ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 152–158 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 152–158*

УДК 517.5

Михайло Півкач

АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ ЗОВНІ МАЛИХ МНОЖИН АНАЛІТИЧНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ФУНКЦІЙ

Вступ. Розглянемо аналітичні в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функції, зображувані лакунарними степеневими рядами вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\lambda_n}, \tag{1}$$

де $\lambda_0 = 0$, $\{\lambda_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbb{N}$, $\lambda_n \uparrow +\infty (n \to +\infty)$. Для $r \in (0,1)$ позначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^{\lambda_n} : n \geqslant 0\}$, $\nu_f(r) = \max\{\lambda_n : \mu_f(r) = |a_n| r^{\lambda_n}\}$.

Обмеження на (λ_n) разом з умовою на зростання $\mu_f(r)$ знизу (тобто, на можливу мінімальну швидкість зростання) забезпечують здебільшого певну регулярність у поводженні аналітичної функції вигляду (1). Наведемо теорему А. Зауважимо, що вона є частковим випадком одного результату з [1] і посилює теорему А. Вімана [2].

Теорема А. *Для того щоб для кожної функції f вигляду (1) і такої, що*

$$\varlimsup_{r \to 1-0} (1-r)^{\rho} \ln M_f(r) > 0, \rho > 0, \tag{2}$$

виконувались при $r \to 1-0$, $(r \in [0;1) \setminus E,\ dE = 0)$ співвідношення

$$M_f(r) \sim m_f(r) \sim \mu_f(r) \tag{3}$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\lambda_n^{\frac{1}{\rho+1}} \sum_{k \geqslant n} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = o(1), \ (n \to +\infty), \tag{4}$$

де $dE = \varlimsup\limits_{r \to 1-0} \frac{1}{1-r} \int_{E \cap [r,1)} \frac{dt}{t}$.

Звідси безпосередньо випливає, що $|f(z)| \sim \mu_f(|z|)$ при $|z| \to 1$, $|z| \notin E$, тобто зовні виняткової множини, яка має вигляд об'єднання кілець $\{z : r_j < |z| < R_j\}$. Ця обставина якраз є характерною особливістю більшості результатів стосовно асимптотичного поводження лакунарних степеневих рядів, на відміну від подібних теорем для цілих функцій з відомими нулями, де виняткові множини мають вигляд об'єднання малих кругів з центрами в цих нулях.

Хоч теорема А і містить умови правильності досить сильного співвідношення (3), з якого, зокрема, за теоремою Руше маємо для лічильної функції нулів функції f точне співвідношення

$$n(r,0,f)=\nu_f(r),\ (r\to 1-0,\ r\notin E),$$

однак з неї безпосередньо не випливає, наприклад, що нескінченність є в кожній точці $\xi\in\partial\mathbb{D}$ асимптотичним значенням навіть у випадку адамарівських лакун

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\geqslant\vartheta>1\ (n\geqslant 1). \tag{5}$$

Відзначимо, що за виконання умови (5) для функції f вигляду (1) з необмеженими коефіцієнтами (тим паче такої, що виконується (2)) за теоремою з [3] нескінченність є асимптотичним значенням у кожній точці $\xi\in\partial\mathbb{D}$. Посиленням цього твердження є теорема Б.

Теорема Б [4]. *Нехай для аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f вигляду (1) виконується умова (5) і $\sup\{|a_n|\,:\,n\geqslant 0\}=+\infty$. Тоді для кожної точки $\xi\in\partial\mathbb{D}$ існує Жорданова крива Γ з кінцями в точках 0 і ξ така, що для всіх $z\in\Gamma$*

$$|f(z)|\geqslant\alpha\mu_f(|z|),$$

де $\alpha=\alpha(\vartheta)>0$ - деяка стала.

З огляду на наведені вище аргументи, а також на цитовані теореми, є цікавим одержати результати, які враховують лакунарність аналітичних функцій вигляду (1), і які є правильними зовні виняткової множини, що має вигляд об'єднання малих кругів. У цій статті, використовуючи працю [5], одержимо деякі результати такого характеру.

Для $0<\vartheta<1-r$ визначимо

$$k(r,\vartheta)=\max\left\{\nu_f(r+\vartheta),\frac{r}{\vartheta}\right\},\quad k(r)=\inf\{k(r,\vartheta):0<\vartheta<1-r\}.$$

Будемо вважати, що всюди виконується умова

$$\nu_f(r)>\frac{r}{1-r}\ (r_0\leqslant r<1). \tag{6}$$

Зауважимо, що для кожного $\varepsilon>0$ і для деякого $\vartheta\in(0,1-r)$ за означенням $k(r)$ і з монотонності $\nu_f(r)$ одержуємо $\nu_f(r)\leqslant\nu_f(r+\vartheta_0)\leqslant k(r,\vartheta_0)<k(r)+\varepsilon$, звідки, завдяки довільності $\varepsilon>0$, маємо $\nu_f(r)\leqslant k_f(r)$. Далі, оскільки для кожного $\vartheta>0$, $k(r)\leqslant k(r,\vartheta)$, то при $\vartheta=\frac{r}{\nu_f(r)}$, враховуючи (6), одержуємо $k(r)\leqslant\nu_f\left(r+\frac{r}{\nu_f(r)}\right)$. Тобто для всіх $r\in[r_0,1)$ правильні нерівності

$$\nu_f(r)\leqslant k(r)\leqslant\nu_f\left(r+\frac{r}{\nu_f(r)}\right). \tag{7}$$

Подібно як і в [6] доводимо, що для кожного $a>1$ існує таке $r_0<1$, що

$$k(r+\frac{r}{ak(r)})\leqslant\frac{a+1}{a-1}k(r)\ (r_0<r<1). \tag{8}$$

Нехай $K(a,r)=\{z:|z-a|<r\}$. У цій статті доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай для аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f вигляду (1) виконуються умови (6) і*

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln n} = \alpha > 2. \tag{9}$$

Тоді для будь-яких $\beta \in (\frac{1}{\alpha-1}; 1)$ і $\delta \in (0; \beta - \frac{1}{\alpha-1})$, існує $r_0 = r_0(\beta, \delta)$ таке, що для довільного $r > r_0$ і для всіх $z \in \partial K(0,r) \setminus E(r)$ справджується нерівність

$$|f(z)| > \exp(-(k(r))^{\beta})\mu_f(r), \tag{10}$$

де $E(r)$ - об'єднання скінченної кількості дуг кола $\partial K(0,r)$, сума довжин яких не більша, ніж $\exp\{-k^{\delta}(r)\}$.

Легко бачити, що з теореми випливає наслідок.

Наслідок. *За виконання умов теореми площа підмножини кільця $\{z : r_0 < |z| < 1\}$, на якій не виконується оцінка (10), не більша, ніж $(1-r_0)\exp\{-k^{\delta}(r_0)\}$, де $r_0 \in (0;1)$ - довільне досить близьке до 1.*

Допоміжні твердження та доведення теореми. Виберемо число γ таке, що $\frac{1}{\alpha-1} < \gamma < \beta < 1$. Нехай за означенням

$$\varkappa(r) = [(k(r))^{1+\gamma}].$$

Зрозуміло, що $\varkappa$ - неспадна функція від r. Виберемо $q(r) = n(\varkappa(r))$, де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ - лічильна функція послідовності (λ_n). Умову (9) можна записати у вигляді

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln q(r)}{\ln \varkappa(r)} = \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln q(r)}{\ln k(r)} = \frac{1+\gamma}{\alpha} < \gamma.$$

Зауважимо, що знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що при $r \to 1-0$ $q(r) < (k(r))^{\gamma-2\varepsilon}$. Звідси одержуємо $\varkappa^{q+1} \leqslant e^{(k(r))^{\gamma-\varepsilon}}$ $(r \to 1-0)$.

Лема 1. *Якщо для функції f виконуються умови теореми 1, то для $q = q(r)$, $0 \leqslant p \leqslant q$, $a > 1$ при $r \to 1-0$ правильні нерівності*

$$\sum_{\lambda_n \geqslant \varkappa(r)+1} \lambda_n^q |a_n| r^{\lambda_n} \leqslant \varkappa^{q+1}(r) \exp\left(-\frac{\varkappa(r)}{2k(r)}\right)\mu(r),$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^p |a_n| r^{\lambda_n} \leqslant \varkappa^{p+1}(r)\mu(r),$$

$$\mu\left(r + \frac{r}{ak(r)}\right) \leqslant \mu(r)\left(1 + \frac{1}{ak(r)}\right)^{ck(r)} \leqslant c_1\mu(r).$$

Доведення леми 1 використовує лише властивості $k(r)$, зокрема нерівності (7) і (8), і є повністю подібним до доведення відповідної леми в [5].

Нехай $I = \{\lambda_n : n = 1, ..., q\}$, визначимо оператор D_I рівністю

$$D_I f(z) = \left(\prod_{\lambda_i \in I} d_{\lambda_i}\right) f(z),$$

де для $\lambda \in \mathbb{N}$, $d_\lambda f(z) = z^{\lambda+1}\frac{d}{dz}(z^{-\lambda}f(z))$.

Лема 2, по суті, міститься в статті [5, с.469].

Лема 2. *Для деякої аналітичної в* $\mathbb{D}$ *функції* f *і для зростаючої множини* I *маємо*

$$|D_I f(z)| \leqslant \sum_0^q C_{q,i}|z^i f^{(i)}(z)|,$$

де $C_{q,i}$ *додатні цілі, що визначаються рівністю*

$$\sum_0^q C_{q,i}t^i = \prod_{\lambda_i \in I}(\lambda_i + t).$$

Лема 3. *Якщо для функції* $f(z)$ *виконуються умови теореми 1 і якщо* $\gamma \in \left(\frac{1}{\alpha-1};\beta\right)$, $q = q(r)$, $\varkappa = \varkappa(r)$, *то для довільної точки* $z \in \mathbb{D}$ *такої, що* $|z| = r > r_0$, *знайдеться* $p = p(z) \leqslant q(|z|) < (k(r))^\gamma$ *таке, що* $|f^{(p)}(z)| \geqslant \frac{1}{2}([\frac{1}{2}q]!)^2\varkappa^{-q}\mu(r)$.

Доведення. Нехай $I = \{\lambda_i : \lambda_i \leqslant \varkappa, \lambda_i \neq \nu\}$. З визначення оператора $D_I f(z)$ одержуємо формулу

$$D_I f(z) = \prod_{\lambda_i \in I}(\nu - \lambda_i)a_i z^\nu + \sum_{\lambda_n \geqslant \varkappa+1}\prod_{\lambda_i \in I}(\lambda_n - \lambda_i)a_n z^{\lambda_n},$$

де $\nu = \nu_f(|z|)$ і за лемою 1

$$|D_I f(z)| \geqslant ([q/2]!)^2\mu(r) - \sum_{\lambda_n \geqslant \varkappa+1}\lambda_n^q|a_n|r^{\lambda_n} \geqslant \frac{1}{2}([q/2]!)^2\mu(r).$$

Нехай максимальне значення $|f^{(i)}(z)|$ досягається при $i = p \leqslant q$, тоді

$$|D_I f(z)| \leqslant |f^{(p)}(z)|\sum_0^q C_{q,i}r^i = |f^{(p)}(z)|\prod_{\lambda_i \in I}(\lambda_i + r).$$

Тому

$$|f^{(p)}(z)| \geqslant \frac{1}{2}([q/2]!)^2\varkappa^{-q}\mu(r).$$

Отже, лема 3 доведена.

Зауваження 1. *У випадку цілих функцій в [5] одержано слабшу нерівність, ніж нерівність у лемі 3. Повторюючи міркування з доведення леми 3, для цілих функцій отримуємо подібну нерівність. Відзначимо, що в [5] доведення відповідного твердження (лема 4 [5]) є неправильним.*

Лема 4. *Нехай* z *таке як в лемі 3,* $|z| = r$. *Тоді знайдеться* $\xi_1 \in \partial K(z, k^{-2}(r))$ *таке, що*

$$|f(\xi_1)| \geqslant \exp(-k(r)^\gamma)\mu(r).$$

Кількість нулів функції f *в крузі* $K(z, \frac{r}{2ak(r)})$, $a > 1$ *не перевищує* $C(k(r))^\gamma$, *де* C *додатна константа.*

Доведення. За інтегральною формулою Коші

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z,k^{-2}(r))}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}}d\xi.$$

Знайдеться $\xi_1 \in \partial K(z, k^{-2}(r))$ таке, що $|f^{(p)}(z)| \leqslant \frac{p!}{2\pi i}|f(\xi_1)|k^{2p}(r)$. Отже,

$$|f(\xi_1)| \geqslant \frac{([\frac{1}{2}q]!)^2}{2q!}k^{-2q}(r)\varkappa^{-q}(r)\mu(r) \geqslant 2^{-q}k^{-2q}\varkappa^{-q}\mu(r) \geqslant \exp\{-k^{\gamma}(r)\}\mu(r).$$

Нехай $\rho_1 = \frac{r}{2ak(r)}$, $\rho_2 = \frac{r}{2ak(r)} + k^{-2}(r)$, $\rho_3 = \frac{r}{ak(r)}$. Розглянемо функцію f в кругах $K(z,\rho_1)$, $K(\xi_1,\rho_2)$, $K(\xi_1,\rho_3)$. Відзначимо, що $\overline{K}(z,\rho_1) \subset K(\xi_1,\rho_2)$, $\overline{K}(\xi_1,\rho_2) \subset K(\xi_1,\rho_3)$, $(r \to +\infty)$. Нехай $n(\xi,t)$ позначає кількість нулів f в крузі $\overline{K}(\xi,t)$, тоді

$$n(\xi_1,\rho_2) \leqslant \frac{1}{\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}}\int\limits_{\rho_2}^{\rho_3}\frac{n(\xi_1,t)}{t}dt,$$

і далі за теоремою Єнсена

$$n(\xi_1,\rho_2) \leqslant \frac{C_1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\frac{f(\xi_1+\rho_3 e^{i\vartheta})}{f(\xi_1)}\right|d\vartheta.$$

За лемою 1

$$|f(\xi_1+\rho_3 e^{i\vartheta})| \leqslant \varkappa(|\xi_1|+\rho_3)\mu(|\xi_1|+\rho_3) \leqslant \varkappa(r+k^{-2}(r)+\rho_3)\mu(r+k^{-2}(r)+\rho_3) \leqslant$$

$$\leqslant \left(k(r+\frac{r}{bk})\right)^{\gamma+1}\mu\left(r+\frac{r}{bk}\right) \leqslant \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^{\gamma+1}(k(r))^{\gamma+1}\left(1+\frac{1}{bk}\right)^{\frac{b+1}{b-1}k}\mu(r),$$

де $a > b > 1$. Отже, $n(\xi_1,\rho_3) \leqslant C(k(r))^{\gamma}$.

Круг $K(\xi_1,\rho_3)$ містить круг $K\left(z,\dfrac{r}{ak}\right)$, тому лема 4 доведена повністю.

Лема 5. *Якщо* $\sigma = \dfrac{r}{2k}$ *і якщо* $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ *– нулі функції* $f(z)$ *в крузі* $\overline{K}(z,7\sigma/8)$, *тоді в крузі* $\overline{K}(z,\sigma/2)$

$$|f(\xi)| \geqslant \exp(-k^{\gamma_1}(r))\mu(r)(2\sigma)^{-s}|\prod_{i=1}^{s}(\xi-\alpha_i)|,$$

де $s \leqslant (k(r))^{\gamma_1}$, $\gamma_1 \in (\gamma;\beta)$.

Доведення. Нехай $\prod(\xi,\alpha_i)$– добуток Бляшке від нулів $\{\alpha_i\}$ в крузі $\overline{K}(z,7\sigma/8)$, і $f(\xi) = \phi(\xi)\prod(\xi,\alpha)$ Тоді на колі $\partial K(z,7\sigma/8)$, $|\phi(\xi)| = |f(\xi)|$ і в крузі $\overline{K}(z,7\sigma/8)$, $|\phi(\xi)| \geqslant |f(\xi)|$. За принципом максимуму модуля та лемою 1 $|\phi(\xi)| \leqslant C_1 k^{1+\gamma}(r)\mu(r)$, а за лемою 4 $|\phi(\xi_1)| \geqslant |f(\xi_1)| \geqslant \exp(-k^{\gamma}(r))\mu(r)$. Розглянемо $f(\xi),\phi(\xi)$ в кругах

$$\overline{K}(z,\sigma/2) \subset \overline{K}(\xi_1,5\sigma/8) \subset \overline{K}(\xi_1,3\sigma/4) \subset \overline{K}(z,7\sigma/8).$$

Функція $\phi(\xi)$ не має нулів у крузі $\overline{K}(z,7\sigma/8)$ і $\dfrac{\phi(\xi)}{\phi(\xi_1)} = \exp\{\varphi(\xi)\}$.

Позначимо $M = \sup\{|\varphi(\xi)|,\ \xi \in \overline{K}(\xi_1,5\sigma/8)\}$. За нерівністю Каратеодорі ([8]) застосованою до кільця $5\sigma/8 \leqslant |\xi-\xi_1| \leqslant 3\sigma/4$, маємо

$$M \leqslant 10\sup\{Re\varphi(\xi),\ |\xi-\xi_1| \leqslant 3\sigma/4\} \leqslant Ck^{\gamma}(r).$$

У крузі $\overline{K}(\xi_1, 5\sigma/8)$ $Re\varphi(\xi) \geqslant -M$. Тоді в цьому ж крузі

$$\left|\frac{\phi(\xi)}{\phi(\xi_1)}\right| = \exp\{Re\varphi(\xi)\} \geqslant \exp\{-M\} \geqslant \exp\{-Ck^{\gamma}(r)\},$$

$$|\phi(\xi)| \geqslant \exp\{-(C+1)k^{\gamma}(r)\}\mu(r) \geqslant \exp\{-k^{\gamma_1}(r)\}\mu(r).$$

Цей круг містить круг $\overline{K}(z, \sigma/2)$ і тому

$$|f(\xi)| \geqslant \exp\{-k^{\gamma_1}(r)\}\mu(r)|\prod(\xi, \alpha)|, \ \xi \in \overline{K}(z, \sigma/2).$$

Для добутку Бляшке правильна нерівність

$$|\prod(\xi, \alpha)| \geqslant (\sigma)^{-s} \prod |\xi - \alpha_i|,$$

і лема доведена.

Зауваження 2. *У випадку цілих функцій в [5] доведення подібних тверджень містять у випадку леми 5 [5] неусувні, а у випадку леми 6 [5] усувні пробіли.*

Доведення теореми.

За лемою Картана ([8]) для довільного $h > 0$ і для $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \mathbb{C}$ можна знайти таку систему кружків, загальною сумою діаметрів $4h$, що для будь-якої точки ξ, яка лежить поза цими кружками, виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^{s} |\xi - \alpha_i| > \left(\frac{h}{e}\right)^s. \tag{11}$$

Нехай $\alpha_1, ..., \alpha_s$– нулі f в крузі $\overline{K}(z, \frac{7}{\sigma}/8)$, $\sigma = \frac{r}{2k(r)}$. Тоді в крузі $|\xi - z| \leqslant \frac{1}{2}\sigma$

$$|f(\xi)| \geqslant \exp\{-k^{\gamma_1}(r)\}\mu(r)(2\sigma)^{-s}|\prod_{i=1}^{s}(\xi - \alpha_i)|.$$

Знайдеться система кружків, яка містить $\alpha_1, ..., \alpha_s$ така, що поза цими кружками виконується (11) для довільного $h > 0$. Візьмемо $h = \exp\{-k^{\delta_1}(r) + 1\}$, де $\delta_1 \in (0, \beta - \gamma_1)$. Тоді $|\prod_{i=1}^{s}(\xi - \alpha_i)| > \exp\{-sk^{\delta_1}(r)\} > \exp\{-k^{\gamma_1+\delta_1}(r)\}$. Сума діаметрів цих кружків не перевищує $4\exp\{-k^{\delta_1}(r) + 1\} \leqslant \exp\{-k^{\delta_2}(r)\}$, $0 < \delta_2 < \delta_1$. У крузі $K(z, \sigma/2)$ поза системою кружків $\bigcup_{i=1}^{s} K(\alpha_i, \rho_i)$ виконується

$$|f(\xi)| \geqslant \exp\{-k^{\gamma_1}(r) - k^{\gamma_1+\delta_1}(r)\}\mu(r) > \exp\{-k^{\beta}(r)\}\mu(r).$$

Кружки $K(\alpha_i, \rho_i)$ можуть перетинати коло $\partial K(0, r)$. Оскільки загальна сума діаметрів цих кружків не більша $\exp\{-k^{\delta_2}(r)\}$, то перетинати коло $\partial K(0, r)$ може лише той кружок, центр якого віддалений від $\partial K(0, r)$ менше ніж на $\frac{1}{2}\exp\{-k^{\delta_2}(r)\}$. Кожен такий кружок відтинає на колі $\partial K(0, r)$ дугу, довжина якої менша за $2\exp\{-k^{\delta_2}(r)\}$. Існує скінченне покриття кола $\partial K(0, r)$ кругами радіуса $\frac{1}{2}\sigma(r)$ кількістю кругів, не більшою за $2\frac{2\pi r}{\frac{1}{2}\sigma} = 16\pi k(r)$. У цій покритій області нулів менше за $16\pi k^{1+\beta}(r)$. Отже, загальна сума довжин дуг, поза якими виконується (10) менша, ніж

$$\frac{32\pi k^{1+\beta}(r)}{\exp\{k^{\delta_2}(r)\}} < \exp\{-k^{\delta}(r)\},$$

де $\delta \in (0, \delta_2)$. Теорему доведено.

---

1. *Скаскив О.Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1989. – Т.53. – N4. – С.833-850.
2. *Wiman A.* Uber der Zuzammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grossten betrage beigegebenen Argumente der Funktion// Acta. Math. – 1916. – Vol.41. – P.1-28.
3. *Murai T.* The boundary behaviour of Hadamard lacunary serias// Nagoja Math. J. – 1983. – Vol.89. – P.65-76.
4. *Gnuschke D., Pomerenke Ch.* On the growth of functions with Hadamard gaps// J. London Math. Soc.(2) – 1984. – Vol.30. – P.441-450.
5. *Offord A.C* The pits property of entire function// J. London Math. Soc. (2) – 1991. – Vol.44. – P.463-475.
6. *Offord A.C.* The distribution of the values of an entire functiion whose coeficients are independent random variables// Proc. London. Math. Soc. (3). – 1965. – Vol.14. – P.199-238.
7. *Gnuschke D., Pomerenke Ch.* On the radial limits of functions with Hadamard gaps// Michigan. Math. J. – 1985. – Vol.32. – P.21-31.
8. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М., 1956.

Pivkach M.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF FUNCTIONS ANALITIC IN THE UNIT DISK OUTSIDE SMALL DISKS

This paper contains following result. Let an analytic in the unit disk function of the form $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\lambda_n}$ satisfies conditions $\nu_f(r) > \frac{r}{1-r}$ $(r_0 \leqslant r < 1)$ and $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\lambda_n}{\ln n} = \alpha > 2$. Then for any $\beta \in (\alpha; 1)$ and $\delta \in (0; \beta - \frac{1}{\alpha-1})$ exists $r_0 = r_0(\beta, \delta)$ such that for every $r > r_0$ and for all $z \in \partial K(a, p(a)) \setminus E(r)$ the inequality

$$|f(z)| > \exp(-(k(r))^{\beta})\mu_f(r)$$

is valid, where $E(r)$ is the union of finite number of arcs of the circle $\partial K(0, r)$, the sum of which lengths is not greater then $\exp\{-(k(r))^{\delta}\}$, $k(r) = \inf\{\max\{\nu_f(r+\vartheta), \frac{r}{\vartheta}\} : 0 < \vartheta < 1 - r\}$, $\mu_f(r)$ and $n_f(r)$ are respectively maximal term and central index.

Стаття надійшла до редколегії 23.12.98