lambda_l^{\alpha_l-1}} \tag{10}$$
$$\times\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{\gamma-2}} f^{(\gamma-1)}\Big(\sum_{i=1}^{\gamma} t_{i-1}(\lambda_i-\lambda_{i-1})\Big)dt_1\ldots dt_{\gamma-1},$$

де $t_0 = 1$, $\lambda_0 = t_\gamma = 0$. Еквівалентність формул (9) і (10) випливає з їхньої еквівалентності при $\gamma = s$ [5].

Розділена різниця $R_\Lambda(f(\lambda))$ для многочлена $f(\lambda)$ степеня $s-1$, згідно з формулою (10), дорівнює старшому коефіцієнтові цього многочлена, також, згідно з формулою (9), розділена різниця $R_\Lambda(f(\lambda)) = 0$ для функції $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1}\ldots(\lambda-\lambda_\gamma)^{\alpha_\gamma}g(\lambda)$, де $g(\lambda)$ – аналітична в точках $\lambda_1,\ldots,\lambda_\gamma$ функція.

Розділені різниці різних порядків пов'язані між собою формулою [5]

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \frac{R_{\Lambda_2}(f(\lambda)) - R_{\Lambda_1}(f(\lambda))}{\lambda_{j_1}-\lambda_{j_2}}, \quad \lambda_{j_1}\neq\lambda_{j_2}, \tag{11}$$

де $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, $\Lambda_2 = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{j_2-1}, \lambda_{j_2+1}, \ldots, \lambda_s)$, $\Lambda_1 = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{j_1-1}, \lambda_{j_1+1}, \ldots, \lambda_s)$. У лівій частині формули (11) – розділена різниця порядку $s-1$, а в правій – розділені різниці порядку $s-2$; набори комплексних чисел Λ_2 і Λ_1 утворені з набору Λ вилученням чисел λ_{j_2} і λ_{j_1} відповідно. Якщо в наборі Λ число $\overline{\lambda}$ трапляється $\overline{\alpha}$ разів, то формула (9) дає $(\overline{\alpha}-1)R_\Lambda(f(\lambda)) = \partial R_{\overline{\Lambda}}(f(\lambda))/\partial\overline{\lambda}$, де в наборі $\overline{\Lambda}$ число $\overline{\lambda}$ трапляється $\overline{\alpha}-1$ раз. Остання рівність і рівність (11) свідчать про те, що розділена різниця не залежить від впорядкування чисел λ_j в наборі Λ; ці рівності можна використати для побудови розділених різниць високих порядків.

Позначимо через $\Lambda(D) = \Big(\underbrace{\lambda_1(D), \ldots, \lambda_1(D)}_{\alpha_{\varphi 1}(D)}, \ldots, \underbrace{\lambda_{\gamma_\varphi(D)}, \ldots, \lambda_{\gamma_\varphi(D)}}_{\alpha_{\varphi\gamma_\varphi(D)}(D)}\Big)$ набір $n(D)$ коренів многочлена $l_\varphi(\lambda, D)$.

Теорема 2. *Нехай виконується умова єдиності, тобто алгебраїчне рівняння (7) не має цілочислових розв'язків; тоді існує єдиний формальний розв'язок задачі (4), (5), що має такий вигляд*

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)L(D), D\Big)\, d\tau R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x) \\ &\equiv \sum_{k\in Z^p}\int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)L(k), k\Big)\, d\tau R_{\Lambda(k)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\widehat{\varphi}(k)e^{ikx}, \end{aligned} \qquad (12)$$

де $\widehat{\varphi}(k)$ – коефіцієнти Фур'є вектор-функції $\varphi(x)$.

Доведення. Очевидно, що формулу (12) можна подати у вигляді розділеної різниці

$$v(t,x) = R_{\Lambda(D)}\Big(\int_0^1 l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D)\, d\tau \frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x),$$

а, отже,

$$\nu v(0,x) - \mu v(T,x) = R_{\Lambda(D)}\Big(\int_0^1 l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D)\, d\tau\Big)\varphi(x).$$

Оскільки $l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D) = \sum\limits_{j=0}^{n(D)-1} l_\varphi^{(j+1)}(L(D), D)(\lambda - L(D))^j\tau^j/j!$, то $\int_0^1 l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D)\, d\tau = \sum\limits_{j=0}^{n(D)-1} l_\varphi^{(j+1)}(L(D), D)(\lambda - L(D))^j/(j+1)!$ є многочленом за змінною λ степеня $n(D)-1$ з одиничним старшим коефіцієнтом, а, отже, розділена різниця дорівнює одиничному ПДО, що означає виконання умови (5).

Підставимо (12) в систему (4), тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} - L(D)v(t,x) &= \Big(\frac{\partial}{\partial t} - L(D)\Big)\sum_{j=0}^{n(D)-1}\frac{l_\varphi^{(j+1)}(L(D),D)}{(j+1)!}\Big(\frac{\partial}{\partial t} - L(D)\Big)^j \\ &\times R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x) = \Big[l_\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big) - l_\varphi(L(D), D)\Big]R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x) \\ &= R_{\Lambda(D)}\Big(l_\varphi(\lambda, D)\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x) - R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)l_\varphi(L(D), D)\varphi(x). \end{aligned}$$

Оскільки $\Lambda(D)$ – набір коренів многочлена $l_\varphi(\lambda, D)$, то $R_{\Lambda(D)}\big(l_\varphi(\lambda, D)e^{\lambda t}/(\nu - \mu e^{\lambda T})\big) = 0$, а також $l_\varphi(L(D), D)\varphi(x) = 0$ за означенням мінімального многочлена вектора $\varphi(x)$, тобто $\partial v/\partial t - L(D)v = 0$. Теорема доведена.

Доведемо належність одержаного розв'язку (12) до шкали просторів $\mathbb{H}_q$. Для цього оцінимо норму вектор-функції (12). Вона містить малі знаменники $\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}$ та $\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)$ $(\alpha \neq \beta)$, які можуть бути нескінченно малими. При цьому $\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)$ завжди відмінні від нуля, а $\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}$ можуть перетворюватися в нуль, якщо не виконуються умови єдиності. Отже, маємо розв'язати проблему малих знаменників [2, 6], причому для знаменників $\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}$ насправді треба розв'язувати проблему нульових знаменників. Для оцінки нульових знаменників використовуємо метричний підхід [2, 7], а оцінювання малих знаменників $\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)$ виконуємо разом із відповідними чисельниками розділених різниць (9).

Попередньо проаналізуємо властивості наборів $\Lambda(k)$ коренів мінімального многочлена $l_\varphi(\lambda, k)$. Позначимо через $\operatorname{diam}\Lambda$ максимальну відстань між елементами множини Λ, тобто $\operatorname{diam}\Lambda = \max\limits_{a,b\in\Lambda}|a-b|$.

Нехай $\lambda_j(\widehat{\xi}) = \lambda_j(\xi, \xi_{p+1})$, де $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$, $\xi_{p+1} \in \mathbb{R}$, $\xi_{p+1} \geqslant 0$, – корені рівняння

$$l(\lambda, \widehat{\xi}) = \lambda^{nm} + \sum_{j=1}^{nm} \sum_{|s|\leqslant n_j} a_{js}\xi^s \xi_{p+1}^{jn_l - |s|}\lambda^{nm-j} = \prod_{j=1}^{\gamma(\widehat{\xi})} (\lambda - \lambda_j(\widehat{\xi}))^{\alpha_j(\widehat{\xi})} = 0. \tag{13}$$

Очевидно, що $\lambda_j(k) = \widetilde{k}^{n_l}\lambda_j(k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})$ і кількість та кратність коренів $\lambda_j(k)$ і $\lambda_j(k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})$ збігаються $(j = \overline{1, \gamma(k)})$.Виберемо число K_1 таким, щоб виконувались нерівності $n(k) \leqslant b$, $\min\limits_{j=\overline{1,\gamma(k)}} \alpha_j(k) \geqslant b_1$, $\max\limits_{j=\overline{1,\gamma(k)}} \alpha_j(k) \leqslant b_2$ при $\widetilde{k} > K_1$, де $b_1 = \underline{\lim}_{\widetilde{k}\to\infty} \min\limits_{j=\overline{1,\gamma(k)}} \alpha_j(k)$, $b_2 = \overline{\lim}_{\widetilde{k}\to\infty} \max\limits_{j=\overline{1,\gamma(k)}} \alpha_j(k)$, $b = \overline{\lim}_{\widetilde{k}\to\infty} n(k)$.

Лема 1. *Нехай функція* $\operatorname{Res}(j;\widehat{\xi}) = \prod\limits_{s=1}^{\gamma(\widehat{\xi})} \big(d^j l(\lambda_s(\widehat{\xi}), \widehat{\xi})/d\lambda^j\big)^{\alpha_s(\widehat{\xi})}$ *позначає результант поліномів (за змінною λ) $l(\lambda, \widehat{\xi})$ і $d^j l(\lambda, \widehat{\xi})/d\lambda^j$ $(j = \overline{1, nm})$ і нехай існують сталі $K_2 > K_1$, $C_1 > 0$ такі, що*

$$\big|\operatorname{Res}(N_j; k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})\big| \geqslant C_1\widetilde{k}^{\beta_j}, \ \forall \widetilde{k} > K_2, \ j = \overline{1, h}, \tag{14}$$

де $b_2 < N_1 < N_2 < \dots < N_h < b$, $-pb_1/2 - n_l \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_h \leqslant 0$ $(1 \leqslant h \leqslant b - b_1)$. Тоді для кожного $\widetilde{k} > K_2$ правильне твердження: у всякому наборі з $N_j + 1$-го кореня (враховуючи кратність) многочлена $l(\lambda, k)$ існує пара коренів $\lambda^*(k)$ і $\lambda^{**}(k)$, яка задовольняє нерівність

$$|\lambda^*(k) - \lambda^{**}(k)| \geqslant C_2\widetilde{k}^{n_l + \beta_j/b_1}, j = \overline{1, h}, \tag{15}$$

де C_2 – константа, яка не залежить від k, $j = \overline{1, h}$.

Доведення. Оскільки корені $\lambda_j(\widehat{\xi})$ рівняння (13) обмежені зверху константою, що не залежить від $\widehat{\xi}$, то з формули

$$\frac{d^j l}{d\lambda^j}(\lambda_s(\widehat{\xi}), \widehat{\xi}) = \sum \prod_{i=1, i\neq s}^{\gamma(\widehat{\xi})} \big(\lambda_s(\widehat{\xi}) - \lambda_i(\widehat{\xi})\big)^{\alpha_i(\widehat{\xi}) - p_i},$$

де сума поширюється на набори чисел $\left(p_1,\ldots,p_{s-1},p_{s+1},\ldots,p_{\gamma(\widehat{\xi})}\right)$ для яких $p_\sigma \leqslant \alpha_\sigma(\widehat{\xi})$ та $\sum\limits_{\sigma=1,\sigma\neq s}^{\gamma(\widehat{\xi})} p_\sigma = j-\alpha_s(\widehat{\xi})$, одержуємо, що для кожного s $(1\leqslant s\leqslant \gamma(\widehat{\xi}))$ існує хоча б один набір чисел $p_\sigma = p_\sigma^*$ $(\sigma\neq s)$, для якого виконуються нерівності

$$|\mathrm{Res}(N_j;\widehat{\xi})| \leqslant C_3\left|\frac{d^{N_j}l}{d\lambda^{N_j}}\left(\lambda_s(\widehat{\xi}),\widehat{\xi}\right)\right|^{\alpha_s(\widehat{\xi})} \leqslant \prod_{i=1,i\neq s}^{\gamma(\widehat{\xi})}\left|\lambda_s(\widehat{\xi})-\lambda_i(\widehat{\xi})\right|^{(\alpha_i(\widehat{\xi})-p_i^*)\alpha_s(\widehat{\xi})}.$$

Отже, з нерівності (14) для кожного $s=\overline{1,\gamma(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})}$ при $\alpha_i(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})>p_i^*$, $i\neq s$, $\widetilde{k}>K_2$, маємо $|\lambda_s(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})-\lambda_i(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})|\geqslant C_1\widetilde{k}^{\beta_j/b_1}$. Оскільки $\sum\limits_{i\neq s}\big(\alpha_i(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})$ $-p_i^*\big)=\gamma(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})-N_j$ і $\lambda_s(k)=\widetilde{k}^{n_l}\lambda_s(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})$, то тільки у наборі з N_j коренів кожна пара може задовольняти нерівність, протилежну до (15). Лема доведена.

Зафіксуємо числа ε і r, для яких $0<\sqrt{\varepsilon}<\ln 2/(2\kappa T)$, $2r+p<0$, де $\kappa\leqslant \left(4T\sqrt{2nm\sum_{k\in Z^p}\widetilde{k}^r}\right)^{-1}$; позначимо через B одиничний круг у комплексній площині параметра ν і нехай при $|\nu_j(k)|<2$, де $\nu_j(k)=\mu e^{\lambda_j(k)T}$, множина $B_j(k)$ $(j=\overline{1,\gamma(k)})$ позначає область

$$\left\{z\in B\,:\,e^{-\kappa_1 T}\leqslant\left|\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leqslant e^{\kappa_1 T},\left|\arg\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leqslant\kappa_1 T,\ \kappa_1=\sqrt{\varepsilon}\kappa\widetilde{k}^r\right\}.$$

Ця область – частина кільця – має міру $\mathrm{mes}B_j(k)=2\kappa_1 T|\nu_j(k)|^2 sh(2\kappa_1 T)$. Згідно з теоремою про середнє маємо $\mathrm{mes}B_j(k)\leqslant 16\kappa_1^2T^2e^{2\kappa_1 T}\leqslant 32\kappa_1^2T^2$. Міра множини $B_\varepsilon=\bigcup\limits_{k\in Z^p}\bigcup\limits_{|\nu_j(k)|<2}B_j(k)$ не перевищує $32T^2nm\varepsilon\kappa^2\sum\limits_{k\in Z^p}\widetilde{k}^{2r}\leqslant\varepsilon$. Через $B_{j,1}(k)$ $(B_{j,1}(k)\subset B_j(k))$ позначимо область

$$\left\{z\in B_j(k)\,:\,e^{-\kappa_1 T/2}\leqslant\left|\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leqslant e^{\kappa_1 T/2},\left|\arg\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leqslant\frac{\kappa_1 T}{2}\right\},$$

тоді відстань кожного числа $z_1\in B_{j,1}(k)$ до будь-якого числа $z_2\notin B_j(k)$ оцінюється знизу величиною

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|&\geqslant\min\left\{|\nu_j(k)|\big(e^{-\kappa_1T/2}-e^{-\kappa_1T}\big),|\nu_j(k)|e^{-\kappa_1T/2}\sin(-\kappa_1T/2)\right\}\\&\geqslant|\nu_j(k)|\min\left\{\frac{\kappa_1T}{2},\frac{\kappa_1T}{\pi}\right\}=|\nu_j(k)|\frac{\kappa_1T}{\pi}.\end{aligned}\tag{16}$$

Наступна лема визначає оцінки знизу для виразів, що містять нульові знаменники $\nu-\mu e^{\lambda_j(k)T}$.

Лема 2. *Нехай $\nu\in B\setminus B_\varepsilon$, $\mu\in B$ і $\overline{\lambda}\in B_{j,2}(k)$, де $B_{j,2}(k)$ – квадрат з центром $\lambda_j(k)$ у комплексній площині змінної λ зі сторонами довжини κ_1 паралельними до осей координат, тоді функції*

$$\rho_s(\lambda,t)\equiv\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left(\frac{e^{\lambda t}}{\nu-\mu e^{\lambda T}}\right)$$

є аналітичними в області $B_{j,2}(k)$ і

$$|\rho_s(\overline{\lambda},t)|\leqslant e^{s(T+1)}\left(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{s+1},\quad s=0,1,2,\ldots,\tag{17}$$

де $\theta = 3\pi/(\kappa T \min(|\nu|, |\mu|)\widetilde{k}^r)$, $t \in [0, T]$.

Доведення. Розглянемо два можливі випадки: $|\nu_j(k)| < 2$ і $|\nu_j(k)| \geqslant 2$. У першому випадку $\nu \notin B_j(k)$ і функція $\rho_0(\lambda, t)$ (а, отже, і всі функції $\rho_s(\lambda, t)$) є аналітичними в області $B_{j,2}(k)$.

Визначимо оцінку (17) при $s = 0$, тобто оцінку

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \theta/\sqrt{\varepsilon}. \tag{18}$$

Нехай $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda} \leqslant \ln|\nu/2\mu|/T$, тоді $|\mu e^{\overline{\lambda}T}| \leqslant |\nu|/2$, $|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant |\nu|/2$ і $|e^{\overline{\lambda}t}| \leqslant e^{t\ln|\nu/2\mu|/T} = \max(1, |\nu|/|2\mu|)$. Звідси одержуємо, що

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \max\Big(\frac{2}{|\nu|}, \frac{1}{|\mu|}\Big). \tag{19}$$

Нехай $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda} \geqslant \ln|2/\mu|/T$, тоді $|\mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant 2$, $|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant |\mu e^{\overline{\lambda}T}|/2$ і

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \frac{2}{|\mu|} e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}(t-T)} \leqslant \frac{2}{|\mu|}. \tag{20}$$

Оскільки $\mu e^{\overline{\lambda}T} \in B_{j,1}(k)$ і $\nu \notin B_j(k)$, то з нерівності (16) випливає, що

$$|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant |\nu_j(k)| \frac{\kappa_1 T}{\pi} \geqslant \frac{\kappa_1 T|\mu|}{\pi} e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}T - \kappa_1 T/2} > \frac{\kappa_1 T|\mu|}{2^{1/4}\pi} e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}T}.$$

Нехай $\ln|\nu/2\mu|/T < \mathrm{Re}\,\overline{\lambda} < \ln|2/\mu|/T$, тоді

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \frac{2^{1/4}\pi e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}t}}{\kappa_1 T|\mu| e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}T}} = \frac{2^{1/4}\pi}{\kappa_1 T|\mu| e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}(T-t)}} < \frac{2^{1/4}\pi}{\kappa_1 T|\mu|}\Big(\frac{2|\mu|}{|\nu|}\Big)^{(T-t)/T}$$

або

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \frac{2^{1/4}\pi}{\kappa_1 T} \max\Big(\frac{2}{|\nu|}, \frac{1}{|\mu|}\Big). \tag{21}$$

У другому випадку $|\mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant |\nu_j(k)| e^{-\kappa_1 T/2} \geqslant 2^{3/4} > 3/2$ або $|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| > |\mu e^{\overline{\lambda}T}|/3$ і $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda} > \ln(3/2)/T$, тобто $\rho_0(\overline{\lambda}, t)$ – аналітична в області $B_{j,2}(k)$ і

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \frac{3}{|\mu|} e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}(t-T)} \leqslant \frac{3}{|\mu|}. \tag{22}$$

На підставі нерівностей (19) – (22) одержуємо оцінку (18).

Далі використовуємо метод математичної індукції за s. Диференціюючи тотожність $(\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T})\rho_0(\overline{\lambda}, t) \equiv e^{\overline{\lambda}t}$, отримуємо тотожність

$$\frac{t^s}{s!} e^{\overline{\lambda}t} = (\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T})\rho_s(\overline{\lambda}, t) - \mu e^{\overline{\lambda}T} \sum_{l=1}^{s} \frac{T^l}{l!} \rho_{s-l}(\overline{\lambda}, t).$$

Розділимо її на $\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}$ і визначимо $\rho_s(\overline{\lambda}, t)$ через $\rho_0(\overline{\lambda}, t), \rho_1(\overline{\lambda}, t), \ldots, \rho_{s-1}(\overline{\lambda}, t)$:

$$\rho_s(\overline{\lambda}, t) = \frac{t^s}{s!}\rho_0(\overline{\lambda}, t) + \mu\rho_0(\overline{\lambda}, T) \sum_{l=1}^{s} \frac{T^l}{l!} \rho_{s-l}(\overline{\lambda}, t).$$

Використовуючи (18), припускаючи виконання оцінки (17) для $\rho_0(\overline{\lambda}, t), \rho_1(\overline{\lambda}, t), \ldots, \rho_{s-1}(\overline{\lambda}, t)$ і враховуючи, що

$$|\rho_l(\overline{\lambda}, t)| \leqslant e^{l(T+1)} \Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{(l+1)} \leqslant e^{(s-1)(T+1)} \Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s},\ l = \overline{0, s-1},\ t \in [0, T],$$

маємо

$$|\rho_s(\overline{\lambda},t)| \leqslant \Big(\frac{T^s}{s!} + |\mu| \sum_{l=1}^{s} \frac{T^l}{l!}\Big) e^{(s-1)(T+1)} \Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1} \leqslant e^{s(T+1)} \Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1},$$

що і треба було довести.

Оцінимо тепер розділені різниці різних порядків для наборів коренів многочлена $l_\varphi(\lambda,k)$.

Лема 3. *Нехай* $\overline{\Lambda}(k)$ *деякий s-елементний набір коренів многочлена* $l_\varphi(\lambda,k)$, *тоді*

$$\Big\| \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\overline{\Lambda}(k)}(\rho_0(\lambda,t)) \Big\| \leqslant C_4 \widetilde{k}^{n_L(n(k)-1)-sr}, \quad (23)$$

де $Z_k = \operatorname{diag}\big(\widetilde{k}^{d_1},\dots,\widetilde{k}^{d_{nm}}\big)$, C_4 *– не залежить від* k.

Доведення. Якщо $\operatorname{diam}\overline{\Lambda}(k) = |\overline{\lambda}_1(k) - \overline{\lambda}_2(k)| \geqslant \kappa_1$, то згідно з рівностями (11) функцію

$$\overline{U}(k) \equiv \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\overline{\Lambda}(k)}(\rho_0(\lambda,t))$$

можна подати у вигляді $\overline{U}(k) = (\overline{\lambda}_1(k) - \overline{\lambda}_2(k))^{-1}(\overline{U}_2(k) - \overline{U}_1(k))$, де

$$\overline{U}_i(k) = \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\overline{\Lambda}_i(k)}(\rho_0(\lambda,t)),$$

$\overline{\Lambda}_i(k)$ – набір одержаний із $\overline{\Lambda}(k)$ вилученням кореня $\lambda_i(k)$ або зменшенням його кратності на одиницю. Отже, $||\overline{U}(k)|| \leqslant ||\overline{U}_1(k)||/\kappa_1 + ||\overline{U}_2(k)||/\kappa_1$. Продовжуючи вилучати корені з наборів $\overline{\Lambda}_i(k)$ таких, що $\operatorname{diam}\overline{\Lambda}_i(k) \geqslant \kappa_1$, одержимо таку оцінку

$$||\overline{U}(k)|| \leqslant \sum_{s^*} \kappa_1^{-\eta_{s^*}} ||\overline{U}_{1,s^*}(k)||, \quad (24)$$

де $\eta_{s^*} \in \mathbb{N}$, індекси i та s^* пробігають скінченні підмножини множини натуральних чисел,

$$\overline{U}_{i,s^*}(k) = \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\rho_0(\lambda,t)),$$

$\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)$ – має $s - \eta_{s^*}$ елементів (з набору $\overline{\Lambda}(k)$) і $\operatorname{diam}\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k) < \kappa_1$. Очевидно, що вираз $\overline{U}_{i,s^*}(k)$ можна переписати у вигляді

$$\overline{U}_{i,s^*}(k) = \int_0^1 \sum_{\chi=1}^{n(k)} \frac{\tau^{\chi-1}}{(\chi-1)!} l_\varphi^{(\chi)}((1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k) d\tau R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))$$

і він допускає оцінку

$$||\overline{U}_{i,s^*}(k)|| \leqslant C_5 \sum_{\chi=1}^{n(k)} \widetilde{k}^{n_L(n(k)-\chi)} |R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))|. \quad (25)$$

Використовуючи формулу (10), знайдемо оцінку зверху для розділеної різниці $|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))|$, а саме:

$$|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))| \leqslant C_6\Big|\frac{\partial^{s-\eta_{s^*}-1}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))}{\partial\lambda^{s-\eta_{s^*}-1}}\Big|_{\lambda=\overline{\lambda}_{s^*}(k)} \leqslant$$
$$\leqslant C_7 \sum_{g=0}^{\max(s-\eta_{s^*},\chi)-1} \frac{1}{g!}\Big|\frac{\partial^g(\lambda^{\chi-1})}{\partial\lambda^g}\Big|_{\lambda=\overline{\lambda}_{s^*}(k)}\big|\rho_{s-\eta_{s^*}-g-1}(\overline{\lambda}_{s^*}(k),t)\big|,$$

де $\overline{\lambda}_{s^*}(k) \in B_{j,2}(k)$ при деякому j $(1 \leqslant j \leqslant n(k))$, або, використовуючи нерівність (17),

$$|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))| \leqslant C_8 \sum_{g=0}^{\max(s-\eta_{s^*},\chi)-1} \widetilde{k}^{(\chi-g-1)n_l}\widetilde{k}^{-(s-\eta_{s^*}-g)r} \leqslant$$
$$\leqslant C_9\widetilde{k}^{(\chi-1)n_l-(s-\eta_{s^*})r}.$$

Підставивши останню оцінку в (25), маємо

$$||\overline{U}_{i,s^*}(k)|| \leqslant C_{10}\widetilde{k}^{(n(k)-1)n_L-(s-\eta_{s^*})r},$$

тоді з оцінки (24) випливає $||\overline{U}(k)|| \leqslant C_4\widetilde{k}^{n_L(n(k)-1)-sr}$, що і треба було довести.

Доведемо тепер теорему існування розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 3. *Нехай* $r < -p/2$, $\kappa \leqslant \left(4T\sqrt{2nm\sum_{k\in Z^p}\widetilde{k}^r}\right)^{-1}$, $2\kappa T\sqrt{\varepsilon} < \ln 2$, $\varepsilon > 0$, *тоді, якщо* $\nu \in B \setminus B_\varepsilon$ *і* $\varphi^j(x) \in \mathbb{H}_{q_j}$, *то існує єдиний розв'язок* u *задачі (1), (2) такий, що у разі виконання умов леми 1 правильні включення* $\partial^j u_s/\partial t^j \in \mathbb{H}_{q_{sj}}$ $(q_{sj} = d_{jm+s} - d)$ *для кожного* $t \in [0,T]$, *де* $d = (b-1)n_L + (b-N_1)n_l + (b-N_h)b_h/b_1 + \sum_{g=1}^{h-1}(N_{g+1}-N_g)\beta_g/b_1 - N_1 r + \max_{s=\overline{1,nm}}(d_s - q_{s-1})$.

Доведення. Оскільки $\nu \in B \setminus B_\varepsilon$, то формальний розв'язок задачі (1), (2) існує. З формули (12) одержимо

$$Zv(t,x) = \sum_{k\in Z^p}\int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k)Z_k^{-1}, k\Big)d\tau R_{\Lambda(k)}(\rho_0(\lambda,t))\times$$
$$\times Z_k\widehat{\varphi}(k)e^{ikx}. \qquad (26)$$

Елементи набору $\Lambda(k)$ є коренями многочлена $l_\varphi(\lambda,k)$, а отже, і многочлена $l(\lambda,k)$. Отже, згідно з лемою 1, при $\widetilde{k} > K_2$ кожен набір з більше ніж N_h коренів містить хоча б одну пару коренів, відстань між якими не менша ніж $C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_h/b_1}$, кожен набір з більш ніж N_{h-1} коренів містить хоча б одну пару коренів, відстань між якими не менша ніж $C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_{h-1}/b_1}$, і так далі, кожен набір з більш ніж N_1 коренів містить хоча б одну пару коренів, відстань між якими не менша ніж

$C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_l/b_1}$. Використовуючи (11), одержимо нерівність

$$||v_j(t,x)||_{d_{j+1}} \leqslant C_{11} \sum_{\widetilde{k}\leqslant K_2} \Big(\sum_{i=0}^{nm-1} |\widehat{\varphi}^i(k)|^2 \widetilde{k}^{2d_{i+1}} \Big)^{1/2} + C_{12} \sum_{\widetilde{k}>K_2} \widetilde{k}^{(b-N_h)b_h/b_1} \times$$

$$\times \widetilde{k}^{(b-N_1)n_l + \sum\limits_{g=1}^{h-1}(N_{g+1}-N_g)\beta_g/b_1} \sum_j \Big\| \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau \times$$

$$\times R_{\Lambda_j(k)}(\rho_0(\lambda,t)) \Big\| \Big(\sum_{i=0}^{nm-1} |\widehat{\varphi}^i(k)|^2 \widetilde{k}^{2d_{i+1}} \Big)^{1/2},$$

де розділені різниці $R_{\Lambda_j(k)}(\rho_0(\lambda,t))$ мають порядок, не вищий ніж N_1-1, і їхня кількість (для кожного $\widetilde{k} > K_2$) не більша ніж 2^{nm}. Тоді за лемою 3

$$\Big\| \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\Lambda_j(k)}(\rho_0(\lambda,t)) \Big\| \leqslant C_4 \widetilde{k}^{n_L(b-1)-N_1 r},$$

тобто

$$||v_j(t,x)||_{d_{j+1}} \leqslant C_{13} \sum_{k\in Z^p} \widetilde{k}^d \Big(\sum_{i=0}^{nm-1} |\widehat{\varphi}^i(k)|^2 \widetilde{k}^{2d_{i+1}} \Big)^{1/2}.$$

З станньої оцінки випливає нерівність

$$\Big\| \frac{\partial^j u_s}{\partial t^j} \Big\|_{q_s j} \leqslant C_{14} \sum_{i=0}^{nm-1} ||\varphi^i||_{q_i}$$

і доведення теореми.

---

1. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними// Укр. мат. журн. – 1996. – Т.48. – N2. – С.184-194.
2. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.
3. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М., 1988.
5. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М., 1965.
6. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М., 1978.
7. *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами// Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т.13. – N4. – С.637-645.

Il'kiv V.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NORMAL ANIZOTROPIC SYSTEMS OF PARTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

We consider time nonlocal two-point boundary value problem for general partial systems with constant coefficients in cartesian product of time interval and space multidimensional torus. This system is space derivatives anisotropic and time derivatives normal.

Existence and uniqueness conditions for solution of this problem in Sobolev spaces scale of space periodic functions are investigated. We construct this solution in the form of the hight order divided difference. The estimates for small denominators which appear by using the metrical theorie methods of diophantine approximations are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.99