ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 125–131

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 125–131

УДК 517.95

Зіновій Нитребич

ПРО ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ВІД РОЗВ'ЯЗКУ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ

Відомо [1], що між задачею Коші та крайовою задачею з багатоточковими умовами за часовою змінною для одного і того ж диференціального рівняння з частинними похідними існує принципова різниця. Вона полягає насамперед у такому: якщо розв'язком задачі Коші для однорідного диференціального рівняння з однорідними початковими умовами є лише тривіальний розв'язок, то багатоточкова задача для того ж рівняння з однорідними багатоточковими умовами окрім тривіального, може мати і ненульові розв'язки. Це означає, що багатоточкова задача для диференціальних рівнянь із частинними похідними здебільшого є некоректною крайовою задачею, хоча існують і коректні постановки таких задач [2].

Незважаючи на принципову відмінність між задачею Коші і багатоточковою задачею, все ж виявляється можливим граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші для одного і того ж диференціального рівняння. Опис цього переходу, а, отже, і доведення того факту, що крайова задача з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною є узагальненням задачі Коші, є метою цієї праці.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\left[\frac{d^n}{dt^n}+\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\right]T(t)=0\,, \tag{1}$$

де $a_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ - неперервні на $[0;+\infty)$ функції.

Запишемо для рівняння (1) початкові умови

$$T^{(k-1)}(0)=c_k\,,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{2}$$

та n-точкові умови

$$T((k-1)h)=c_k\,,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{3}$$

де c_k, $k=\overline{1,n}$, - довільні сталі, $h\neq 0$, $h\in R$.

Визначимо схему одержання розв'язку задачі Коші (1), (2), використовуючи розв'язок багатоточкової задачі (1), (3). Зауважимо, що простим прямуванням h до нуля з розв'язку задачі (1), (3) одержати розв'язок задачі (1), (2) неможливо. Для цього треба використовувати деяку "вагову" матрицю, що залежить від кроку h.

Нехай $\{T_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$ – нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння (1), тобто система розв'язків рівняння (1), які задовольняють умови

$$T_j^{(k-1)}(0) = \delta_{jk}\,,\ j,k = \overline{1,n}\,, \tag{4}$$

де δ_{jk} - символ Кронекера.

За нормальною фундаментальною системою розв'язків рівняння (1) розв'язок задачі (1), (2) записуємо так:

$$T(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(t)\,. \tag{5}$$

Поряд з нормальною фундаментальною системою розв'язків $\{T_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$ побудуємо систему розв'язків $\{\hat{T}_j(t,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ рівняння (1), які задовольняють умови

$$\hat{T}_j((k-1)h, h) = \delta_{jk}\,,\ j,k = \overline{1,n}\,. \tag{6}$$

Шукаючи елементи цієї системи у вигляді лінійної комбінації елементів нормальної фундаментальної системи розв'язків

$$\hat{T}_j(t,h) = \sum_{m=1}^{n} A_{mj}(h) T_m(t)\,,\ j = \overline{1,n}\,, \tag{7}$$

де $A_{mj}(h)$ – невідомі функції, залежні від кроку h, і задовольняючи умови (6), одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення $A_{mj}(h)$, яку запишемо у матричному вигляді

$$A(h)D(h) = E_n\,, \tag{8}$$

де $A(h) = \|A_{mj}(h)\|_{m,j=\overline{1,n}}$, $D(h) = \|T_j((m-1)h)\|_{m,j=\overline{1,n}}$, E_n – одинична матриця порядку n.

Матричне рівняння (8) однозначно розв'язане, якщо

$$\Delta(h) \equiv \det D(h) \not\equiv 0\,.$$

Якщо $\Delta(h) \equiv 0$, тоді задача (1), (3) є недоозначеною. Якщо ж $\Delta(h) \not\equiv 0$, тоді позначимо

$$M = \{h \in R\ :\ \Delta(h) = 0\}\,.$$

Множина M може збігатися з $\emptyset$ або складатися зі зліченної кількості точок $h_n \in R$, де $n \in N$.

Для $h \overline{\in} M$ матричне рівняння (8) однозначно розв'язується: $A(h) = D^{-1}(h)$. Тоді співвідношення (7) можна записати так:

$$T_j(t) = \sum_{k=1}^{n} T_j((k-1)h)\hat{T}_k(t,h)\,,\ j = \overline{1,n}\,. \tag{9}$$

Зауважимо, що формула (9) визначає, по-перше, тотожності стосовно $h \overline{\in} M$, а, по-друге, співвідношення між елементами двох систем $\{T_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$, $\{\hat{T}_j(t,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ розв'язків рівняння (1).

За системою $\{\hat{T}_j(t,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ розв'язок задачі (1), (3) визначається формулою

$$T(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{T}_k(t,h)\,,$$

або, врахувавши залежність розв'язку від h, $c_1, c_2, \cdots, c_n$, так:

$$T(t, h, c_1, c_2, \cdots, c_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{T}_k(t, h)\,. \tag{10}$$

Теорема 1. *Нехай для задачі (1), (3) $\Delta(h) \not\equiv 0$. Тоді розв'язок задачі (1), (2) може бути знайдений через розв'язки (10) задачі (1), (3) за допомогою граничного переходу, що визначається формулою*

$$T(t) = \lim_{h\to 0} \Big(T(t, h, 1, 1, 1, \cdots, 1)c_1 + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} T\left(t, h, 0, \frac{h^k}{k!}, \frac{(2h)^k}{k!}, \cdots, \frac{((n-1)h)^k}{k!}\right) c_{k+1}\Big)\,. \tag{11}$$

Доведення. Довести той факт, що формула (11) визначає розв'язок (5) задачі (1), (2), це те саме, що довести виконання співвідношення

$$\lim_{h\to 0} \Lambda(h) \begin{pmatrix} \hat{T}_1(t,h) \\ \hat{T}_2(t,h) \\ \cdots \\ \hat{T}_n(t,h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ \cdots \\ T_n(t) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

де "вагова" матриця $\Lambda(h)$ має вигляд

$$\Lambda(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & h & 2h & \cdots & (n-1)h \\ 0 & \frac{h^2}{2!} & \frac{(2h)^2}{2!} & \cdots & \frac{((n-1)h)^2}{2!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(2h)^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{((n-1)h)^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Для елементів нормальної фундаментальної системи розв'язків рівняння (1) на підставі (4) правильні такі розвинення в ряди Маклорена

$$T_j(t) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{T_j^{(k)}(0)}{k!} t^k\,,\ j = \overline{1, n}\,,$$

які можна записати у вигляді

$$T_j(t) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + o(t^{n-1})\,,\ j = \overline{1, n}\,. \tag{14}$$

Для близьких до нуля значень h з рівностей (14) одержуємо

$$T_j((k-1)h) = \frac{((k-1)h)^{j-1}}{(j-1)!} + o(h^{n-1})\,,\ j, k = \overline{1, n}\,. \tag{15}$$

Підставляючи (15) у тотожності (9), маємо

$$T_j(t) = \delta_{1j}\hat{T}_1(t, h) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{((k-1)h)^{j-1}}{(j-1)!} + o(h^{n-1}) \right) \hat{T}_k(t, h)\,,\ j = \overline{1, n}\,.$$

Записуючи ці тотожності у вигляді

$$T_j(t) = \lim_{h\to 0} \left\{ \delta_{1j}\hat{T}_1(t, h) + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{((k-1)h)^{j-1}}{(j-1)!} + o(h^{n-1}) \right) \hat{T}_k(t, h) \right\}\,,\ j = \overline{1, n}\,,$$

і відкидаючи нескінченно малі величини вищого порядку мализни, одержуємо рівності

$$T_j(t) = \lim_{h\to 0}\left\{\delta_{1j}\hat{T}_1(t,h) + \sum_{k=2}^{n}\frac{((k-1)h)^{j-1}}{(j-1)!}\hat{T}_k(t,h)\right\}\ ,\ j=\overline{1,n}\,,$$

які, очевидно, можна подати у матричному вигляді (12) з "ваговою" матрицею (13). Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо замість умов (3) задані n-точкові умови

$$T(\xi + (k-1)h) = c_k\ ,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{16}$$

де $\xi \neq 0$, тоді за поданою в теоремі 1 схемою з розв'язку n-точкової задачі (1), (16) можна одержати розв'язок задачі Коші для рівняння (1) з початковими умовами в точці $t=\xi$.

Зауваження 2. У багатоточкових умовах (3) вузли $t_k=(k-1)h$, $k=\overline{1,n}$, є рівновіддаленими. Якщо ж вузли $t_1,t_2,\cdots,t_n$ не є рівновіддаленими, тобто $t_i = h\xi_i$, $i=\overline{1,n}$, $0=\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n$ і $t_1,t_2,\cdots,t_n\in[0;+\infty)$, тоді схема граничного переходу при $h\to 0$ залишається такою самою, лише "вагова" матриця матиме вигляд

$$\Lambda(h)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & h\xi_2 & h\xi_3 & \cdots & h\xi_n\\ 0 & \frac{(h\xi_2)^2}{2!} & \frac{(h\xi_3)^2}{2!} & \cdots & \frac{(h\xi_n)^2}{2!}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \frac{(h\xi_2)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(h\xi_3)^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{(h\xi_n)^{n-1}}{(n-1)!}\end{pmatrix}.$$

Одержані результати для звичайних диференціальних рівнянь перенесемо на випадок диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Нехай задано диференціальне рівняння

$$L\left(t,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)\equiv\frac{\partial^n u}{\partial t^n}+\sum_{k=1}^{n}A_k\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-k}u}{\partial t^{n-k}}=0\,,\ x\in R^s\,, \tag{17}$$

де $A_k\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні лінійні диференціальні вирази, взагалі кажучи, безмежного порядку з коефіцієнтами, що неперервно залежать від t. Припускаємо, що для кожного $t\geqslant 0$ символи $A_k(t,\nu)$, $k=\overline{1,n}$, є цілими стосовно $\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_s)$ функціями.

Розглянемо для рівняння (17) початкові умови

$$\frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(0,x)=\varphi_k(x)\,,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{18}$$

та n-точкові умови вигляду

$$u(\xi_k h,x)=\varphi_k(x)\,,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{19}$$

де $h\neq 0$, $h\in R$, $0=\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<+\infty$.

Позначимо через $\{T_j(t,\nu)\}_{j=\overline{1,n}}$, $\{\hat{T}_j(t,\nu,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ дві сукупності розв'язків рівняння

$$L\left(t,\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu)=0\,, \tag{20}$$

які задовольняють відповідно умови

$$T_j^{(k-1)}(0,\nu) = \delta_{jk}\,,\ j,k=\overline{1,n}\,, \tag{21}$$

$$\hat{T}_j(\xi_k h,\nu,h) = \delta_{jk}\,,\ j,k=\overline{1,n}\,. \tag{22}$$

Якщо система розв'язків рівняння (20), яка задовольняє умови (21), може бути завжди однозначно побудованою, то про сукупності розв'язків $\{\hat{T}_j(t,\nu,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ робимо припущення, що вона може бути побудованою, тобто, що відповідний характеристичний визначник задачі (20), (22) $\Delta(\nu,h)\not\equiv 0$.

Для подання розв'язку багатоточкової задачі (17), (19) використаємо операційний метод, породжений узагальненою схемою відокремлення змінних [2], хоча для побудови розв'язку задачі (17), (19), зрозуміло, можна використовувати й інші методи.

Формальний розв'язок задачі (17), (19) запишемо у вигляді

$$u(t,x,h,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n) = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\hat{T}_j(t,\nu,h)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}, \tag{23}$$

де $\nu\cdot x = \nu_1x_1+\nu_2x_2+\cdots+\nu_sx_s$. У працях [2,3] зазначено класи аналітичних функцій, у яких поданий формальний розв'язок (23) задачі (17), (19) та подібних до неї задач є фактичним.

Теорема 2. *Розв'язок задачі Коші (17), (18) можна одержати з розв'язку (23) n-точкової задачі (17), (19) граничним переходом при $h\to 0$, що визначається формулою*

$$u(t,x) = \lim_{h\to 0}(u(t,x,h,\varphi_1,\varphi_1,\varphi_1,\cdots,\varphi_1)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^k}{k!}u(t,x,h,0,\xi_2^k\varphi_{k+1},\xi_3^k\varphi_{k+1},\cdots,\xi_n^k\varphi_{k+1})\,. \tag{24}$$

Доведення. Враховуючи вигляд розв'язку (23), з формули (24) одержуємо

$$u(t,x) = \lim_{h\to 0}\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\sum_{j=1}^{n}\hat{T}_j(t,\nu,h)\right\}\Bigg|_{\nu=0} +$$
$$+\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^k}{k!}\varphi_{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\sum_{m=2}^{n}\xi_m^k\hat{T}_m(t,\nu,h)\right\}\Bigg|_{\nu=0} =$$
$$=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{n}\hat{T}_j(t,\nu,h)\right\}\Bigg|_{\nu=0} +$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}\sum_{m=2}^{n}\frac{(h\xi_m)^k}{k!}\hat{T}_m(t,\nu,h)\right\}\Bigg|_{\nu=0}.$$

Використовуючи співвідношення (12), замінюючи в якому $T_j(t)$ на $T_j(t,\nu)$ і $\hat{T}_j(t,h)$ на $\hat{T}_j(t,\nu,h)$, знаходимо розв'язок задачі Коші (17), (18):

$$u(t,x) = \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu\cdot x]T_1(t,\nu)\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu\cdot x]T_{k+1}(t,\nu)\}\Big|_{\nu=0}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_j(t,\nu)\exp[\nu\cdot x]\}\Big|_{\nu=0}.$$

Оскільки $\{T_j(t,\nu)\}_{j=\overline{1,n}}$ – нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння (20), тоді формула

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_j(t,\nu)\exp[\nu\cdot x]\}\Big|_{\nu=0} \tag{25}$$

є поданням формального розв'язку задачі Коші (17), (18). Теорему доведено.

Зауважимо, що в праці [2] виділено класи аналітичних функцій, у яких знайдений формальний розв'язок (25) задачі Коші є фактичним. Зокрема, якщо $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – квазіполіноми, то, легко бачити, за допомогою одних лише операцій диференціювання, причому скінченної їх кількості, неважко будуються за формулою (25) так звані квазіполіноміальні розв'язки задачі Коші (17), (18).

Приклад. З розв'язку двоточкової задачі для хвильового рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_s\right]u(t,x)=0\ t>0,\ x\in R^s, \tag{26}$$

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\ u(h,x)=\varphi_2(x), \tag{27}$$

одержимо розв'язок задачі Коші для рівняння (26) з початковими умовами

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\varphi_2(x). \tag{28}$$

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}-a^2|\nu|^2\right]T(t,\nu)=0, \tag{29}$$

де $\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_s)$, $|\nu|^2=\nu_1^2+\nu_2^2+\cdots+\nu_s^2$.

У цьому випадку $\Delta(\nu,h)=\mathrm{sh}[a|\nu|h]$, а, отже, не дорівнює тотожно нулю, тому будуємо розв'язки $\hat{T}_1(t,\nu,h)$, $\hat{T}_2(t,\nu,h)$ рівняння (29):

$$\hat{T}_1(t,\nu,h)=\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|(h-t)]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]},\ \hat{T}_2(t,\nu,h)=\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}.$$

Формальний розв'язок задачі (26), (27) має вигляд

$$u(t,x,h,\varphi_1,\varphi_2)=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|(h-t)]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}.$$

Тепер для одержання розв'язку задачі Коші (26), (28) виконаємо граничний перехід за формулою (24):

$$u(t,x)=\lim_{h\to 0}(u(t,x,h,\varphi_1,\varphi_1)+hu(t,x,h,0,\varphi_2))=$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x](\hat{T}_1(t,\nu,h)+\hat{T}_2(t,\nu,h))\right\}\Big|_{\nu=0}\right)+$$

$$+\lim_{h\to 0}\left(h\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\hat{T}_2(t,\nu,h)\right\}\Big|_{\nu=0}\right)=$$

$$=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}(\hat{T}_1(t,\nu,h)+\hat{T}_2(t,\nu,h))\right\}\Bigg|_{\nu=0}+$$

$$+\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}h\hat{T}_2(t,\nu,h)\right\}\Bigg|_{\nu=0}.$$

Обчислюємо границі

$$\lim_{h\to 0}(\hat{T}_1(t,\nu,h)+\hat{T}_2(t,\nu,h))=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|(h-t)]+\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}=\left[\frac{0}{0}\right]=\mathrm{ch}[a|\nu|t],$$

$$\lim_{h\to 0}h\hat{T}_2(t,\nu,h)=\lim_{h\to 0}\frac{h\ \mathrm{sh}[a|\nu|t]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{a|\nu|}.$$

Знаходимо зображення розв'язку задачі Коші (26), (28):

$$u(t,x)=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu\cdot x]\mathrm{ch}[a|\nu|t]\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{a|\nu|}\right\}\Bigg|_{\nu=0}.$$

Отже, крайова задача з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною для диференціального рівняння із частинними похідними є узагальненням задачі Коші для цього ж рівняння, граничним переходом при прямуванні всіх вузлів до однієї (крайньої лівої) точки з розв'язку багатоточкової задачі можна одержати розв'язок задачі Коші з початковими умовами в цій точці.

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.
2. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К., 1993.
3. *Нитребич З.М.* Крайова задача в безмежній смузі // Мат.методи і фіз.-мех. поля. – 1994. – N 37. – С.16-21.

Nytrebych Z.

ON THE PASSAGE TO THE LIMIT FROM THE MULTIPOINT PROBLEM SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM SOLUTION

It is proved, that the problem with local multipoint conditions with respect to time variable for a differential equation is the Cauchy problem generalization for this equation. The scheme of the passage to the limit is proposed. From the multipoint problem solution one can obtain the Cauchy problem solution under tending all multipoint conditions nodes to one (extreme left) point from the soluton by means of the proposed scheme.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.99