УДК 539.3

Тарас Нагірний, Костянтин Червінка

МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛАХ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТІВ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ

Відомо, що деформівні тверді тіла характеризуються неоднорідністю властивостей, які зумовлені різними умовами взаємодії частинок у приповерхневих та внутрішніх областях тіла [1,2]. Зрозуміло, що така неоднорідність може суттєво впливати на процеси, які відбуваються в тілах, а тим самим – на їхні функціональні та міцнісні характеристики. В цій праці ми розглянемо моделі опису та методику дослідження хвильових процесів у твердих тілах з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності.

Для врахування приповерхневої неоднорідності скористаємося локально градієнтними моделями термомеханіки [3-5]. В таких моделях поряд з класичними параметрами стану, такими як тензори деформації та напружень, розглядають градієнт хімічного потенціалу $\vec{\nabla} H$ та спряжений до нього параметр – вектор зміщень маси $\vec{\pi}_m$. Повна система рівнянь моделі локально градієнтної пружності складається з рівнянь балансу імпульсу $\vec{k}_v$ та маси, якщо знехтувати конвективною складовою похідної за часом τ та масовими силами у локальній формі, то можна записати у вигляді [3,4]

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}, \qquad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\varrho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_m\right) = 0,$$

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{e} + \left[\lambda e + (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_m \eta\right] \hat{I},$$

$$\varrho = \varrho_* - c_m \eta - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_m e, \quad \vec{\pi}_m = -b_m \vec{\nabla}\eta, \quad \vec{k}_v = \varrho \vec{v}. \tag{1}$$

Тут $\hat{\sigma}$ – тензор напружень Коші; $\hat{e}$ – тензор деформації, $e = \hat{e} : \hat{I}$, $\hat{I}$ – одиничний тензор; $\vec{v}$ – вектор швидкості; $\eta \equiv H - H_*$ – збурення хімічного потенціалу H стосовно початкового значення H_*; ϱ_* – початкове значення густини; $\lambda, \mu, \alpha_m, b_m, c_m$ – сталі матеріалу; "$\cdot$", "$:$" – внутрішній та подвійний внутрішній добутки. Зазначимо, що за початкові зазвичай приймають значення відповідних величин для безмежного середовища, матеріал якого ідентичний матеріалу тіла, яке розглядають.

Якщо врахувати, що тензор деформації $\hat{e}$ пов'язаний з вектором переміщення $\vec{u}$ співвідношенням Коші

$$\hat{e} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla} \otimes \vec{u} + \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^T\right],$$

а також прийняти нульові початкові умови під час інтегрування другого співвідношення системи (1), то ключову систему рівнянь локально градієнтної пружності можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\left[\varrho_* - c_m\eta - (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right]\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\right\} =$$

$$= \mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\eta,$$

$$\nabla^2\eta - \beta^2\eta - \beta_u^2\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0, \qquad (2)$$

де

$$\beta^2 = \frac{c_m}{b_m}, \quad \beta_u^2 = \frac{(3\lambda+2\mu)\,\alpha_m}{b_m},$$

"$\otimes$" – операція тензорного добутку; "T" – індекс, що позначає транспонування.

Система рівнянь (2) є нелінійною внаслідок нелінійності імпульсу механічного поступального руху $\vec{k}_v$. У разі дослідження хвильових процесів на її основі розв'язок $\vec{u},\eta$ природно подати у вигляді суми осередненої $\overline{\vec{u}},\overline{\eta}$ на періоді коливань τ_0 та коливної $\tilde{\vec{u}},\tilde{\eta}$ складових [6-8]

$$\vec{u} = \overline{\vec{u}} + \tilde{\vec{u}}, \quad \eta = \overline{\eta} + \tilde{\eta}.$$

Тут, як і в монографіях [6-8], приймаємо, що

$$\overline{f}(\vec{r},\tau) = \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_0} f(\vec{r},\zeta)d\zeta,$$

де $f \equiv \{\vec{u},\eta\}$, $\vec{r}$ – радіус-вектор.

Приймемо також наближення, які здебільшого використовують у теорії нелінійних коливань

$$\frac{\overline{\partial}^n f}{\partial\tau^n} \approx \frac{\partial^n \overline{f}}{\partial\tau^n}, \quad \overline{\overline{f}\overline{\varphi}} \approx \overline{f}\overline{\varphi}, \quad \overline{\overline{f}\tilde{\varphi}} \approx 0, \quad \overline{\tilde{f}} \approx 0.$$

Якщо знехтувати осередненою складовою сили інерції, то систему рівнянь (2) можна звести до вигляду

$$\mu\nabla^2\overline{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\overline{\eta} = 0,$$

$$\nabla^2\overline{\eta} - \beta^2\overline{\eta} - \beta_u^2\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} = 0; \qquad (3)$$

$$\left[\varrho_* - c_m\overline{\eta} - (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right]\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2} - \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\left[c_m\tilde{\eta} + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right]\frac{\partial\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau}\right\}_V =$$

$$= \mu\nabla^2\tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\tilde{\eta},$$

$$\nabla^2\tilde{\eta} - \beta^2\tilde{\eta} - \beta_u^2\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}} = 0, \qquad (4)$$

де індексом "V" позначено коливну складову від добутку.

Якщо додатково обмежитись розглядом хвиль основної гармоніки, то перше рівняння системи (4) спрощується до вигляду

$$\left[\varrho_* - c_m\overline{\eta} - (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right]\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2} =$$

$$= \mu\nabla^2\tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\tilde{\eta}. \quad (5)$$

Отже, для прийнятого наближення дослідження полів переміщення та хімічного потенціалу зводиться до послідовного визначення осереднених складових $\overline{\vec{u}}, \overline{\eta}$ з системи рівнянь (3) у разі наступного визначення коливних складових $\tilde{\vec{u}}, \tilde{\eta}$ із співвідношень (4). Система (3) описує приповерхневу неоднорідність (приповерхневі явища) у пружних тілах з урахуванням різних умов взаємодії частинок у внутрішніх та приповерхневих областях тіла [4, 5]. Тому (4) описує хвильові процеси із врахуванням поверхневих явищ і є системою рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Якщо ж враховувати осереднену складову сили інерції, то системи рівнянь для коливних та осереднених складових полів, які розглядають, будуть взаємопов'язаними.

Лінеаризованим наближенням першого рівняння системи (4) та рівняння (5) є

$$\varrho_*\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2} = \mu\nabla^2\tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\tilde{\eta}. \quad (6)$$

Для одновимірних за координатою x коливань

$$\tilde{\vec{u}} = \left(u_a \exp\left(i\left(kx+\nu\tau\right)\right), 0, 0\right), \quad \tilde{\eta} = \eta_a \exp\left(i\left(kx+\nu\tau\right)\right)$$

з (6) і з другого рівняння (4) одержуємо таке дисперсійне співвідношення

$$k^4 + k^2\left[\beta^2 - \beta_u^2\frac{(3\lambda+2\mu)\,\alpha_m}{\lambda+2\mu} - \frac{\nu^2}{c_1^2}\right] = \beta^2\frac{\nu^2}{c_1^2},$$

яке відрізняється від аналогічного співвідношення класичної теорії пружності

$$k^2 = \frac{\nu^2}{c_1^2}.$$

Тут $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\varrho_*}$ - швидкість поширення поздовжньої пружної хвилі в безмежному середовищі.

Якщо зв'язаністю хвильових процесів знехтувати, то рівняння (5) набуває вигляду

$$\left[\varrho_* - c_m\overline{\eta} - (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right]\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2} = \mu\nabla^2\tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right). \quad (7)$$

Використаємо друге рівняння системи (3) і рівняння (7) для дослідження впливу приповерхневої неоднорідності на частоти власних коливань деформівного шару (область $|\,x\,|\leqslant l$ евклідового простору). Для простоти знехтуємо впливом деформації на густину $\overline{\varrho}$. У такому наближенні для відшукання

$$\overline{\eta} = \overline{\eta}(x), \qquad \tilde{\vec{u}} = (\tilde{u}(x,\tau), 0, 0)$$

маємо систему рівнянь

$$\frac{d^2\overline{\eta}}{dx^2} - \beta^2\overline{\eta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} - c_1^{-2}\left(1 - \frac{c_m}{\varrho_*}\overline{\eta}\right)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2} = 0. \quad (8)$$

Розв'язок першого рівняння цієї системи, який задовольняє умови

$$\overline{\eta} = \eta_a \equiv H_a - H_*$$

на поверхнях $x = \mp l$ шару є таким:

$$\overline{\eta}(x) = \eta_a \frac{\mathrm{ch}(\beta x)}{\mathrm{ch}(\beta l)}. \tag{9}$$

Зазначимо, що неоднорідність поля хімічного потенціалу є причиною приповерхневої неоднорідності пов'язаних з ним полів іншої фізичної природи.

Якщо внести (9) в рівняння (8), то для коливної складової вектора переміщення $\tilde{u}$ одержуємо

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - c_1^{-2}\left(1 - A\frac{\mathrm{ch}(\beta x)}{\mathrm{ch}(\beta l)}\right)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = 0, \tag{10}$$

де $A = c_m \eta_a / \varrho_*$.

Розв'язок цього рівняння запишемо у вигляді

$$\tilde{u}(x, \tau) = u(x)\exp(i\nu\tau). \tag{11}$$

Для відшукання амплітуди коливань $u(x)$ з (10), (11) маємо

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2\left(1 - a_1 \mathrm{ch}(\beta x)\right)u = 0, \tag{12}$$

де

$$k = \frac{\nu}{c_1}, \quad a_1 = \frac{A}{\mathrm{ch}(\beta l)}.$$

Далі розглядатимемо шари, товщини яких є значно більшими від характерного розміру області приповерхневої неоднорідності ($\beta l \gg 1$) (для бездомішкових тіл це шари, товщини яких порядку мікрона та більше). Розв'язок рівняння (12) шукаємо у вигляді розвинення за малим параметром a_1

$$u(x) = u_0(x) + a_1 u_1(x) + \cdots. \tag{13}$$

Обмежимося першим наближенням. Тоді для визначення u_0, u_1 одержуємо рівняння

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + k^2 u_0 = 0,$$

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + k^2 u_1 = k^2 \mathrm{ch}(\beta x) u_0. \tag{14}$$

Розв'язок рівнянь (14) можна записати у вигляді

$$u_0 = A_0 \cos(kx) + B_0 \sin(kx),$$

$$u_1 = A_0\left\{\cos(kx) + \frac{k}{2}\left[-V_1(x)\cos(kx) + V_2 \sin(kx)\right]\right\} +$$

$$+B_0\left\{\sin(kx) + \frac{k}{2}\left[-V_3(x)\cos(kx) + V_1 \sin(kx)\right]\right\}, \tag{15}$$

де

$$V_1 = \frac{1}{\beta^2 + 4k^2}\left[\beta \mathrm{sh}(kx)\sin(2kx) - 2k\mathrm{ch}(kx)\cos(2kx)\right],$$

$$V_2 = \beta^{-1}\mathrm{sh}(kx) + \frac{1}{\beta^2 + 4k^2}\left[\beta \mathrm{sh}(kx)\cos(2kx) + 2k\mathrm{ch}(kx)\sin(2kx)\right],$$

$$V_3 = \beta^{-1}\mathrm{sh}(kx) - \frac{1}{\beta^2 + 4k^2}\left[\beta\mathrm{sh}(kx)\cos(2kx) + 2k\mathrm{ch}(kx)\sin(2kx)\right].$$

Застосуємо цю систему співвідношень для дослідження частот власних коливань шару для конкретних граничних умов.

Нерухомі поверхні шару. Тоді граничні умови є такими:

$$u(-l) = 0, \qquad u(l) = 0. \tag{16}$$

Для першого наближення за параметром a_1 з (13), (15), (16) одержуємо

$$A_0\left\{(1+a_1)\cos(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[-V_1(l)\cos(kl) + V_2(l)\sin(kl)\right]\right\} +$$

$$+B_0\left\{(1+a_1)\sin(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[-V_3(l)\cos(kl) + V_1(l)\sin(kl)\right]\right\} = 0,$$

$$A_0\left\{(1+a_1)\cos(kl) - \frac{a_1 k}{2}\left[V_1(-l)\cos(kl) + V_2(-l)\sin(kl)\right]\right\} +$$

$$+B_0\left\{-(1+a_1)\sin(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[V_3(-l)\cos(kl) + V_1(-l)\sin(kl)\right]\right\} = 0. \tag{17}$$

Необхідною умовою існування нетривіального розв'язку системи рівнянь (17) є рівність нулю визначника цієї системи. Обмежуючись лінійним за a_1 наближенням, одержуємо

$$\left(1 + \frac{Ak^2}{\beta^2 + 4k^2}\right)\sin(2kl) = \frac{2Ak^3}{\beta(\beta^2 + 4k^2)}\cos(2kl), \tag{18}$$

де враховано, що для товстих шарів ($\beta l \gg 1$)

$$\mathrm{ch}(\beta l) \approx \mathrm{sh}(\beta l).$$

Якщо приповерхневі явища не враховувати, то аналогом (18) є рівняння

$$\sin\left(2k^0 l\right) = 0.$$

На основі його розв'язку $k_n^0 = \pi n/(2l)$ знаходять частоти власних коливань ν_n^0 шару з нерухомими поверхнями

$$\nu_n^0 = \frac{\pi n c_1}{2l}, \qquad n = 1, 2, 3\cdots$$

На цій підставі можна стверджувати, що рівняння (18) є трансцендентним рівнянням для знаходження частот власних коливань шару з урахуванням приповерхневої неоднорідності. Для товстих шарів природно прийняти, що

$$k = k^0 + k^1, \qquad k^1/k^0 \ll 1.$$

У першому наближенні за малим параметром k^1/k^0 для k_n одержуємо

$$k_n = \frac{\pi n}{2l}\left[1 + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{A}{(\beta l)^3}\right] \qquad n = 1, 2, 3\cdots$$

Це відповідає таким значенням власних частот:

$$\nu_n = \frac{\pi n c_1}{2l}\left[1 + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{A}{(\beta l)^3}\right] \qquad n = 1, 2, 3\cdots \tag{19}$$

Шар, одна поверхня якого нерухома, а інша – вільна. Тоді граничні умови мають вигляд

$$u(-l) = 0, \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = 0.$$

У цьому випадку одержуємо систему рівнянь

$$A_0 \left\{ (1+a)\cos(kl) - \frac{a_1 k}{2}\left[V_1(-l)\cos(kl) + V_2(-l)\sin(kl)\right] \right\} +$$

$$+ B_0 \left\{ -(1+a)\sin(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[V_3(-l)\cos(kl) + V_1(-l)\sin(kl)\right] \right\} = 0,$$

$$A_0 \left\{ -(1+a)k\cos(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[V_1(l)k\sin(kl) + V_2(l)k\cos(kl) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - V_1'(l)\cos(kl) + V_2'(l)\sin(kl)\right]\right\} +$$

$$+ B_0 \left\{ (1+a)k\cos(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[V_3(l)k\sin(kl) + V_1(l)k\cos(kl) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - V_3'(l)\cos(kl) + V_1'\sin(kl)\right]\right\} = 0, \tag{20}$$

де

$$V_i' \equiv \left(\frac{dV_i}{dx}\right)_{x=l}.$$

У прийнятому вище наближенні для відшукання хвильового числа k з (20) одержуємо

$$\mathrm{ctg}(2kl) + \frac{Ak}{\beta} = 0. \tag{21}$$

Якщо приповерхневі явища не враховувати, то відповідним рівнянням є

$$\cos\left(2k^0 l\right) = 0.$$

Обмежуючись першим наближенням за параметром k^1/k^0, одержуємо такий розв'язок рівняння (21):

$$k_n = \frac{\pi\,(2n+1)}{4l}\left(1 + \frac{A}{2\beta l}\right) \qquad n = 0, 1, 2\cdots$$

Тому власними частотами коливань шару з однією нерухомою поверхнею є

$$\nu_n = \frac{\pi\,(2n+1)\,c_1}{4l}\left(1 + \frac{A}{2\beta l}\right) \qquad n = 0, 1, 2\cdots \tag{22}$$

Шар з вільними поверхнями. Граничні умови для амплітуди вектора переміщень мають вигляд

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=-l} = 0, \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = 0.$$

Виконуючи процедуру, аналогічну до тої, що у попередніх випадках, одержуємо таке трансцендентне рівняння:

$$\left(\frac{2Ak^2}{\beta^2 + 4k^2} - 1\right)\sin(2kl) + Ak\left(\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\beta^2 + 4k^2}\right)\cos(2kl) = 0$$

для знаходження хвильового числа k.

У першому наближенні за параметром k^1/k^0 для власних частот ν_n маємо

$$\nu_n = \frac{\pi n c_1}{2l}\left(1+\frac{A}{\beta l}\right) \qquad n = 1, 2, 3\cdots \tag{23}$$

Порівнюючи вирази (19), (22), (23) бачимо, що в шарі з нерухомими поверхнями вплив приповерхневої неоднорідності на ν_n є нехтовно малим. У шарі з вільними поверхнями такий вплив є у два рази більший порівняно з шаром, одна поверхня якого нерухома, а інша вільна.

Зазначимо, що врахування залежності густини маси ϱ від деформації e не приводить до зміни методики, оскільки для осередненої складової густини $\overline{\varrho}$ можна записати

$$\overline{\varrho} = \varrho_* - c_m\overline{\eta} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_m\overline{e},$$

а характер залежності $\overline{e}$ від координати x є таким же, як характер залежності від x хімічного потенціалу $\overline{\eta}$.

Незалежно від умов закріплення, ми приймали значення хімічного потенціалу на поверхнях шару $x = \mp l$ таким, що дорівнює η_a. Водночас треба чекати, що значення хімічного потенціалу на вільній та закріпленій поверхнях будуть різними. З наведеного вище випливає, що вплив приповерхневої неоднорідності в околі нерухомої поверхні шару на частоти власних коливань є нехтовно малим. Вивчаючи такі частоти можна знехтувати впливом причин закріплення (наявністю контактуючого тіла).

Зауваження. *Робота виконана при частковій фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень.*

1. *Непийко С.А.* Физические свойства малых металлических частиц.- К., 1985.
2. *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах.- К., 1985.
3. *Бурак Я.И., Нагирный Т.С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах// Прикл. механика. – 1992. – Т. 28. – N. 12. – С.3-23.
4. *Бурак Я.Й., Нагірний Т.С., Грицина О.Р.* Про термодинамічне моделювання приповерхневих явищ в термомеханіці//Доп.АН УРСР. Сер.А. – 1991. – N.9. – С.66-70.
5. *Бурак Я.Й., Нагірний Т.С.* Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням приповерхневих явищ// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1993. – N.4. – С.24-30.
6. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике.- К., 1971.
7. *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах.- М., 1986.
8. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел.- К., 1982.

Nagirny T., Chervinka K.

MODELLING OF WAVE PROCESSES IN SOLIDS WITH DUE REGARD FOR THE INTERFACE NONHOMOGENEITY

That is proposed the interface nonhomogeneity concerned method of investigation for wave processes in solids, using the local gradient model of solids and averaging operation over a vibration period. The influence of interface nonhomogeneity on the normal mode of layer vibration for the different boundary conditions are studied. It is established that such effect for the fixed boundary of layers is negligible, while for the free boundary layers it is far larger and twice as far for the layer with one fixed surface.

Стаття надійшла до редколегії 13.11.98