ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 102–113 Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 102–113

УДК 517.95

Марія Колінько, Сергій Лавренюк

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Нехай Ω – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T < \infty$; $S_T = \partial\Omega \times (-\infty, T)$. Розглянемо в Q_T систему рівнянь

$$\mathcal{A}(u) \equiv u_t + \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} H_\alpha(x,t) D^\alpha u -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) u_{x_j t})_{x_i} + \mathcal{B}(u) + G(x,t)u = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t), \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \ldots, l-1, \qquad (2)$$

де

$$\mathcal{B}(u) = -\sum_{i=1}^{n} (C_i(x)\theta_i)_{x_i},$$

$l > 1$, $A_{\alpha\beta}$, B_{ij}, H_α, G – квадратні матриці розміру $N \times N$; $C_i(x) = \operatorname{diag}\{c_1^i(x), \ldots, c_N^i(x)\}$, $i = 1, \ldots, n$; $\theta_i = \operatorname{colon}(|u_{1,x_i}|^{p-2} u_{1,x_i}, \ldots, |u_{N,x_i}|^{p-2} u_{N,x_i})$, $i = 1, \ldots, n$; $p > 2$; $u = \operatorname{colon}(u_1, \ldots, u_N)$; $F_\alpha = \operatorname{colon}(f_{1\alpha}, \ldots, f_{N\alpha})$, $|\alpha| \leqslant 1$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n;$$

ν – зовнішня нормаль до S_T. Мета праці – знайти умови існування розв'язку задачі Фур'є (задачі без початкових умов) (1), (2). Єдиність розв'язку цієї задачі доведено в праці авторів [1]. Зауважимо, що задачу Фур'є для лінійних параболічних рівнянь і систем досліджували раніше багато авторів [2 – 5]. У цих працях виділено клас єдиності та існування розв'язків задачі Фур'є у різних функціональних просторах. Зокрема, для єдиності розв'язку треба, щоб при $t \to -\infty$ розв'язок зростав не швидше, ніж $\exp(-at)$, причому стала a залежить від даних задачі. Для нелінійних параболічних рівнянь у працях [6, 7] одержано умови існування й єдиності розв'язку задачі Фур'є незалежно від поведінки при $t \to -\infty$. У працях [8 – 11] вивчено задачі Фур'є для деяких псевдопараболічних рівнянь і систем, а також псевдопараболічних варіаційних нерівностей.

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови (A), (B), (C), (G), якщо:

(A): $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l$;

$$\int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta w, D^\alpha w)dx \geqslant a_0 \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w|^2 dx,$$

$a_0 > 0, \forall w \in (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N$;

(B): $B_{ij}(x,t), B_{ijt}(x,t) \in L^\infty(Q_T)$; $B_{ij}(x,t) = B_{ji}(x,t)$; $B_{ij}(x,t) = B^*_{ij}(x,t)$, $i,j = 1,\dots,n$; майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

$$\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)\xi_i, \xi_j) \geqslant b_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad b_0 > 0,$$

для всіх $\xi_i \in \mathbb{R}^N$ і майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

(C): $C_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$; $c^i_k(x) \geqslant c_0 > 0$, майже для всіх $x \in \Omega; j = 1,\dots,n; k = 1,\dots,N$;

(G): $G \in L^\infty(Q_T)$; $(G(x,t)\xi,\xi) \geqslant g_0(t)|\xi|^2$, $g_0 \in L^\infty(-\infty,T)$, для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ і майже для всіх $(x,t) \in Q_T$.

Тут через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^N$. Позначимо через V рефлексивний банахів простір

$$V = (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N.$$

Зауважимо, що у просторі $(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N$ можна ввести еквівалентну норму

$$\|u\|^{(1)}_{(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N} = \left(\int\limits_\Omega |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}; \quad |u_x|^2 = \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2.$$

Введемо у просторі V норму за формулою

$$\|u\|_V = \|u\|_{(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N} + \|u\|^{(1)}_{(\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N}.$$

Очевидно, виконуються неперервні вкладення

$$V \subset (L^2(\Omega))^N \subset V^*, \text{ де } \quad V^* = (H^{-l}(\Omega))^N + (W^{-1,q}(\Omega))^N, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Крім того, надалі будуть використані нерівності Фрідріхса ([12], ст. 44):

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2 dx \leqslant \gamma_{l,j} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2 dx,$$

$j = 0,\dots,l$, правильні для будь-яких $v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$, де сталі $\gamma_{l,j}$ залежать від Ω, l, n. Введемо позначення:

$$h_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} \|H_\alpha(x,\tau)\|^2; \quad h_1 = \inf_{(-\infty,T)} h_0(t);$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad g_0(t) \geqslant 0, \\ g_0(t), & \text{якщо} \quad g_0(t) < 0. \end{cases} \qquad g_2 = \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} g_1(\tau).$$

Означення. *Функцію $u(x,t)$, яка задовольняє включення*

$$u \in L^2_{\rm loc}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N) \cap L^p_{\rm loc}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N),$$
$$u_t \in L^2_{\rm loc}((-\infty,T); (\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$$

і рівність

$$\int\limits_{Q_T} \Bigg[(u_t, v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)u_{x_i t}, v_{x_j}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^n (C_i(x)\theta_i, v_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + (G(x,t)u, v)\Bigg] dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v) dxdt$$

для довільної функції $v \in (C_0^\infty(Q_T))^N$, називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1), (2).

Теорема. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови (A), (B), (C), (G) і, крім того, $l > 1$; $\partial\Omega \in C^l$; $H_\alpha \in L^\infty(Q_T)$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$; $F_\alpha \in L^\infty_{\rm loc}((-\infty;T]; (L^2(\Omega))^N)$, $|\alpha| \leqslant 1$. Тоді існує узагальнений розв'язок $u(x,t)$ задачі (1), (2), причому $u \in L^\infty_{\rm loc}((-\infty;T]; V)$, $u_t \in L^2_{\rm loc}((-\infty;T]; (\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$.*

Доведення. Розглянемо послідовність задач

$$\mathcal{A}(u) = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha^{(k)}(x,t), \ (x,t) \in Q_{T-k,T},$$
$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_{T-k,T}} = 0, \ i = 0,\ldots,l-1, \quad u(x, T-k) = 0, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

де $S_{T-k,T} = \partial\Omega \times (T-k, T)$,

$$F_\alpha^{(k)}(x,t) = \begin{cases} F_\alpha(x,t), & (x,t) \in Q_{T-k,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{T-k}. \end{cases}$$

Згідно з теоремою, доведеною в праці [14], існує узагальнений розв'язок $u^k(x,t)$ задачі (3). Зокрема, якщо продовжити $u^k(x,t)$ нулем на Q_{T-k} і прийняти

$$u^k(x,t) = v^k(x,t)e^{\lambda t}, \quad \lambda > 0,$$

то функція $v^k(x,t)$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T} e^{\lambda t} \Bigg[(v_t^k, w) + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^k, D^\alpha w) + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v^k_{x_i t}, w_{x_j}) +$$
$$+\lambda \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)v^k_{x_i}, w_{x_j}) + \sum_{i=1}^n (C_i(x)\varkappa_i^k, w_{x_i}) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha v^k, w) +$$

$$+((G(x,t)+\lambda E)v^k;w)\Big]dxdt = \int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha^k(x,t), D^\alpha w)dxdt \qquad (4)$$

для довільної функції $w \in (C_0^\infty(Q_T))^N$. Нехай $\tau \in (-\infty, T)$ – довільне фіксоване число таке, що $\tau+1 \leqslant T$. Розглянемо область $Q_{\tau-1,T}$. Очевидно, рівність (4) збережеться, якщо за функцію $w(x,t)$ взяти функцію з простору $L^\infty((\tau-1,T);V)$ і $w(x,t)=0$ майже всюди в $Q_{\tau-1}\cup Q_{t_0,T}$, де $t_0\in[\tau,\tau+1]$. Приймемо в (4)

$$w(x,t)=\begin{cases} q_\tau v^k(x,t)e^{-\lambda t}, & (x,t)\in Q_{\tau-1,t_0},\\ 0, & (x,t)\in Q_{\tau-1}\cup Q_{t_0,T},\end{cases}$$

де $q_\tau(t)=q(t-\tau)$; $q(t)\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $0\leqslant q(t)\leqslant 1$, $q'(t)\geqslant 0$ на $\mathbb{R}^1$; $q(t)=0$ на $(-\infty,-1]$, $q(t)=\exp\left(-\dfrac{1}{1+t}\right)$ на $\left(-1,-\dfrac{1}{2}\right]$, $q(t)\geqslant e^{-2}$ на $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$, причому $q(t)=1$ на $[0,+\infty)$ [6, с.24]. Легко перевірити, що

$$\sup_{t>-1}\frac{q'(t)}{q^\nu(t)}\leqslant q_0(\nu)$$

для довільних $\nu(\nu<1), q_0(\nu)\equiv \mathrm{const}>0$. Перевіримо й оцінимо кожний доданок рівності (4) окремо:

$$\Im_1=\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}(v_t^k, q_\tau(t)v^k)dxdt=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_0}}|v^k|^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}q_\tau'(t)|v^k|^2dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_0}}|v^k|^2dx-\frac{\gamma_{1,0}}{2}\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}q_\tau'(t)|v_x^k|^2dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_0}}|v^k|^2dx-\frac{\gamma_{1,0}\varepsilon}{p}\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}q_\tau(t)|v_x^k|^2dxdt-\frac{\mu_1}{2}\varepsilon^{\frac{2}{2-p}},$$

$$\text{де}\quad \varepsilon>0,\quad \mu_1=\frac{2(p-2)\gamma_{1,0}q_0^{\frac{p}{p-2}}\,\mathrm{mes}\,\Omega}{p};$$

$$\Im_2=\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^k, D^\alpha v^k)q_\tau(t)dxdt\geqslant a_0\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha v^k|^2q_\tau(t)dxdt;$$

$$\Im_3=\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{i,j=1}^n[(B_{ij}(x,t)v_{x_it}^k, v_{x_j}^k)+\lambda\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)v_{x_i}^k, v_{x_j}^k)]q_\tau(t)dxdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega t_0}\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t_0)v_{x_i}^k, v_{x_j}^k)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{i,j=1}^n((2\lambda B_{ij}(x,t)-$$

$$-B_{ijt}(x,t))v_{x_i}^k, v_{x_i}^k)q_\tau(t)dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)v_{x_i}^k, v_{x_j}^k)q_\tau'(t)dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{b_0}{2}\int\limits_{\Omega_{t_0}}|v_x^k|^2dx-\frac{b_1\varepsilon}{p}\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}q_\tau(t)|v_x^k|^2dxdt-\frac{\mu_1 b_1}{2\gamma_{1,0}}\varepsilon^{\frac{2}{2-p}},$$

де b_1 залежить від $\sup\limits_{Q_T}\|B_{ij}(x,t)\|$;

$$\Im_4 = \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{i=1}^{n}(C_i(x)\varkappa_i^k, v_{x_i})q_\tau(t)dxdt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \exp(\lambda(p-2)t)|v_x^k|^p q_\tau(t)dxdt;$$

$$\Im_5 = \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha v^k, v^k)q_\tau(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_0}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^k|^2 q_\tau(t)dxdt + \frac{1}{2a_0h_2(T)\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} |v^k|^2 q_\tau(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_0}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^k|^2 q_\tau(t)dxdt + \frac{\mu_2\varepsilon}{2p} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} |v_x^k|^p q_\tau(t)dxdt+$$

$$+\frac{\mu_2(p-2)\mathrm{mes}\,\Omega}{2p}\varepsilon^{\frac{2}{2-p}}, \quad \text{де} \quad \mu_2 = 2\gamma_{1,0}\left[a_0h_2(T)\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\right]^{-1};$$

$$\Im_6 = \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} ((G(x,t)+\lambda E)v^k, v^k)q_\tau(t)dxdt \geqslant 0;$$

$$\Im_7 = \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (F_\alpha^{(k)}(x,t), D^\alpha v^k)\exp(-\lambda t)q_\tau(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 \exp(-2\lambda t)q_\tau(t)dxdt+$$

$$+\frac{(\gamma_{1,0}+1)\varepsilon}{p} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} q_\tau(t)|v_x^k|^p dxdt + \frac{(\gamma_{1,0}+1)\gamma(p-2)\mathrm{mes}\,\Omega}{p}\varepsilon^{\frac{2}{2-p}}.$$

Використовуючи оцінки інтегралів $\Im_1, \ldots \Im_7$, з рівності (4) одержуємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{t_0}} (|v^k|^2 + b_0|v_x^k|^2)dx + a_0 \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^k|^2 q_\tau(t)dxdt + \Bigg(2c_0\exp(\lambda(p-2)(\tau-1)) -$$

$$-\frac{2\gamma_{1,0}}{p}\varepsilon - \frac{2b_1}{p}\varepsilon - \frac{\mu_2\varepsilon}{p} - \frac{2(\gamma_{1,0}+1)\varepsilon}{p}\Bigg) \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} q_\tau(t)|v_x^k|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\mu_1 + \frac{\mu_1 b_1}{\gamma_{1,0}} + \frac{\mu_2(p-2)\mathrm{mes}\,\Omega}{p} + \frac{2(\gamma_{1,0}+1)(p-2)\mathrm{mes}\,\Omega}{p}\right)\varepsilon^{\frac{2}{2-p}} + \tag{5}$$

$$+ \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 \exp(-2\lambda t)2q_\tau(t)dxdt, \quad \text{коли} \quad t_0 \in [\tau, \tau+1].$$

Виберемо

$$\varepsilon = \frac{c_0 p \exp(\lambda(p-2)(\tau-1))}{4\gamma_{1,0} + 2b_1 + \mu_2 + 2}.$$

Тоді з (5) одержимо оцінки:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} (|v^k|^2 + |v_x^k|^2)dx \leqslant \mu_3(\tau-1) + \mu_4(\tau-1) \int\limits_{Q_{\tau-1,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 dxdt, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Omega_{\tau,\tau+1}} \sum_{|\alpha|=l} (|D^\alpha v^k|^2 + |v_x^k|^p) dxdt \leqslant \mu_3(\tau-1) + \mu_4(\tau-1) \int\limits_{Q_{\tau-1,\tau+1}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 dxdt.$$

Нехай $\sigma \in (\tau, \tau+1)$, $\omega_m(t)$ – неперервна кусково-лінійна функція на $(-\infty, T)$, $\omega_m(t) = 1$ при $t < \sigma - \dfrac{2}{m}$, $\omega_m(t) = 0$ при $t > \sigma - \dfrac{1}{m}$; $\rho_s(t)$ – регуляризуюча послідовність функцій з $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\rho_s(t) = \rho_s(-t)$, $\operatorname{supp}\rho_s \subset \left[-\dfrac{1}{s}, \dfrac{1}{s}\right]$ і $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_s(t)dx = 1$. Приймемо при $s > 2m$

$$w = ((\omega_m v_t^k q_\tau) * \rho_s * \rho_s)\omega_m q_\tau e^{-\lambda t},$$

де $*$ – означає згортку за змінною t. Очевидно,

$$w = ((\omega_m v^k q_\tau)_t * \rho_s * \rho_s)\omega_m q_\tau e^{-\lambda t} - (((\omega_m q_\tau)' v^k) * \rho_s * \rho_s)\omega_m q_\tau e^{-\lambda t}.$$

Підставимо функцію $w(x,t)$ у рівність (4) і перетворимо кожний її доданок окремо. Матимемо таке:

$$\begin{aligned}
\Im_8 = &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} (v_t^k, w) e^{\lambda t} dxdt = \\
= &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} (v_t^k (\omega_m v^k q_\tau) * \rho_s * \rho_s)\omega_m q_\tau dxdt \to \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} (v_t^k, v_t^k \omega_m^2 q_\tau^2) dxdt; \\
\Im_9 = &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha v^k \omega_m q_\tau, (\omega_m q_\tau D^\alpha v^k)_t * \rho_s * \rho_s)) dxdt - \\
- &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha v^k w_m' q_\tau, (\omega_m q_\tau D^\alpha v^k)_t * \rho_s * \rho_s)) dxdt \to \\
&\to - \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta v^k, D^\alpha v^k) \omega_m w_m' q_\tau^2 dxdt - \\
- &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta v^k, D^\alpha v^k) q_\tau q_\tau' \omega_m^2 dxdt; \\
\Im_{10} = &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t) v_{x_i t}^k \omega_m q_\tau, ((\omega_m q_\tau v_{x_j t}^k) * \rho_s * \rho_s)) dxdt \to \\
&\to \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t) v_{x_i t}^k, v_{x_j t}^k) \omega_m^2 q_\tau^2 dxdt; \\
\Im_{11} = &\lambda \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t) v_{x_i}^k \omega_m q_\tau, ((\omega_m q_\tau v_{x_j t}^k) * \rho_s * \rho_s)) dxdt \to \\
&\to \lambda \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t) v_{x_i}^k, v_{x_j t}^k) \omega_m^2 q_\tau^2 dxdt;
\end{aligned}$$

$$\Im_{12}=\int\limits_{Q_{\tau-1,T}}\sum_{i=1}^{n}(C_i(x)\varkappa_i^k\omega_m q_\tau,((\omega_m q_\tau v_{x_it}^k)*\rho_s*\rho_s))dxdt\to$$

$$\to\int\limits_{Q_{\tau-1,T}}\sum_{i=1}^{n}(C_i(x)\varkappa_i^k,v_{x_it}^k)\omega_m^2q_\tau^2dxdt;$$

$$\Im_{13}=\int\limits_{Q_{\tau-1,T}}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v^k\omega_m q_\tau,((\omega_m q_\tau v_t^k)*\rho_s*\rho_s))dxdt\to$$

$$\to\int\limits_{Q_{\tau-1,T}}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v^k,v_t^k)\omega_m^2q_\tau^2dxdt;$$

$$\Im_{14}=\int\limits_{Q_{\tau-1,T}}((G(x,t)+\lambda E)v^k\omega_m q_\tau,((\omega_m q_\tau v_t^k)*\rho_s*\rho_s))dxdt\to$$

$$\to\int\limits_{Q_{\tau-1,T}}((G(x,t)+\lambda E)v^k,v_t^k)\omega_m^2q_\tau^2dxdt;$$

$$\Im_{15}=\int\limits_{Q_{\tau-1,T}}e^{-\lambda t}(F_\alpha^{(k)}(x,t)\omega_m q_\tau,((\omega_m q_\tau D^\alpha v_t^k)*\rho_s*\rho_s))dxdt\to$$

$$\to\int\limits_{Q_{\tau-1,T}}\exp(-\lambda t)\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha^{(k)}(x,t),D^\alpha v_t^k)\omega_m^2q_\tau^2dxdt,$$

коли $s\to\infty$. Якщо тепер спрямувати в інтегралах $\Im_8,\dots,\Im_{15}$, $m\to\infty$, то одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}}[(v_t^k,v_t^kq_\tau^2)-\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^k,D^\alpha v^k)q_\tau q_\tau'+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v_{x_it}^k,v_{x_jt}^k)q_\tau^2+$$
$$+\lambda\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v_{x_i}^k,v_{x_jt}^k)q_\tau^2+\sum_{i=1}^{n}(C_i(x)\varkappa_i^k,v_t^k)q_\tau^2+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v^k,v_t^k)q_\tau^2+$$
$$+((G(x,t)+\lambda E)v^k,v_t^k)q_\tau^2]dxdt+\int\limits_{\Omega_\sigma}\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^k,D^\alpha v^k)q_\tau dx=$$
$$=\int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha^{(k)}(x,t),D^\alpha v_t^k)\exp(-\lambda t)q_\tau'dxdt \tag{7}$$

майже для всіх $\sigma\in[\tau-1,\tau+1]$. Оцінюючи доданки рівності (7), матимемо

$$\Im_{16}=\int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}}\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^k,D^\alpha v^k)q_\tau q_\tau'\leqslant a_1\int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha v^k|^2q_\tau dxdt;$$

$$\Im_{17}=\int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v_{x_it}^k,v_{x_jt}^k)q_\tau^2dxdt\geqslant b_0\int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}}|v_{tx}^k|^2q_\tau^2dxdt;$$

$$\Im_{18} =\lambda \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t)v^k_{x_i}, v^k_{x_jt})q^2_\tau dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\lambda b_0}{2} \int\limits_{\Omega_\sigma} |v^k_x|^2 q^2_\tau dx - \frac{\lambda b_2}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_x|^2 q^2_\tau dxdt;$$

$$\Im_{19} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{i=1}^{n} (C_i(x)\varkappa^k_i, v^k_{x_it})q^2_\tau dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c^i_j(x)|v^k_{j,x_i}|^{p-2} v^k_{j,x_i} v^k_{j,x_it} q^2_\tau exp(\lambda(p-2)t)dxdt =$$

$$= \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega_\sigma} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c^i_j(x)|v^k_{j,x_i}|^p \exp(\lambda(p-2)\sigma) q^2_\tau(\sigma)dx -$$

$$- \frac{\lambda(p-2)}{p} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c^i_j(x)|v^k_{j,x_i}|^p \exp(\lambda(p-2)t) q^2_\tau dxdt -$$

$$- \frac{2}{p} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c^i_j(x)|v^k_{j,x_i}|^p \exp(\lambda(p-2)t) q_\tau q'_\tau dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \mu_5 \int\limits_{\Omega_\sigma} |v^k_x|^p \exp(\lambda(p-2)\sigma t) q^2_\tau(\sigma)dx - \mu_6 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_x|^p \exp(\lambda(p-2)t) q_\tau(t)dxdt;$$

$$\Im_{20} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|=1} (H_\alpha(x,t)D^\alpha v^k, v^k_t) q^2_\tau dxdt \leqslant$$

$$\leqslant h_4 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha v^k|^2 q^2_\tau dxdt + \frac{1}{8} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_t|^2 q^2_\tau dxdt;$$

$$\Im_{21} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} ((G(x,t)+\lambda E)v^k, v^k_t) q^2_\tau dxdt \leqslant$$

$$\leqslant g_3 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha v^k|^2 q^2_\tau dxdt + \frac{1}{8} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_t|^2 q^2_\tau dxdt;$$

$$\Im_{22} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (F^{(k)}_\alpha(x,t), D^\alpha v^k_t) e^{-\lambda t} dxdt \leqslant \mu_7 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 e^{-2\lambda t} dxdt +$$

$$+ \frac{1}{4} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_t|^2 q^2_\tau dxdt + \frac{b_0}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_{tx}|^2 q^2_\tau dxdt.$$

Сталі $a_1, b_2, \mu_5, \mu_6, \mu_7, h_4, g_3$ не залежать від k, τ, σ.

Враховуючи оцінки інтегралів $\Im_{16}, \ldots \Im_{22}$, з рівності (7) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\sigma}\left[\frac{1}{p}\exp(\lambda(p-2)\sigma)|v_x^k|^p + a_0\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha v^k|^2\right]dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\tau,\sigma}}(|v_t^k|^2+|v_{tx}^k|^2)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}}\left[(a_1+h_4+g_3)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha v^k|^2 + \frac{\lambda b_2}{2}|v_x^k|^2 + \right.$$

$$\left. +\mu_6\exp(\lambda(p-2)t)\right]dxdt + \mu_7\int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} e^{-2\lambda t}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|F_\alpha(x,t)|^2dxdt \tag{8}$$

для майже всіх $\sigma\in[\tau,\tau+1]$. Якщо взяти до уваги оцінку (6), то з (8) одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha v^k|^2+|v_x^k|^p\right]dx + \int\limits_{Q_{\tau-1,\tau}}|v_{tx}^k|^2dxdt \leqslant \mu_8(\tau-2)+$$

$$+\mu_9(\tau-2)\int\limits_{Q_{\tau-2,\tau}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|F_\alpha(x,t)|^2dxdt. \tag{9}$$

Отже, в області $Q_{T-t_1,T}(t_1<T)$ з (6), (9) випливають такі оцінки:

$$\int\limits_{\Omega_t}\left(\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha v^k|^2+|v_x^k|^p\right)dx \leqslant \mu_{10}(t_1), \qquad \int\limits_{Q_{T-t_1,T}}|v_{tx}^k|^2dxdt \leqslant \mu_{10}(t_1). \tag{10}$$

Крім того, легко довести, що

$$||\mathcal{B}(v^k e^{\lambda t})||_{L^q((t_1,T);(W^{-1,q}(\Omega))^N)} \leqslant \mu_{10}(t_1). \tag{11}$$

На підставі оцінок (10), (11) з побудованої послідовності $\{v^k(x,t)\}$ можна вибрати підпослідовність $\{v_s^k(x,t)\}$ таку, що $v^{k_s}\to v$ $*-$ слабко в $L^\infty((t_1,T);V)$, $v_t^{k_s}\to v_t$ слабко в $L^2((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$, $\mathcal{B}(v^{k_s}e^{\lambda t})\to\mathcal{Z}_\lambda$ слабко в $L^q((t_1,T);(W^{-1,q}(\Omega))^N)$, коли $k_s\to\infty$ для будь-якого t_1, $-\infty<t_1<T$. Очевидно, функція v задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T}\left[(v^t,w)+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v, D^\alpha w)+\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)v_{x_it},w_{x_j})+\right.$$

$$\left.+\lambda\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)v_{x_i},w_{x_j})+\sum_{|\alpha|=1}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v,w)+((G(x,t)+\lambda E)v,w)\right]e^{\lambda t}dxdt+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{Z}_\lambda,w\rangle dt = \int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t),D^\alpha w)dxdt \tag{12}$$

для довільної функції $w\in(C_0^\infty(Q_T))^N$. Покажемо, що $\mathcal{B}(ve^{\lambda t})=\mathcal{Z}_\lambda$. Для цього візьмемо $\psi\in\mathcal{D}(-\infty,T)$, $\psi(t)\geqslant 0$, $\operatorname{supp}\psi(t)\in[t_1,T]$, $w\in L^\infty_{\mathrm{loc}}((-\infty,T];V)$ і приймемо

$$\mathcal{Y}_{k_s} = \int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{B}(v^{k_s}e^{\lambda t})-\mathcal{B}(we^{\lambda t}), v^{k_s}-w\rangle dt.$$

Враховуючи (4), одержимо

$$\mathcal{Y}_{k_s} = -\int\limits_{Q_T}\Bigg[-\frac{1}{2}\psi'|v^{k_s}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v^{k_s}_{x_i t}, v^{k_s}_{x_j})\psi' -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ijt}(x,t)v^{k_s}_{x_i}, v^{k_s}_{x_j})\psi + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^{k_s}, D^\alpha v^{k_s})\psi +$$
$$+\lambda\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v^{k_s}_{x_i}, v^{k_s}_{x_j})\psi + \sum_{|\alpha|=1}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v^{k_s}, v^{k_s})\psi +$$
$$+((G(x,t)+\lambda E)v^{k_s}, v^{k_s})\psi - \sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t), D^\alpha v^{k_s})e^{-\lambda t}\psi dxdt\Bigg]dxdt -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{B}(v^{k_s}e^{\lambda t}), w\rangle\psi dt - \int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{B}(we^{\lambda t}), v^{k_s} - w\rangle dt.$$

Розглянемо простір

$$W_1 = \{w(x,t):\ w \in L^\infty((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N),\ w_t \in L^2((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)\}.$$

Оскільки $l > 1$, то $(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N \subset (\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N$ компактно. Тому на підставі теореми 5.1 [15, с.70] $W_1 \subset L^2((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$ компактно. Отже, можемо вважати, що

$$\|v^{k_s} - v\|^{(2)}_{L^2((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)} \to 0,$$

коли $k_s \to \infty$. Якщо у рівності для $\mathcal{Y}_{k_s}$ перейти до границі, коли $k_s \to \infty$, то одержимо

$$\overline{\lim_{k_s\to\infty}}\,\mathcal{Y}_{k_s} \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}\psi'\Bigg[|v|^2 + \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v_{x_i}, v_{x_j}\Bigg]dx\,dt -$$
$$-\int\limits_{Q_T}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v, D^\alpha v) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}((2\lambda B_{ij}(x,t) - B_{ijt}(x,t)v_{x_i}, v_{x_j}) +$$
$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v, v) + ((G(x,t)+\lambda E)v, v) -$$
$$-\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t), D^\alpha v)e^{-\lambda t}dxdt\Bigg]\psi(t)dxdt -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{Z}_\lambda, w\rangle\psi(t)dt - \int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{B}(we^{\lambda t}), v - w\rangle\psi dt.$$

Враховуючи монотонність оператора $\mathcal{B}$ і рівність (12), з останньої нерівності випливає, що

$$\int\limits_{-\infty}^{T} \psi(t)\langle \mathcal{Z}_\lambda - \mathcal{B}(we^{\lambda t}), v - w\rangle dt \geqslant 0.$$

Звідси $\mathcal{Z}_\lambda = \mathcal{B}(ve^{\lambda t})$ і теорему доведено.

1. *Колінько М. О., Лавренюк С. П.* Єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 71-77.
2. *Олейник О.А.,Иосифьян Г.А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – Т.31. – N6. – С.142-166.
3. *Ивасишен С.Д.* О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т.14. – N 2. – С. 361-363.
4. *Ивасишен С.Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. – 1982. – Т.34. – N5. – С. 547-552.
5. *Кадыров Р.Р., Жураев Б.Б.* О классах единственности решений краевых задач без начальных условий для параболических уравнений высшего порядка // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук – 1985. – N2.– С.23-29.
6. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды сем. им. И.Г.Петровского. – 1989. – Вып.14. – С.3-44.
7. *Бокало Н.М.* Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т.34. – N 4. – С. 33-40.
8. *Бас М.О., Лавренюк С.П.* Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболєва-Гальперна // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48. – N 1. – С.124-128.
9. *Лавренюк С.П., Пташник М.Б.* Псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50. – N 7. – С. 919-929.
10. *Lavrenyuk S.P., Kolinko M.O.* Fourier problem for linear Sobolev-Halperin system // Demonstratio mathematica. – 1998. – Vol. 31. – N 1. – P.26-32.
11. *Лавренюк С.П., Пташник М.Б.* Деякі нелінійні псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – N 3.
12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
13. *Колінько М. О., Лавренюк С. П.* Існування розв'язку однієї нелінійної псевдопараболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С. 44-49.
14. *Лионс Ж.- Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

Kolin'ko M., Lavrenyuk S.

EXISTENCE OF A SOLUTION THE FOURIER PROBLEM FOR ONE NONLINEAR PSEUDOPARABOLIC SYSTEM

Some sufficient conditions the existence of a weak solution the problem without initial data for one nonlinear pseudoparabolic system there are obtained. The existence of a solution does not depepend on a behaviour under $t \to -\infty$.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.99