ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 114–116 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 114–116*

УДК 517.53

Володимир Кушнір

ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ТА РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ АНАЛІТИЧНОЇ В ОБЛАСТІ ФУНКЦІЇ

Нехай G – довільна область із $\mathbb{C}$, f – аналітична в області G функція, яка має на $\partial\mathbb{G}$ принаймні одну особливу точку, а l – додатна неперервна в G функція така, що

$$l(z) > \frac{\beta}{\operatorname{dist}(z, \partial G)}, \quad z \in G, \tag{1}$$

де $\beta > 1$ – фіксоване число. Функція f називається [1] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l^n(z)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{2}$$

Найменше з таких чисел N називатимемо l-індексом і позначатимемо через $N(f;l)$. У випадку, коли $G = \mathbb{C}$ і $l(z) \equiv 1$, звідси одержуємо означення цілої функції обмеженого індексу. У. Хейман [2] показав, що для того, щоб ціла функція f мала обмежений індекс, необхідно і достатньо, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$, $C \geqslant 1$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}$ виконувалась нерівність $|f^{(p+1)}(z)| \leqslant C \max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \leqslant k \leqslant p\}$. М.М. Шеремета [3] переніс теорему Хеймана на цілі функції обмеженого l^*-індексу, де l^* – додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція і $l(z) = l^*(|z|)$.

Для $r \in [0, \beta]$ приймемо

$$\lambda_1(r) = \inf\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}$$

і

$$\lambda_2(r) = \sup\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}.$$

Очевидно, що $\lambda_1(r) \leqslant 1 \leqslant \lambda_2(r)$. Клас додатних неперервних в G функцій l, які, крім (1), задовольняють умову $0 < \lambda_1(r) \leqslant \lambda_2(r) < +\infty$ для всіх $r \in [0, \beta]$, позначимо через Q_β.

Зауважимо таке: якщо $l \in Q_\beta$ і $z_0 \in G$, то для всіх $r \in [0, \beta]$ з нерівності $|z - z_0| \leqslant \dfrac{r}{l(z_0)}$ випливають нерівності

$$\lambda_1(r) l(z_0) \leqslant l(z) \leqslant \lambda_2(r) l(z_0). \tag{3}$$

Будемо говорити, що функція f має обмежений l-розподіл значень в області G, якщо існує число $p \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z_0 \in G$ і $w \in \mathbb{C}$ рівняння $f(z) = w$ має не більш ніж p коренів у крузі $\left\{z \;:\; |z-z_0| \leqslant \frac{1}{l(z_0)}\right\}$, тобто функція f в кожному такому крузі p-листа.

Нам будуть потрібні такі леми.

Лема 1. *[2] Якщо функція f аналітична і p-листа в крузі $\{z : |z-z_0| < R\}$, то для кожного $n > p$*

$$\frac{1}{n!}|f^{(n)}(z_0)|R^n \leqslant \left(\frac{An}{p}\right)^{2p} \max\left\{\frac{1}{k!}|f^{(k)}(z_0)|R^k \;:\; 1 \leqslant k \leqslant p\right\}, \quad A = \text{const}. \tag{4}$$

Лема 2. *[2] Якщо функція f аналітична в крузі $\{z : |z-z_0| < R\}$, і для кожного z з цього круга*

$$\frac{1}{(p+1)!}|f^{(p+1)}(z)|\left(\frac{R}{2}\right)^{p+1} \leqslant \max\left\{\frac{1}{k!}|f^{(k)}(z)|\left(\frac{R}{2}\right)^{k} \;:\; 1 \leqslant k \leqslant p\right\}, \tag{5}$$

то вона p-листа в крузі $\{z : |z-z_0| < R/25\sqrt{(p+1)}\}$.

Лема 3. *[4] Нехай $\beta > 1$ і $l \in Q_\beta$. Для того щоб аналітична в G функція f мала обмежений l-індекс, необхідно і достатньо, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$ і $C \geqslant 1$ такі, що для кожного $z \in G$ виконувалась нерівність*

$$\frac{|f^{(p+1)}(z3)|}{l^{p+1}(z)} \leqslant C \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant p\right\}. \tag{6}$$

Теорема. *Нехай $\beta > 0$, $l \in Q_\beta(G)$. Для того щоб аналітична в G функція f мала обмежений l-розподіл значень, необхідно і достатньо, щоб її похідна f' була функцією обмеженого l-індексу.*

Доведення. Нехай функція f має обмежений l-розподіл значень, тобто функція f у кожному крузі $\{z : |z-z_0| < 1/l(z_0)\}$ є p-листою. Приймемо $R = 1/l(z_0)$ і $n = p+1$. Тоді з (4) маємо

$$\frac{|f^{(p+1)}(z_0)|}{l^{p+1}(z_0)} \leqslant (p+1)!\left(A\frac{p+1}{p}\right)^{2p} \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{l^k(z_0)} \;:\; 1 \leqslant k \leqslant p\right\}.$$

Звідси видно, що для функції f' виконується (6) з $p-1$ замість p і $C = (p+1)!(A(p+1)/p)^{2p}$, тобто f'– функція обмеженого l-індексу. Навпаки, нехай f'– функція обмеженого l-індексу, тобто для деяких $C \geqslant 1$ і $p \in \mathbb{N}$ і всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(p+1)}(z)|}{l^p(z)} \leqslant C \max\left\{\frac{|f^{(k+1)}(z)|}{l^k(z)} \;:\; 0 \leqslant k \leqslant p-1\right\}. \tag{7}$$

Розглянемо довільний круг $K_0 = \{z : |z-z_0| < 1/l(z_0)\}, \quad z_0 \in G$. З (7) і (3) одержуємо

$$\frac{|f^{(p+1)}(z)|}{(p+1)!}\left(\frac{1}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^{p+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Cp!}{(p+1)!}\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!}\left(\frac{1}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^{k}\left(\frac{l(z)}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^{p+1-k} \;:\; 1 \leqslant k \leqslant p\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{p+1}\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!}\left(\frac{1}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^k\left(\frac{1}{C}\right)^{p+1-k}\ :\ 1\leqslant k\leqslant p\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!}\left(\frac{1}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^k\ :\ 1\leqslant k\leqslant p\right\},$$

тобто справджується (5) з $R=\dfrac{2}{C\lambda_2(1)l(z_0)}$. За лемою 2 функція f є p-листою в крузі $\{z:|z-z_0|<\dfrac{\rho}{l(z_0)}\}$, $\rho=\dfrac{2}{25C\lambda_2(1)\sqrt{(p+1)}}$.

Нехай z_j – довільна точка з K_0, а $K_j^*=\left\{z:|z-z_j|<\dfrac{\rho}{l(z_j)}\right\}$. Оскільки $l(z_j)\leqslant\leqslant\lambda_2(1)l(z_0)$, то $K_j=\{z:|z-z_j|<\dfrac{\rho}{\lambda_2(1)l(z_0)}\}\subset K_j^*$. Отже, функція f є p-листою в K_j. Зауважимо, що кожен замкнений круг радіуса R_* можна покрити скінченним числом m_* замкнених кругів радіуса $\rho_*<R_*$ з центрами в цьому крузі, причому $m_*\leqslant B_*\left(\dfrac{R_*}{\rho_*}\right)^2$, де $B_*>0$ – деяка стала. Отже, K_0 можна покрити скінченним числом m замкнених кругів K_j. Оскільки f є p-листою в K_j, то f є mp-листою в K_0. Враховуючи довільність точки z_0, теорема доведена.

---

1. *Шеремета М.М., Кушнір В.О.* Аналітичні функції обмеженого l-індексу // Мат. студії. – 1999. – Т. 12. – N 1. – С. 59-66.
2. *Hayman W.K.* Differential inequalities and local valency// Pacif. J. Math. – 1973. – Vol.44. – N 1. – P. 117-137.
3. *Шеремета М.Н.* Об l-индексе и l-распределении значений целых функций// Изв. вузов. Математика. – 1990. – N 2. – С. 94-96.
4. *Кушнір В.О.* Аналог теореми Хеймана для аналітичних функцій обмеженого l-індексу// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. –1999. – Вип. 53. – С. 48-51.
5. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index// Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math Soc., Providence. – 1968. – Vol. 11. – P. 298-307.

Kushnir V.

THE BOUNDEDNESS OF l-INDEX AND VALUE DISTRIBUTION OF AN ANALITIC FUNCTION IN COMPLEX DOMAIN

Let G be an arbitrary complex domain, and l be a positive continuous function in G such that $l(z)>\dfrac{\beta}{\operatorname{dist}(z,\partial G)}$, $z\in G$, where $\beta>1$ is a constant. The connection between the l-boundedness of value distribution of an analytic function f in complex domain G and boundedness of l-index of its derivative f' is established.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.99