ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат.1999.Вип.54.С.132–139 *Ser.Mech-Math.1999.Vol.54.P.132–139*

УДК 517.95

Маріанна Оліскевич

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З НЕСТАНДАРТНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Коректність мішаних задач для гіперболічних систем першого порядку, коефіцієнти яких залежать від однієї просторової та часової змінної, розглянуто у працях В.Ф. Ждановича, В.М. Кирилича, К.В. Брушлінського та інших авторів ([1] - [4]). У праці [5] доведено існування, єдиність та стійкість розв'язку мішаної задачі для лінійної гіперболічної системи з двома просторовими змінними і періодичними крайовими умовами. У цій статті ми досліджуємо мішану задачу для нелінійної гіперболічної системи з певними нестандартними крайовими умовами: на частині межі задано значення однієї з невідомих функцій, а на доповненні – іншої. Зазначимо, що розглянуті крайові умови були запропоновані для гіперболічних систем Г.А. Шинкаренком.

У смузі $P = \{(x,y,t) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0\}$ розглянемо мішану задачу для гіперболічної системи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{2} b_{ij}(x,y,t)\frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{2} c_{ij}(x,y,t)u_j + $$
$$+ g_i(u_1,u_2) = f_i(x,y,t) \qquad (i = 1,2) \tag{1}$$

з крайовими

$$u_1(0,y,t) = 0\,, \quad u_2(1,y,t) = 0\,, \tag{2}$$
$$u_1(x,0,t) = 0\,, \quad u_2(x,1,t) = 0\,, \tag{3}$$

і початковими умовами

$$u_i(x,y,0) = \varphi_i(x,y) \qquad (i = 1,2)\,, \tag{4}$$

де $A(x,y,t) = (a_{ij}(x,y,t))$, $B(x,y,t) = (b_{ij}(x,y,t))$ – симетричні квадратні матриці порядку 2, а функції $\varphi_i(x,y)$ задовольняють умови погодження. Позначимо $D = [0,1] \times [0,1]$.

Теорема 1. *Нехай $\varphi_i \in H^1(D)$, $f_i \in H^1_{\text{loc}}(\overline{P})$ $(i = 1,2)$, функції a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} та їхні перші похідні за t, x, y належать простору $L^\infty_{\text{loc}}(P)$, причому a_{ii}, b_{12} задовольняють умови (2), a_{12}, b_{ii} – умови (3), а c_{ij}, f_i – умови (2) і (3) $(i,j = 1,2)$. Функції $g_i(u_1,u_2)$ такі, що для довільних $u = (u_1,u_2)$, $v = (v_1,v_2)$ виконуються умови*

$$(g_i(u) - g_i(v))(u_i - v_i) \geqslant G_1|u_i - v_i|^p\,, \tag{5}$$

$$|g(u)| \leqslant G_2|u|^{p-1} \tag{6}$$

і квадратична форма $\sum\limits_{i,j}^{2} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}\xi_i\xi_j$ *додатно визначена, тобто існує стала* $G_0 > 0$ *така, що*

$$\sum_{i,j}^{2} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}\xi_i\xi_j \geqslant G_0 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2). \tag{7}$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1) – (4), який належить до простору $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{P})$.

Доведення. Нехай $\{\phi_k^i(x,y)\}$ $(k = 1,2,\dots)$, $(i = 1,2)$ фундаментальна система в просторі функцій з $H^1(D)$, причому $\phi_k^i(x,y)$ – власні функції оператора Лапласа

$$\Delta\phi_k^i = -\lambda_k \phi_k^i \qquad (i = 1,2)\,,$$

які задовольняють крайові умови

$$\phi_k^1(0,y) = 0\,, \quad \phi_k^2(1,y) = 0\,, \qquad \phi_k^1(x,0) = 0\,, \quad \phi_k^2(x,1) = 0\,,$$
$$\frac{\partial \phi_k^1(1,y)}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \phi_k^2(0,y)}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial \phi_k^1(x,1)}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial \phi_k^2(x,0)}{\partial y} = 0\,.$$

Наближений роз'язок задачі (1) – (4) шукаємо у вигляді

$$u_i^N = \sum_{k=1}^{N} c_{ik}^N(t)\phi_k^i(x,y) \qquad (i = 1,2) \qquad (N = 1,2,\dots) \tag{8}$$

зі співвідношень

$$\int\limits_D \Big(u_{it}^N + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}u_{jx}^N + \sum_{j=1}^{2} b_{ij}u_{jy}^N + \sum_{j=1}^{2} c_{ij}u_j^N + g_i(u_1^N, u_2^N)\Big)\phi_k^i\, dxdy =$$
$$= \int\limits_D f_i\phi_k^i dxdy \quad (k = 1,\dots,N; i = 1,2), \tag{9}$$

$$c_{ik}^N(0) = \alpha_{ik}^N \qquad (k = 1,\dots,N; i = 1,2)\,, \tag{10}$$

де α_{ik}^N – коефіцієнти сум $\varphi_i^N(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_{ik}^N\phi_k^i(x,y)$, які апроксимують при $N \to \infty$ функції φ_i в нормі $H^1(D)$. Рівності (9) є системою звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку за t для невідомих $c_{ik}^N(t)$ $(i = 1,2\,, k = 1,\dots,N)$. Оскільки коефіцієнти цієї системи є обмеженими функціями, а вільні члени з $L_1(0,T)$, то ця система однозначно розв'язна при початкових даних (10).

Оцінимо $\int\limits_{P_T} \sum\limits_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial t}(u_i^{N\,2})dxdydt$. Для цього домножимо кожну з рівностей (9) на відповідне $2c_{ik}^N(t)$, підсумуємо за k від 1 до N та зінтегруємо за t від 0 до T. Одержимо рівність

$$\int\limits_{P_T} 2\Big(u_{it}^N + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}u_{jx}^N + \sum_{j=1}^{2} b_{ij}u_{jy}^N + \sum_{j=1}^{2} c_{ij}u_j^N + g_i(u^N)\Big)u_i^N\, dxdydt =$$

$$= \int\limits_{P_T} 2 f_i u_i^N \, dx dy dt \quad (i = 1, 2) .$$

Звідси, використовуючи умову (3), оцінимо

$$\int\limits_{P_T} 2G_1 |u_i|^p \, dx dy dt + \int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t} (u_i^N)^2 dx dy dt - \int\limits_{P_T} \Big((6\mu + 1) u_i^{N\,2} + \mu \sum_{j=1}^{2} u_{jx}^{N\,2} +$$

$$+ \mu \sum_{j=1}^{2} u_{jy}^{N\,2} + \mu \sum_{j=1}^{2} u_j^{N\,2} \Big) dx dy dt \leqslant \int\limits_{P_T} f_i^2 dx dy dt \quad (i = 1, 2) ,$$

де μ – стала, що обмежує абсолютні величини коефіцієнтів системи.

Підсумовуючи останні нерівності за i від 1 до 2, одержимо

$$\int\limits_{P_T} 2G_1 \sum_{i=1}^{2} |u_i^N|^p \, dx dy dt + \int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t} \Big(\sum_{i=1}^{2} u_i^{N\,2} \Big) dx dy dt \leqslant \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} f_i^2 \, dx dy dt +$$

$$+ \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} ((8\mu + 1) u_i^{N\,2} + 2\mu \, (u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})) \, dx dy dt . \qquad (11)$$

Оцінимо $\int\limits_{P_T} \sum\limits_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2}) dx dy dt$. Для цього домножимо кожну i–ну рівність (9) на $\lambda_k c_{ik}^N(t)$, підсумуємо за k від 1 до N, за i від 1 до 2, зінтегруємо за t від 0 до T. У підсумку матимемо

$$- \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} \Big(u_{it}^N + \sum_{j=1}^{2} (a_{ij} u_{jx}^N + b_{ij} u_{jy}^N + c_{ij} u_j^N) + g_i(u^N) - f_i \Big) \Delta u_i^N dx dy dt = 0$$

або

$$- \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (u_{it}^N u_{ixx}^N + u_{it}^N u_{iyy}^N + g_i u_{ixx}^N + g_i u_{iyy}^N) \, dx dy dt - \int\limits_{P_T} \Big(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} u_{jx}^N u_{ixx}^N +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} u_{jx}^N u_{iyy}^N + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} u_{jy}^N u_{ixx}^N \Big) dx dy dt - \int\limits_{P_T} \Big(\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} u_{jy}^N u_{iyy}^N +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} u_j^N u_{ixx}^N + \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} u_j^N u_{iyy}^N \Big) dx dy dt = - \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (f_i u_{ixx}^N + f_i u_{iyy}^N) \, dx dy dt .$$

Звідси

$$\int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2}) dx dy dt - \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{2} (u_{it}^N(1, y, t) u_{ix}^N(1, y, t) -$$

$$- u_{it}^N(0, y, t) u_{ix}^N(0, y, t)) dy dt - \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{2} (u_{it}^N(x, 1, t) u_{iy}^N(x, 1, t) -$$

$$-u_{it}^N(x,0,t)u_{iy}^N(x,0,t)\,)dxdt-\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(g_iu_{ix}^N)+\frac{\partial}{\partial y}(g_iu_{iy}^N)\Big)dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T}\sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial g_i}{\partial u_j}u_{jx}^Nu_{ix}^N+\frac{\partial g_i}{\partial u_j}u_{jy}^Nu_{iy}^N\Big)dxdydt-\int\limits_{P_T}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{ix}^Nu_{jx}^N\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}u_{iy}^Nu_{jy}^N\Big)\Big)dxdydt-\int\limits_{P_T}\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{ix}^Nu_{jy}^N\Big)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}u_{iy}^Nu_{jx}^N\Big)\Big)dxdydt+\int\limits_{P_T}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{iy}^Nu_{jy}^N\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}u_{ix}^Nu_{jx}^N\Big)\Big)dxdydt-\int\limits_{P_T}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}c_{ij}u_i^Nu_{jx}^N\Big)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}c_{ij}u_i^Nu_{jy}^N\Big)\Big)dxdydt+\frac{1}{2}\int\limits_{P_T}\sum_{i,j=1}^{2}(a_{ijx}u_{ix}^Nu_{jx}^N+b_{ijy}u_{iy}^Nu_{jy}^N-a_{ijx}u_{iy}^Nu_{jy}^N-$$

$$-b_{ijy}u_{ix}^Nu_{jx}^N)\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i,j=1}^{2}(a_{ijy}u_{ix}^Nu_{jy}^N+b_{ijx}u_{iy}^Nu_{jx}^N)\,dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T}\sum_{i,j=1}^{2}(c_{ijx}u_i^Nu_{jx}^N+c_{ij}u_{ix}^Nu_{jx}^N+c_{ijy}u_i^Nu_{jy}^N+c_{ij}u_{iy}^Nu_{jy}^N)\,dxdydt=$$

$$=-\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(f_iu_{ix}^N)+\frac{\partial}{\partial y}(f_iu_{iy}^N)-f_{ix}u_{ix}^N-f_{iy}u_{iy}^N\Big)dxdydt\,.$$

Оскільки функції u_i^N задовольняють такі ж крайові умови, як і ϕ_i^k, а саме

$$\begin{array}{llll} u_1^N(0,y,t)=0\,, & u_{1x}^N(1,y,t)=0\,, & u_2^N(1,y,t)=0\,, & u_{2x}^N(0,y,t)=0\,,\\ u_1^N(x,0,t)=0\,, & u_{1y}^N(x,1,t)=0\,, & u_2^N(x,1,t)=0\,, & u_{2y}^N(x,0,t)=0\,, \end{array}\tag{12}$$

то, враховуючи умову (7) та умови, яким задовольняють функції a_{ij}, b_{ij} при $x=0,1$, $y=0,1$, одержимо, що

$$\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt\leqslant\int\limits_{P_T}4\mu\sum_{i=1}^{2}u_i^{N\,2}dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T}(14\mu+1-2G_0)\sum_{i=1}^{2}(u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(f_{ix}^2+f_{iy}^2)\,dxdydt\,.\tag{13}$$

Оцінимо $\int\limits_{P_T}\sum\limits_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_{it}^{N\,2})dxdydt$. Продиференціюємо кожну з рівностей (9) за t і домножимо на відповідну функцію $2c_{ik\,t}^N(t)$. Після підсумовування за k від 1 до N та інтегрування за t від 0 до T, одержимо

$$\int\limits_{P_T} 2\Big(u_{itt}^N+\sum_{j=1}^{2}(a_{ijt}u_{jx}^N+a_{ij}u_{jxt}^N+b_{ijt}u_{jy}^N+b_{ij}u_{jyt}^N+c_{ijt}u_j^N+c_{ij}u_{jt}^N\Big)u_{it}^N\,dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T} 2\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial g_i}{\partial u_j}u_{jt}^N u_{it}^N\,dxdydt=\int\limits_{P_T} 2f_{it}u_{it}^N\,dxdydt\,,\ (i=1,2)\,.$$

Підсумувавши ці рівності за i від 1 до 2, матимемо

$$\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{i=1}^{2}u_{it}^{N\,2}\Big)dxdydt+\int\limits_{P_T}2\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial g_i}{\partial u_j}u_{jt}^N u_{it}^N\,dxdydt-$$

$$-\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}((10\mu+1)u_{it}^{N\,2}+2\mu(u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2}+u_i^{N\,2}))\,dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{it}^N u_{jt}^N\Big)dxdydt+\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}u_{it}^N u_{jt}^N\Big)dxdydt-$$

$$-\int\limits_{P_T}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ijx}u_{jt}^N u_{it}^N+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ijy}u_{jt}^N u_{it}^N\Big)dxdydt\leqslant\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}f_{it}^2\,dxdydt\,,$$

Врахувавши крайові умови (12) та умову (7), одержимо нерівність

$$\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_{it}^{N\,2})\,dxdydt\leqslant\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}((14\mu+1-2G_0)u_{it}^{N\,2}dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T}2\mu(u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2}+u_i^{N\,2}))\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}f_{it}^2\,dxdydt\,,\tag{14}$$

Додамо нерівності (11), (13) і (14). Тоді отримаємо

$$\int\limits_{P_T}2G_1\sum_{i=1}^{2}|u_i^N|^p\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{P_T}\Big((14\mu+1)\sum_{i=1}^{2}u_i^{N\,2}+(14\mu n+1-2G_0)\sum_{i=1}^{2}u_{it}^{N\,2}\Big)dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T}(18\mu+1)\sum_{i=1}^{2}(u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(f_i^2+f_{it}^2+f_{ix}^2+f_{iy}^2)\,dxdydt\,.$$

Позначивши $K=\max\{14\mu+1,18\mu+1-2G_0\}$, матимемо

$$\int\limits_{P_T}2G_1\sum_{i=1}^{2}|u_i^N|^p\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt\leqslant\tag{15}$$

$$\leqslant K\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(f_i^2+f_{it}^2+f_{ix}^2+f_{iy}^2)\,dxdydt\,.$$

З нерівності (15) випливають оцінки

$$\int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial t}(u_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\, dxdydt \leqslant \tag{16}$$

$$\leqslant K \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\, dxdydt + \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2}(f_i^2 + f_{it}^2 + f_{ix}^2 + f_{iy}^2)\, dxdydt\,,$$

$$\int\limits_{P_T} 2G_1 \sum_{i=1}^{2} |u_i^N|^p\, dxdydt \leqslant \tag{17}$$

$$\leqslant K \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\, dxdydt + \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2}(f_i^2 + f_{it}^2 + f_{ix}^2 + f_{iy}^2)\, dxdydt\,.$$

Розглянемо нерівність (16). Норми $\|u_i^N(\cdot,\cdot,0)\|_{H^1(D)} = \|\varphi_i^N\|_{H^1(D)}$ обмежені рівномірно за N, а для доведення обмеженості норм $\|u_{it}^N(\cdot,\cdot,0)\|_{L^2(D)}$ $(i = 1, 2)$ помножимо кожну з рівностей (10) на $c_{ik\,t}$, підсумуємо їх за k від 1 до N і приймемо $t = 0$. Після нескладних перетворень матимемо

$$\int\limits_D (u_{it}^N(x,y,0))^2 dxdy \leqslant \int\limits_D |g_i(\varphi^N)||u_{it}^N(x,y,0)| dxdy +$$

$$+\mu \int\limits_D \sum_{j=1}^{2} (|\varphi_{jx}^N| + |\varphi_{jy}^N| + |\varphi_j^N|)|u_{it}^N(x,y,0)| dxdy + \int\limits_D f_i(x,y,0) u_{it}^N(x,y,0) dxdy.$$

Звідси, використовуючи умову (6), маємо оцінку

$$\int\limits_D (u_{it}^N(x,y,0))^2 dxdy \leqslant \Bigg(\int\limits_D \Big(\mu \sum_{j=1}^{2} (\varphi_{jx}^N + \varphi_{jy}^N + \varphi_j^N) +$$

$$+ G_2 |\varphi|^{p-1} + f_i(x,y,0)\Big)^2 dxdy\Bigg)^{1/2} \Bigg(\int\limits_D (u_{it}^{N\,2}(x,y,0) dxdy\Bigg)^{1/2}$$

або

$$\|u_{it}^N(\cdot,\cdot,0)\|_{L^2(D)} \leqslant C \quad (i = 1, 2)\,. \tag{18}$$

Врахувавши нерівності (18), з (16) одержимо

$$\int\limits_D \sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\, dxdy \leqslant K \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} +$$

$$+ u_{iy}^{N\,2})\, dxdydt + \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2}(f_i^2 + f_{it}^2 + f_{ix}^2 + f_{iy}^2)\, dxdydt +$$

$$+ \int\limits_D \sum_{i=1}^{2}(\varphi_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2}(x,y,0) + \varphi_{ix}^{N\,2} + \varphi_{iy}^{N\,2})\, dxdy,$$

звідки згідно з лемою Гронуола-Белмана матимемо

$$\int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (u_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\, dxdydt \leqslant C_1(T)\,. \tag{19}$$

Оцінивши праву частину нерівності (17) за допомогою (19), одержимо

$$\int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} |u_i^N|^p\, dxdydt \leqslant C_2(T)\,. \tag{20}$$

Додавши (19) і (20), матимемо

$$\int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (|u_i^N|^p + u_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\, dxdydt \leqslant C(T)\,. \tag{21}$$

Отже, на підставі (21) з послідовностей $\{u_i^N\}$ можна вибрати підпослідовності, які збігаються слабко в $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{P})$ до деяких елементів $u_i \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{P})$.

Тепер за схемою, наведеною в [6, с.169], легко показати, що $u(x,y,t) = (u_1(x,y,t), \ldots, u_n(x,y,t))$ є узагальненим розв'язком майже скрізь задачі (1) – (4).

Єдиність розв'язку задачі (1)–(4) доведемо від супротивного. Припустимо, що існує два різних розв'язки задачі $u^1(x,y,t)$ і $u^2(x,y,t)$. Тоді функція $u = u^1 - u^2$ буде розв'язком задачі (1) – (4), у якій $f_i \equiv 0$, $\varphi_i \equiv 0$ $(i = 1,2)$. Провівши аналогічні міркування, як і при доведенні нерівностей (11), (13), додавши їх і використавши лему Гронуола-Белмана, матимемо нерівність

$$\int\limits_{P_T} 2G_1 \sum_{i=1}^{2} |u_i^N|^p dxdydt + \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (u_i^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2}) dxdydt \leqslant 0\,,$$

з якої випливає, що $u \equiv 0$. Отже, ми одержали протиріччя. Теорему доведено.

---

1. *Брушлинский К.В.* О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – Т.23. – N6. – С.893-912.

2. *Жданович В.Ф.* Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. – 1959. – Т.47. – N3. – С. 307-354.

3. *Кирилич В.М.* Задача з нерозділеними граничними умовами для гіперболічної системи першого порядку на прямій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1984. – Вип. 24. – С. 90–94.

4. *Dickey R.W.* Stability theory for quasi-linear wave equatijns with linear damping// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1981. – A88. – N1-2. –P.25-41.

5. *Оліскевич М.О.* Стійкість розв'язку мішаної задачі для системи з трьома незалежними змінними з періодичними крайовими умовами// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 48. – С. 27-35.

6. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М., 1973.

Oliskevych M.

MIXED PROBLEM FOR NONLINEAR HYPERBOLIC SYSTEM OF THE FIRST ORDER WITH NONSTANDART BOUNDARY CONDITIONS

The nonstandart mixed problem for hyperbolic system of differential equations whith of the first order is considered. The theorem of existence and uniqueness of the solution is proved.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.99