ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Серія мех.-мат.1999.Вип.54.С.140–151

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.1999.Vol.54.P.140–151

УДК 517.956.4

Галина Пасічник

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНУ МАТРИЦЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИСИПАТИВНИХ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Поняття фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) є одним з найважливіших понять у теорії задачі Коші для параболічних систем. Сьогодні найповніші результати для ФМР задачі Коші одержано у випадку рівномірно параболічних за Петровським систем з обмеженими гельдеровими коефіцієнтами. Ці результати узагальнювались на випадок $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем С.Д.Ейдельмана [1 – 3], в яких кожна просторова змінна може мати свою вагу стосовно часової змінної, параболічних за Петровським систем, коефіцієнти яких можуть необмежено зростати при $|x| \to \infty$ [4 – 8], і параболічних за Петровським та $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з обмеженими коефіцієнтами у випадку певних вироджень на початковій гіперплощині. Досліджуючи задачі Коші для систем із зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами було введено дисипативні параболічні системи [4,5], які узагальнювали рівняння вигляду

$$(\partial_t - \Delta + q(x))u = 0,$$

де функція $q : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ необмежено зростає при $|x| \to \infty$. Ця праця присвячена поширенню поняття дисипативності на $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи і дослідженню ФМР задачі Коші для таких систем.

1. Нехай $n, b_1, \dots, b_n, N$ – задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \dots, 2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1, \dots, b_n$; $m_j \equiv s/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $M \equiv \sum_{j=1}^n m_j$; T – задане додатне число. Якщо $x \in \mathbb{R}^n$, то $x_1, \dots, x_n$ – координати точки x. Користуватимемось ще такими позначеннями: $||k|| \equiv \sum_{j=1}^n m_j k_j$, якщо k – мультиіндекс; $p(x, y) \equiv (\sum_{j=1}^n |x_j - \xi_j|^{2/m_j})^{1/2}$ – спеціальна відстань між точками x і y з $\mathbb{R}^n$; $\Pi_H \equiv \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, I – одинична матриця порядку N.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$(Lu)(t,x) \equiv \left(I\partial_t - \sum_{||k|| \leqslant 2s} a_k(t,x)\partial_x^k \right) u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де a_k, $||k|| \leqslant 2s$, – квадратні матриці порядку N.

Означення 1. *Систему (1) називатимемо дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує неперервна функція $D : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:*

1) $D(x) \to \infty$ при $||x|| \to \infty$;

2) функції $b_k(t,x) \equiv a_k(t,x)D(x)^{||k||-2s}$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, $||k|| \leqslant 2s$, обмежені;

3) система рівнянь

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,x)\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}} \right) v(t,x) = 0$$

з обмеженими коефіцієнтами та додатковою просторовою змінною x_{n+1} є рівномірно на $\Pi_{[0,T]}\times\mathbb{R}$ $\overrightarrow{2B}$-параболічною, де $\overrightarrow{2B} \equiv (2b_1, \dots, 2b_n, 2s)$, тобто p-корені рівняння

$$\det \left(Ip - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,x)(i\sigma)^k \mu^{k_{n+1}} \right) = 0$$

задовольняють умову

$$\exists\delta > 0 \quad \forall(t,x) \in \Pi_{[0,T]} \quad \forall\sigma \in \mathbb{R}^n \quad \forall\mu \in \mathbb{R}:$$

$$\mathrm{Re}\ \ p(t,x,\sigma,\mu) \leqslant -\delta \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^{2b_j} + \mu^{2s} \right).$$

Функція D називається характеристикою дисипації системи (1).

Припускатимемо, що виконуються такі умови на коефіцієнти a_k, $||k|| \leqslant \leqslant 2s$.

β_1. Система (1) є дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною в $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D.

β_2. a_k, $||k|| \leqslant 2s$, мають неперервні похідні $\partial_x^l a_k$, $||k|| \leqslant 2s$, $||l|| \leqslant 2s$, для яких правильні оцінки

$$|\partial_x^l a_k(t,x)| \leqslant C(D(x))^{2s-||k||+||l||(1-\epsilon)}, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]},$$

де $C > 0$, $\epsilon \in (0,1)$; функції b_k, $||k|| \leqslant 2s$ є неперервними за t рівномірно стосовно $x \in \mathbb{R}^n$.

β_3. $\partial_x^l a_k$, $||k|| \leqslant 2s$, $||l|| \leqslant 2s$ задовольняють умову Гельдера з показником $\alpha \in (0,1)$, тобто

$$\forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall\{x,x'\} \subset K(0,R): \quad |\partial_x^l a_k(t,x)| - \partial_{x'}^l a_k(t,x')| \leqslant C(p(x,x'))^\alpha.$$

β_4. Нехай $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функція, яка має локально неперервні за Гельдером з показником $\alpha \in (0,1)$ похідні до порядку $4b$, які пов'язані з характеристикою дисипації D умовою

$$\exists C > 0 \quad \exists\eta > 0 \quad \exists\epsilon \in (0,1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+^n, \quad ||j|| \leqslant 4b:$$

$$|\partial_x^j g(x)| \leqslant C\eta(D(x))^{||j||(1-\epsilon)},$$

причому число η досить мале.

За умов $\beta_1 - \beta_3$ буде побудована ФМР задачі Коші та одержані її попередні оцінки. За допомогою функції g, яка задовольняє умову β_4, ці оцінки будуть уточнені.

2. Щоб побудувати ФМР задачі Коші для системи (1), скористаємось процедурою Леві. Спочатку опишемо головний член формули для ФМР.

Для цього розглянемо допоміжну систему рівнянь

$$\left(I\partial_t - \sum_{\|k\|+k_{n+1}=2s} b_k(t,y)\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}}\right) v(t,x,x_{n+1}) = 0,$$

$$(t,x,x_{n+1}) \in \Pi_{(0,T]} \times \mathbb{R},$$

де y – фіксована точка простору $\mathbb{R}^n$. За умов β_1 і β_2 на підставі результатів з [2] існує ФМР задачі Коші для системи (2), для якої правильні оцінки

$$\left|\partial_x^k \partial_{x_{n+1}}^{k_{n+1}} Z_0(t,x;\tau,\xi;x_{n+1}-\xi_{n+1};y)\right| \leqslant C_{kk_{n+1}} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-(M+1+\|k\|+k_{n+1})/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)^{1-q}|x_{n+1}-\xi_{n+1}|^q\},$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{x_{n+1},\xi_{n+1}\} \subset \mathbb{R},$$

де k і k_{n+1} довільні, $C_{kk_{n+1}} > 0$, $c > 0$ – деякі сталі; $q \equiv 2s/(2s-1)$; $E_c(t,\tau,x) \equiv \equiv \exp\left\{-c\sum\limits_{j=1}^{n}(t-\tau)^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\right\}$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^n$. Зокрема, функція $\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)$, $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$, як функція аргументу $(t-\tau)^{-1/(2s)}z$ при фіксованих t,τ,x,ξ, є цілою функцією, для якої правильні оцінки

$$\left|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)\right| \leqslant C_k(t-\tau)^{-(M+1+\|k\|)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)^{1-q}|z_1|^q +$$

$$+ c'(t-\tau)^{1-q}|z_2|^q\}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

де $C_k > 0$, $c > 0$, $c' > 0$.

Нехай $\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y) \equiv F_{z\to\eta}[Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)]$. Тоді матриця $\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, є ФМР задачі Коші для системи

$$\left(I\partial_t - \sum_{\|k\|+k_{n+1}=2s} b_k(t,y)\eta^{k_{n+1}}\partial_x^k\right) \hat{v}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

для довільно фіксованих точок $\eta \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}^n$.

З оцінки (3) на підставі леми 1.1 з [5] випливають такі оцінки:

$$\left|\partial_x^k \hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)\right| \leqslant C_k(t-\tau)^{-(M+\|k\|)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)\eta^{2s}\},$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Візьмемо

$$\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) \equiv \hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;D(y);y).$$

За допомогою оцінок (4) одержують оцінки

$$\left|\partial_x^k \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \leqslant C_k(t-\tau)^{-(M+\|k\|)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^{2s}\},$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Зауважимо, що матриця $\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, є ФМР задачі Коші для системи

$$\left(I\partial_t - \sum_{\|k\|\leqslant 2s} a_k(t,y)\partial_x^k\right) v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6}$$

для кожної фіксованої точки $y \in \mathbb{R}^n$.

Наведемо деякі властивості ФМР задачі Коші для системи (6).

Властивість 1. *Нехай коефіцієнти системи (6) задовольняють умови* β_1 *і* β_2. *Тоді правильні оцінки*

$$\left|\partial_x^k \partial_y^l \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(M+||k||+||l||(1-\epsilon))/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times \exp\{-c(t,\tau)(D(y))^{2s}\}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad ||k| > 0, \quad ||l|| \leqslant 2s. \tag{7}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну систему рівнянь

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,y)\eta^{k_{n+1}}(iz)^k\right) W(t,\tau;z,\eta;y) = 0,$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

На підставі умови β_1 для нормальної ФМР системи (8) правильна оцінка

$$|W(t,\tau;z,\eta;y)| \leqslant C\exp\{-\delta e(\sigma)(t-\tau) - \delta\eta^{2s}(t-\tau) + ce(\gamma)(t-\tau)\},$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \equiv \sigma + i\gamma \in \mathbb{C}^n, \quad \eta \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

де $C > 0$, $c > 0$, $\delta > 0$, $e(\sigma) \equiv \sum_{j=1}^n \sigma_j^{2b_j}$. Зокрема, при $\eta = D(y)$ система (8) матиме вигляд

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||\leqslant 2s} a_k(t,y)(iz)^k\right) Q(t,\tau;z,y) = 0, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{10}$$

а оцінка (9) – вигляд

$$|Q(t,\tau;z,y)| \leqslant C\exp\{-\delta e(\sigma)(t-\tau) - \delta(D(y))^{2s}(t-\tau) + ce(\gamma)(t-\tau)\},$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{11}$$

Зауважимо, що тоді

$$\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) \equiv (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x-\xi,\sigma)\} Q(t,\tau,\sigma,y)d\sigma.$$

Диференціюючи (10) за y і використовуючи (11) та умову β_2, одержуємо

$$\left|\partial_y^l Q(t,\tau;z,y)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-||l||(1-\epsilon)/(2s)} \exp\{-\delta_1 e(\sigma)(t-\tau) -$$
$$-\delta_1(D(y))^{2s}(t-\tau) + c_1 e(\gamma)(t-\tau)\},$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \equiv \sigma + i\gamma \in \mathbb{C}^n, \quad ||l|| \leqslant 2s, \quad 0 < \delta_1 < \delta, \quad c_1 > c. \tag{12}$$

З оцінки (12) та леми 1.1 з [5] випливає оцінка (7).

Властивість 2. *Нехай коефіцієнти системи (6) задовольняють умови* β_1, β_2 *і* β_3. *Тоді правильні оцінки*

$$\forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall \{y, y'\} \subset K(0,R):$$

$$\left|\partial_x^k \partial_y^l \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) - \partial_x^k \partial_{y'}^l \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y')\right| \leqslant C(p(y,y'))^\alpha \times$$

$$\times(t-\tau)^{-(M+||k||+||l||(1-\epsilon))/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad ||k||>0,\quad ||l||\leqslant 2s. \tag{13}$$

Доведення. Достатньо оцінити $Q(t,\tau;z,y)-Q(t,\tau;z,y')$. Запишемо тотожність

$$\left(I\partial_t-\sum_{||k||\leqslant 2s}a_k(t,y)(iz)^k\right)(Q(t,\tau;z,y)-Q(t,\tau;z,y'))=$$

$$=\sum_{||k||\leqslant 2s}(a_k(t,y)-a_k(t,y'))(iz)^kQ(t,\tau;z,y').$$

Тоді, використовуючи умови β_1 і β_2 та оцінку (11), одержуємо

$$|Q(t,\tau;z,y)-Q(t,\tau;z,y')|\leqslant C(p(y,y'))^\alpha\exp\{-\delta e(\sigma)(t-\tau)+$$

$$+ce(\gamma)(t-\tau)\},\quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \{y,y'\}\subset K(0,R),\quad z\equiv\sigma+i\gamma\in\mathbb{C}^n.$$

Методом математичної індукції доводиться правильність оцінки

$$\left|\partial_y^lQ(t,\tau;z,y)-\partial_{y'}^lQ(t,\tau;z,y')\right|\leqslant C(p(y,y'))^\alpha(t-\tau)^{-||l||(1-\epsilon)/(2s)}\times$$

$$\times\exp\{-\delta e(\sigma)(t-\tau)+ce(\gamma)(t-\tau)\},\quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \{y,y'\}\subset K(0,R),\quad z\in\mathbb{C}^n.$$

З останньоі нерівності та леми 1.1 з [5], випливає оцінка(13).

3. Наведемо основну теорему, яка стосується ФМР задачі Коші для дисипативної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи (1).

Теорема. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови $\beta_1-\beta_3$. Тоді існує ФМР $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ задачі Коші для системи (1), для якої правильні оцінки*

$$\left|\partial_x^kZ(t,x;\tau,\xi)\right|\leqslant C(t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad ||k||\leqslant 2s, \tag{14}$$

де $C>0$, $c>0$. Якщо для коефіцієнтів системи (1) і функції g виконані умови $\beta_1-\beta_4$, то для ФМР задачі Коші для системи (1) правильні оцінки

$$\left|\partial_x^kZ(t,x;\tau,\xi)\right|\leqslant C\sum_{p=0}^{||k||}(t-\tau)^{-(M+||k||-p)/(2s)}(D(x))^{p(1-\epsilon)}\times$$

$$\times E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{g(x)-g(\xi)\},\quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad ||k||\leqslant 2s. \tag{15}$$

4. ФМР задачі Коші для системи (1) шукатимемо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi)=\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;x)+\int_\tau^t d\theta\int_{\mathbb{R}^n}\hat{Z}(t,x;\theta,y;x)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{16}$$

де $\varphi(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ – невідома матриця порядку N, яку підберемо так, щоб функція $Z(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ була розв'язком системи (1) для будь-якої фіксованої точки $(\tau,\xi)\in\Pi_{[0,T]}$.

Припускатимемо, що шукана функція φ є неперервною і для неї правильні оцінки

$$|\varphi(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-\lambda)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi); \tag{17}$$

$$\forall R>0 \quad \exists \alpha_1 \in (0,1), \quad \alpha_1<\lambda, \quad \forall \{x,x'\}\subset K(0,R): \quad |\Delta_x^{x'}\varphi(t,x;\tau,\xi)| \leqslant$$
$$\leqslant C(p(x,x'))^{\alpha_1}(t-\tau)^{-1-(M-\alpha_2)/(2s)}(E_c(t,\tau,x-\xi)+E_c(t,\tau,x'-\xi)),$$
$$0\leqslant \tau<t\leqslant T, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \quad \alpha_2\equiv\lambda-\alpha_1. \tag{18}$$

Застосувавши диференціальний вираз L з (1) до функції (16) і використавши припущення стосовно φ, одержимо для φ інтегральне рівняння

$$\varphi(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi) + \int_\tau^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$
$$0\leqslant\tau<t\leqslant T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{19}$$

де

$$K(t,x;\tau,\xi) = \sum_{\|k\|\leqslant 2s} a_k(t,x)\sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_z^{k-j}\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;z)\,|_{z=x}\,. \tag{20}$$

Оцінимо ядро K, використовуючи (7), (20) та умови β_2. Маємо

$$|K(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-\lambda)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$
$$0\leqslant\tau<t\leqslant T, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \quad \lambda\equiv \min_{1\leqslant j\leqslant n}(m_j\epsilon). \tag{21}$$

На підставі оцінки (21) рівняння (19) розв'язують методом послідовних наближень і φ визначають формулою

$$\varphi(t,x;\tau,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,x;\tau,\xi), \quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{22}$$

де $K_1\equiv K$, а для $m\geqslant 2$

$$K_m(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t d\theta\int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\theta,y)K_{m-1}(\theta,y;\tau,\xi)dy. \tag{23}$$

Оцінимо ядра K_m, $m\geqslant 2$. З (21) і (23) маємо

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C_2(t-\tau)^{-1-(M-2\lambda)/(2s)}E_{c(1-\epsilon)}(t,\tau,x-\xi).$$

Методом математичної індукції доведено оцінку

$$|K_m(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C_m(t-\tau)^{-1-(M-m\lambda)/(2s)}E_{c(1-(m-1)\epsilon)}(t,\tau,x-\xi).$$

Виберемо натуральне число m_0 так, щоб $m_0=\left[\frac{M-2s}{2s}\right]+1$. Тоді

$$|K_{m_0}(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C_* E_{c_*}(t,\tau,x-\xi), \quad 0\leqslant\tau<t\leqslant T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{24}$$

де $C_*>0$, $c_*\equiv c(1-\epsilon_0)$, $\epsilon_0\equiv\epsilon(m_0-1)$, $\epsilon_0<1/2$.

Ядра K_m з $m>m_0$ оцінюємо так. Спочатку на підставі нерівностей (21) і (24) маємо

$$|K_{m_0+1}(t,x;\tau,\xi)| \leqslant CC_*LB\left(\frac{\lambda}{2s},1\right)(t-\tau)^{\lambda/(2s)}E_{c_*}(t,\tau,x-\xi),$$

де
$$L \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ -c\epsilon_0 \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{q_j} \right\} dz,$$
B – бета-функція Ейлера. Далі методом математичної індукції доводимо оцінку для будь-якого $k > 1$
$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)| \leqslant (CL)^k C_* \prod_{j=1}^{k} B\left(\frac{\lambda}{2s}, 1 + \frac{(j-1)\lambda}{2s}\right) \times$$
$$\times (t-\tau)^{k\lambda/(2s)} E_{c_*}(t,\tau,x-\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{25}$$
За допомогою формули
$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$
в якій Γ – гама-функція Ейлера, оцінка (25) набуває вигляду
$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C_* \frac{(CL\Gamma(\frac{\lambda}{2s})(t-\tau)^{\lambda/(2s)})^k}{\Gamma(1+\frac{k\lambda}{2s})} E_{c_*}(t,\tau,x-\xi),$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

З одержаних оцінок ядер K_m випливає, що ряд (22) мажорується збіжним рядом
$$C\left(\sum_{m=1}^{m_0} (t-\tau)^{-1-(M-m\lambda/(2s)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Gamma(\frac{\lambda}{2s}))^k (t-\tau)^{k\lambda/(2s)}}{\Gamma(1+\frac{k\lambda}{2s})}\right) \times$$
$$\times E_{c_*}(t,\tau,x-\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Отже, ряд (23) при t, τ, x, ξ таких, що $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $t-\tau \geqslant \delta$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, де δ – довільна досить мала додатна стала, збігається абсолютно й рівномірно і для його суми φ правильна оцінка (17).

Тепер доведемо правильність оцінки (18). При $(p(x,x'))^{2s} > \frac{1}{2}(t-\tau)$ оцінка (18) випливає з (17). Тому достатньо розглянути випадок, коли $(p(x,x'))^{2s} \leqslant \frac{1}{2}(t-\tau)$. Використовуючи (19), запишемо
$$\Delta_x^{x'} \varphi(t,x;\tau,\xi) = \Delta_x^{x'} K(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{\eta} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau.\xi)dy +$$
$$+ \int\limits_{\eta}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy + \int\limits_{\eta}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x';\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau.\xi)dy \equiv \sum_{j=1}^{4} J_j, \tag{26}$$
де величина η така, що $t-\eta = (p(x,x'))^{2s}$.

На підставі (20) маємо
$$\Delta_x^{x'} K(t,x;\tau,\xi) = \sum_{||k|| \leqslant 2s} (a_k(t,x) - a_k(t,x')) \sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_y^{k-j} \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\, |_{y=x} +$$

$$+\sum_{||k||\leqslant 2s} a_k(t,x')\Delta_x^{x'}\left(\sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_y^{k-j}\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\mid_{y=x}\right),$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \{x,x'\}\subset K(0,R). \tag{27}$$

[ля оцінки другого доданка з (27) оцінимо спочатку різницю

$$\left|\partial_x^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)|_{y=x}-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x'}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\partial_x^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)|_{y=x}-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x}\right|+$$

$$+\left|\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x}-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x'}\right|. \tag{28}$$

Скориставшись теоремою про середнє та оцінкою (7), одержимо

$$\left|\partial_x^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)\right|\leqslant C(p(x,x'))^{\lambda_0}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-(M+||m||+||l||(1-\epsilon)+\lambda_0)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^{2s}\},$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \{x,x',\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n,\quad (p(x,x'))^{2s}\leqslant\frac{1}{2}(t-\tau),\quad \lambda_0\in(0,1]. \tag{29}$$

З (13), (29), взявши $\lambda_0=\alpha$, та (28) випливає оцінка

$$\forall R>0\quad \exists C>0\quad \forall\{x,x'\}\subset K(0,R),\quad (p(x,x'))^{2s}\leqslant\frac{1}{2}(t-\tau):$$

$$\left|\partial_x^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)|_{y=x}-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x'}\right|\leqslant C(p(x,x'))^{\alpha}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-(M+||m||+||l||(1-\epsilon)+\alpha)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{30}$$

Використовуючи (7), (27), (30) та умови β_2 і β_3, одержимо

$$\forall R>0\quad \exists\alpha_1\in(0,1),\quad \alpha_1<\lambda,\quad \forall\{x,x'\}\subset K(0,R),\quad (p(x,x'))^{2s}\leqslant\frac{1}{2}(t-\tau):$$

$$|\Delta_x^{x'}K(t,x;\tau,\xi)|\leqslant C(p(x,x'))^{\alpha_1}(t-\tau)^{-1-(M-\alpha_2)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha_2\equiv\lambda-\alpha_1. \tag{31}$$

Оскільки в інтегралі J_2 $t-\theta\geqslant(p(x,x'))^{2s}$, то, використовуючи (17) та (31),)держимо

$$|J_2|\leqslant C(p(x,x'))^{\alpha_1}(t-\tau)^{-1-(M-\alpha_2-\lambda)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi).$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \{x,x'\}\subset K(0,R). \tag{32}$$

Інтеграли J_3 і J_4 оцінюємо однаково. Оцінимо, наприклад, перший з них. На підставі оцінок (17), (21) і того, що

$$\int_\eta^t (t-\theta)^{\frac{\lambda}{2s}-1}(\theta-\tau)^{\frac{\lambda}{2s}-1}d\theta\leqslant\frac{2s}{\lambda}\left(\frac{1}{2}(t-\tau)\right)^{\frac{\lambda}{2s}-1}\int_\eta^t(t-\theta)^{\frac{\lambda}{2s}-1}d\theta=$$

$$= \frac{2s}{\lambda}\left(\frac{1}{2}(t-\tau)\right)^{\frac{\lambda}{2s}-1}(p(x,x'))^{\lambda},$$

одержимо

$$|J_3| \leqslant C(p(x,x'))^{\alpha_1}(t-\tau)^{-(M-\alpha_2)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (p(x,x'))^{2s} \leqslant \frac{1}{2}(t-\tau). \tag{33}$$

З оцінок (31) – (33) випливає правильність оцінки (18).

Тепер доведемо правильність для Z оцінок (14). Для першого доданка з (16) маємо оцінку

$$\left|\partial_x^k \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;x)\right| = \left|\sum_{j\leqslant k} C_k^j \partial_x^j \partial_y^{k-j}\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\,|_{y=x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C(t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$t \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad ||k|| \leqslant 2s. \tag{34}$$

Оцінимо похідні від другого доданка

$$W(t,x;\tau,\xi) \equiv \int_{\tau}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{Z}(t,x;\theta,y;x)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Якщо $||k|| < 2s$, то за допомогою властивості, аналогічної властивості 5 з [2], та оцінок (17) і (34) одержимо

$$\left|\partial_x^k W(t,x;\tau,\xi)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(M+||k||-\lambda)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{35}$$

У випадку, коли $||k|| = 2s$, запишемо

$$\left|\partial_x^k W(t,x;\tau,\xi)\right| = \int_{\tau}^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t,x;\theta,y;x)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t,x;\theta,y;x)(\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy - \varphi(\theta,x;\tau,\xi))dy +$$

$$\int_{t_1}^{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t,x;\theta,y;x)dy\right)\varphi(\theta,x;\tau,\xi)d\theta \equiv L_1 + L_2 + L_3, \tag{36}$$

де число t_1 таке, що $t - t_1 = \frac{1}{2}(t-\tau)$.

Використовуючи (17) та (34) і те, що для будь-якого $\theta \in [\tau, t_1]$ $t - \theta \geqslant t - t_1 = = \frac{1}{2}(t-\tau)$ одержимо

$$|L_1| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-\lambda)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi). \tag{37}$$

Для оцінки L_2 розглянемо $x \in K\left(0, \frac{R}{2}\right)$, де R – будь-яке фіксоване додатне число. Запишемо L_2 у вигляді

$$L_2 = \int_{t_1}^{t} d\theta \int_{K(0,R)} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; x)(\varphi(\theta, y; \tau, \xi)dy - \varphi(\theta, x; \tau, \xi))dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}^n \setminus K(0,R)} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; x)(\varphi(\theta, y; \tau, \xi) - \varphi(\theta, x; \tau, \xi))dy \equiv L_2' + L_2''. \quad (38)$$

За допомогою (18) та (34) маємо

$$|L_2'| \leqslant C \int_{t_1}^{t} (t-\theta)^{\frac{\alpha_1}{2s}-1}(\theta-\tau)^{\frac{\alpha_2}{2s}-1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t, \theta, x-y) \times$$

$$\times (E_c(\theta, \tau, y-\xi) + E_c(\theta, \tau, x-\xi))((t-\theta)(\theta-\tau))^{-\frac{M}{2s}} dy \leqslant$$

$$\leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-\alpha_1-\alpha_2)/(2s)} E_c(t, \tau, x-\xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in K\left(0, \frac{R}{2}\right). \quad (39)$$

Для оцінки L_2'' за допомогою (17) запишемо

$$|\varphi(\theta, y; \tau, \xi) - \varphi(\theta, x; \tau, \xi)| \leqslant |\varphi(\theta, y; \tau, \xi)| + |\varphi(\theta, x; \tau, \xi)| \leqslant$$

$$\leqslant C(\theta-\tau)^{-1-(M-\lambda)/(2s)}(E_c(\theta, \tau, y-\xi) + E_c(\theta, \tau, x-\xi)). \quad (40)$$

Скориставшись нерівністю

$$|x_j - y_j|^{q_j} \geqslant ||x_j| - |y_j||^{q_j} \geqslant \left(\frac{R}{2}\right)^{q_j},$$

$$1 \leqslant j \leqslant n, \quad x \in K\left(0, \frac{R}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus K(0, R),$$

та оцінкою (5), одержимо

$$|L_2''| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-2\lambda)/(2s)} E_c(t, \tau, x-\xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in K\left(0, \frac{R}{2}\right). \quad (41)$$

Для оцінки L_3 запишемо

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; x)dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_z^{k-j} \hat{Z}(t, x; \theta, y; z) \mid_{z=x} +$$

$$+ \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; z) \mid_{y=x})dy = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_z^{k-j} \hat{Z}(t, x; \theta, y; z)|_{z=x} dy.$$

Використавши оцінку (7), одержимо

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; x)dy \right| \leqslant C \sum_{j<k} (t-\theta)^{-(||j||+||k-j||(1-\epsilon))/(2s)} \leqslant$$

$$\leqslant C(t-\theta)^{-(\|k\|-\lambda)/(2s)}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < \|k\| \leqslant 2s.$$

Тоді

$$|L_3| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-2\lambda)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi), \quad t \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (42)$$

З (35) – (39), (41) і (42) одержуємо оцінку

$$\left|\partial_x^k W(t,x;\tau,\xi)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(M+\|k\|-\lambda)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi),$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \|k\| \leqslant 2s. \quad (43)$$

З оцінок (34) та (43) випливає оцінка (14).

Зауважимо, що в оцінці (14) нема характеристики дисипації. Тому вона потребує уточнення. Для одержання оцінки (15) введемо нову невідому векторфункцію u_1 за допомогою рівності

$$u(t,x) = e^{g(x)} u_1(t,x), (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де g задовольняє умову β_4. Тоді стосовно u_1 з (1) одержимо рівняння

$$\partial_t u_1(t,x) = \sum_{\|j\| \leqslant 2s} \left(\sum_{\substack{k \geqslant j, \\ \|k\| 2s}} C_k^j e^{-g(x)} a_k(t,x) \partial_x^{k-j} e^{g(x)} \right) \partial_x^j u_1(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \quad (44)$$

Коефіцієнти системи (44) задовольняють умови β_1 – β_3. Тому існує ФМР $Z_1(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, задачі Коші для системи (44), для якої правильна оцінка (14). Тоді ФМР задачі Коші для системи (1) матиме вигляд

$$Z(t,x;\tau,\xi) \doteq \exp\{g(x)-g(\xi)\} Z_1(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (45)$$

З (45) безпосереднім диференціюванням одержуємо оцінку (15).

---

1. *Ейдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем // Докл.АН СССР. – 1966. – Т.133. – N 1. – С. 40-43.
2. *Ивасишен С.Д. Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$–параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – К., 1968. – Вып.1. – С. 3-175, 271-273.
3. *Ивасишен С.Д.* Интегральные представления и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42. – N 4. – С. 500-506.
4. *Эйдельман С.Д.* О задаче Коши для параболических систем с растущими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1959. – Т.127. – N 4. – С. 760-763.
5. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М., 1964.
6. *Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О.* О поведении решений параболических уравнений второго порядка с диссипацией // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т.7. – N 9. – С. 1684-1695.
7. *Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О.* Исследование поведения L_2–норм решений сильно параболических систем с диссипацией // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – Т.37. – N 3. – С. 676-690.

8. *Эйдельман С.Д.* Параболические уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Т.63. – М., 1990. – С. 201-316.

Pasichnyk G.

ON FUNDAMENTAL MATRIX OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM OF DESIPATIVE $\overrightarrow{2b}$-PARABOLIC SYSTEMS

The definition of desipative $\overrightarrow{2b}$-parabolic system was introduced. The fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for such system was constructed, it was established the estimations of elements of this matrix and derivatives of the elements.

Стаття надійшла до редколегії 19.05.99