ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 159–170 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 159–170*

УДК 517.95

Наталія Процах

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВИРОДЖЕННЯМ

Мішані задачі для еволюційних рівнянь та систем, що вироджуються на площині задання початкових даних сьогодні є досить повно вивчені. Зокрема, для параболічних рівнянь та систем задача Коші та мішані задачі були предметом дослідження в працях [1–4]. Гіперболічні рівняння та системи з виродженням розглянуто в працях [5–10]. У цій статті досліджено існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для однієї еволюційної системи з виродженням в нециліндричній області. Зауважимо, що частинним випадком таких систем є певні системи параболічного типу. Єдиність розв'язку для зазначеної системи доведено у працях [11,12].

1. Мішана задача для еволюційної системи з виродженням в області, що розширюється з часом. Нехай Q – обмежена область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega_\tau = Q\bigcap\{t=\tau\}$ така, що mes $\Omega_\tau > 0$; $\Omega_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2}$ якщо $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Позначимо $S = \bigcup\limits_{\tau\in(0,T)} \partial\Omega_\tau$, ν_t – кут між поверхнею S і віссю t. Припустимо, що $S \in C^1$, $\nu_t \neq 0$.

Розглянемо в області Q систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \tag{1.1}$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u\Big|_S = 0, \quad |\alpha| \leqslant l-1, \qquad D^\alpha u_t\Big|_S = 0, \quad |\alpha| = l-1, \tag{1.2}$$

де $l \geqslant m$; $m \geqslant 1$; $0 \leqslant p \leqslant m$; $\Phi(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t)$, $|\alpha|=|\beta|\leqslant m$, $B_{\alpha\beta}(x,t)$, $|\alpha|=|\beta|\leqslant l$, $G_\alpha(x,t)$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant m$, $C_\alpha(x,t)$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant l$ – квадратні матриці порядку N; $u = \mathrm{colon}(u_1,...,u_N)$; $F_\alpha = \mathrm{colon}(F_{\alpha_1},...,F_{\alpha_N})$, $|\alpha|\leqslant p$; $x=(x_1,...,x_n)$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1.1) виконуються такі умови.

Умова (Φ_0). $\Phi \in L^\infty(Q)$; $(\Phi(x,t)\xi,\xi) \geqslant \varphi(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^N$, де $\varphi\in C([0,T])$; $\varphi(0)=0$; $\varphi(t)>0$, $t\in(0,T]$; $\varphi'\in C((0,T])$; $\varphi'(t)\geqslant 0$, $t\in(0,T]$, $\Phi(x,t)=\Phi^*(x,t)$, для майже всіх $(x,t)\in Q$.

Умова (Φ_1). $\Phi_t \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$ $\forall\varepsilon > 0$; $(\Phi_t(x,t)\xi,\xi) \geqslant \varphi_1(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $\forall\xi \in \mathbb{R}^N$, де $\varphi_1 \in C((0,T])$; $\varphi_1(t) \geqslant 0$, $t \in (0,T]$.

Умова (A_0). $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta_t} \in L^\infty(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant a_0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad a_0 > 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t)$; $A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $|\beta| = |\alpha| \leqslant m$.

Умова (B_0). $B_{\alpha\beta} \in L^\infty(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant b_0\psi(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad b_0 > 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_t)$; $\psi \in C([0,T])$; $\psi(0) \geqslant 0$; $\psi(t) > 0$, $\forall t \in (0,T]$.

Тут $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega_t)$ – замикання простору функцій $C_0^\infty(\Omega_t)$ за нормою простору $H^k(\Omega_t)$.

Введемо простір функцій $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі S за нормою

$$\|u\|^2 = \int\limits_Q \left(\varphi(t)|u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2\right) dx\,dt.$$

Розглянемо початкові умови

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \sqrt{\varphi(t)}u_t(x,t) = 0. \tag{1.3}$$

Означення 1.1. Функція $u(x,t)$, яка задовольняє включення $u \in H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q) \bigcap C([0,T]; L^2(\Omega_t))$; $u_t \in C((0,T]; L^2(\Omega_t))$, рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[-(\Phi(x,t)u_t, v_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t, D^\alpha v) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t, v) + \sum_{|\alpha|\leqslant p} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v)\Bigg]\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{t_2}} (\Phi(x,t)u_t, v)\,dx - \int\limits_{\Omega_{t_1}} (\Phi(x,t)u_t, v)\,dx = 0,$$

для довільної функції $v \in C_0^\infty(Q)$ і всіх t_1, t_2, $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$, та початкові умови (1.3) називається узагальненим розв'язком задачі (1.1)-(1.3).

Тут $Q_{t_1,t_2} = Q \bigcap \{t_1 < t < t_2\}$.

Будемо використовувати оцінку Фрідріхса

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2\,dx \leqslant \gamma_{k,j}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad j = 0, ..., k,$$

яка справджується для функцій $v \in \overset{\circ}{H}{}^k(\Omega_t)$.

Позначимо:

$$\alpha_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)}; \quad \beta_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\Gamma_l(t)c_0(t)}{2b_0}; \quad \Gamma_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{k,j}(t);$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{якщо } \alpha_0 = 0 \\ \varphi_1(t), & \text{якщо } \alpha_0 > 0 \end{cases}; \quad \nu_1 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \left[\beta_0 \omega(t) - \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} \right];$$

$$c_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)\omega(\tau)\psi(\tau)}; \quad g_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \frac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\varphi'(\tau)};$$

$$c_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\psi(\tau)}; \quad g_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \frac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)},$$

$$\varkappa_1 = \begin{cases} \nu_1 + \delta_0, & \text{якщо } \nu_1 \geqslant 0 \\ 0, & \text{якщо } \nu_1 < 0 \end{cases}, \qquad \delta_0 > 0.$$

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти системи (1.1) задовольняють умови* $(\Phi_0), (\Phi_1)$, (A_0), (B_0), G_α $(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m)$, $C_\alpha (1 \leqslant |\alpha| \leqslant l) \in L^\infty(Q_{\varepsilon,\tau})$, $\forall \varepsilon > 0$; *виконується одна з умов;*

1. $\alpha_0 > 0,\ c_0,\ g_0 \in L^\infty(0,T);\ \nu_1 < +\infty,$ $$\int_Q \frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}\, dxdt < \infty, \tag{1.4}$$

2. $\alpha_0 = 0 : c_{01},\ g_{01} \in L^\infty(0,T);\ \nu_1 < +\infty,$

$$\inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \sqrt{\Gamma_l(t) c_0(t) \gamma_{l,0}(t)} < b_0, \qquad \int_Q \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}\, dxdt < \infty.$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1.1)-(1.3).

Доведення. I. Нехай Q – циліндрична область в $\mathbb{R}^{n+1}$. У просторі $(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_\tau) \bigcap H^{2l}(\Omega_\tau))^N$ виберемо послідовність функцій $\{\varphi^k(x)\}$ таких, що для всіх $j \in \mathbb{N}$ елементи $\varphi^1, ..., \varphi^j$ лінійно незалежні і лінійна оболонка цієї послідовності є всюди щільна в $(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_\tau) \bigcap H^{2l}(\Omega_\tau))^N$. Розглянемо функції

$$u^j(x,t) = \sum_{k=1}^{j} c_k^j(t) \varphi^k(x), \qquad j = 1, 2, ...,$$

де $c_1^j(t), ..., c_j^j(t)$ є розв'язками задачі Коші

$$\int_{\Omega_\tau} \Bigg[((\Phi(x,\tau)u_t)_t, \varphi^k) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,\tau) D^\beta u, D^\alpha \varphi^k) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,\tau) D^\beta u_t, D^\alpha \varphi^k) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,\tau) D^\alpha u, \varphi^k) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,\tau) D^\alpha u_t, \varphi^k) \Bigg] dx = \int_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|\leqslant p} (F_\alpha(x,\tau), D^\alpha \varphi^k)\, dx, \tag{1.5}$$

$c_k^j(\varepsilon)=0,\ c_{kt}^j(\varepsilon)=0,\ k=1,...,j,\ \varepsilon>0$. Домножимо обидві частини цієї системи рівнянь відповідно на функцію $c_{kt}(t)e^{-\nu t}$, $\nu>0$, підсумуємо за k від 1 до j і зінтегруємо по проміжку $[\varepsilon,\tau]$:

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Big[((\Phi(x,t)u_t^j)_t,u_t^j)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j,D^\alpha u_t^j)+$$
$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^j,D^\alpha u_t^j)+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u^j,u_t^j)+$$
$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j,u_t^j)\Big]e^{-\nu t}dxdt=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}(F_\alpha(x,t),D^\alpha u_t^j)\,e^{-\nu t}dxdt. \tag{1.6}$$

Оцінимо кожний доданок цієї рівності:

$$\tau_1=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}((\Phi(x,t)u_t^j)_t,u_t^j)e^{-\nu t}\,dx\,dt\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}\varphi(\tau)|u_t^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx+$$
$$+\frac12\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\varphi_1(t)|u_t^j|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+\frac{\nu}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\varphi(t)|u_t^j|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

$$\tau_2=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}\Big(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j,D^\alpha u_t^j\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt\geqslant$$
$$\geqslant\frac12(\nu a_0-a_1)\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt+\frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx.$$

$$\tau_3=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^j,D^\alpha u_t^j)e^{-\nu t}\,dx\,dt\geqslant b_0\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

$$\tau_4=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u^j,u_t^j)e^{-\nu t}\,dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac12\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Big[\frac{\Gamma_m(t)g_0(t)}{\delta_1}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2+\delta_1\varphi'(t)\omega(t)|u_t^j|^2\Big]e^{-\nu t}\,dx\,dt,\quad \delta_1>0.$$

$$\tau_5=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j,u_t^j)\,e^{-\nu t}dxdt\leqslant\frac12\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Big[\frac{\psi(t)}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2+$$
$$+\delta_2\varphi'(t)\omega(t)|u_t^j|^2\Big]e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

$$\tau_6=\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}(F_\alpha(x,t),D^\alpha u_t^j)\,e^{-\nu t}dxdt\leqslant\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{1}{\delta_3}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}+$$
$$+\delta_3\psi(t)\Gamma_p(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2\Big)e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

Тут використано те, що $l \geqslant m,\ m \geqslant 1,\ 0 \leqslant p \leqslant m$. З цих оцінок одержимо:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \varphi(\tau)|u_t^j|^2 e^{-\nu\tau}\,dx + a_0 \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 e^{-\nu\tau}\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \Bigg[\bigg(-a_0\nu + a_1 +$$

$$+ \frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_0(t)\bigg) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + \bigg(-2b_0 + \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t) + \delta_3\Gamma_p(t)\bigg) \times$$

$$\times \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2 + \bigg((\delta_1+\delta_2)\omega(t) - \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\nu\varphi_1(t)}{\varphi'(t)}\bigg)\varphi'(t)|u_t^j|^2\Bigg] e^{-\nu t}\,dx\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\delta_3} \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\,dx\,dt. \tag{1.7}$$

Виберемо $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ з умов:

$$\begin{aligned} &-a_0\nu + a_1 + \frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_0(t) \leqslant -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0;\\ &-2b_0 + \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t) + \delta_3\Gamma_p(t) < 0;\\ &(\delta_1+\delta_2)\omega(t) - \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\nu\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} < \nu_1 + \delta_0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Згідно з умовами теореми існують такі числа $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0,\ \delta_3 > 0,\ \delta_0 > 0$, $\tau_0 > 0$, що на $[0,\tau_0]$ виконуються нерівності (1.8).

Позначимо $\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi'(t)|u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt = y(\tau)$. Тоді $\int\limits_{\Omega_\tau} \varphi(\tau)|u_t^j|^2 e^{-\nu\tau}\,dx = \dfrac{\varphi(\tau)y'(\tau)}{\varphi'(\tau)}$.

Розв'язавши нерівність (1.7), одержимо:

$$\|u^j\|^2_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}} = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \bigg(\varphi(t)|u_t^j|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + \psi(t)\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2\bigg) e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M_3[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1} \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\,dx\,dt. \tag{1.9}$$

Стала M_3 не залежить від ε і j.

Нехай $\alpha_0 = 0$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} |u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \gamma_{l,0}(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt. \tag{1.10}$$

Оцінимо кожний доданок рівності (1.6):

$$\tau_1 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} ((\Phi(x,t)u_t^j)_t, u_t^j) e^{-\nu t}\,dx\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \varphi(\tau)|u_t^j|^2 e^{-\nu\tau}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi_1(t)|u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt + \frac{\nu}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi(t)|u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

$$\tau_4 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u^j, u_t^j)e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{\Gamma_m(t)g_{01}(t)}{\delta_1}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 + \delta_1\omega(t)|u_t^j|^2\right]e^{-\nu t}\,dx\,dt, \qquad \delta_1>0.$$
$$\tau_5 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j, u_t^j)\,e^{-\nu t}dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\left[\frac{\psi(t)}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_{01}(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2 + \delta_2\omega(t)|u_t^j|^2\right]e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

Оцінки τ_2, τ_3, τ_6 такі ж як для випадку $\alpha_0 \geqslant 0$. З цих оцінок одержимо нерівність:

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\varphi(\tau)|u_t^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx + a_0\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Bigg[\bigg(-a_0\nu + a_1 +$$
$$+\frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_{01}(t)\bigg)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 + \bigg(-2b_0 + \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_{01}(t) + \delta_3\Gamma_p(t)\bigg)\times$$
$$\times\,\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2 + \bigg((\delta_1+\delta_2)\frac{\omega(t)}{\psi(t)} - \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)} - \frac{\nu\varphi_1(t)}{\psi(t)}\bigg)\psi(t)|u_t^j|^2\Bigg]e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$
$$+\frac{1}{\delta_3}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

Використавши (1.10), матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\varphi(\tau)|u_t^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx + a_0\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Bigg[\bigg(-a_0\nu + a_1 +$$
$$+\frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_{01}(t)\bigg)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 + \bigg(-2b_0 + \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_{01}(t) + \delta_3\Gamma_p(t)+$$
$$+\,\gamma_{l,0}(t)\bigg((\delta_1+\delta_2)\frac{\omega(t)}{\psi(t)} - \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)} - \frac{\nu\varphi_1(t)}{\psi(t)}\bigg)\bigg)\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2\Bigg]e^{-\nu t}\,dx\,dt+$$
$$+\frac{1}{\delta_3}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt. \tag{1.11}$$

Аналогічно як і у випадку $\alpha_0 \geqslant 0$, за умови, що

$$\sup_{[0,\tau_0]}\sqrt{\Gamma_l(t)c_{01}(t)\gamma_{l,0}(t)} < b_0. \tag{1.12}$$

з нерівності (1.11) можна одержати оцінку

$$||u^j||^2_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}} = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left(\varphi(\tau)|u^j_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u^j_t|^2\right) e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_4 \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt. \tag{1.13}$$

Отже, одержано оцінку $||u^j||_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}}$ сталою, яка не залежить від ε і j. Таку оцінку можна отримати в Q . Продовжимо функції u^j нулем в область Q і виберемо $\varepsilon = \frac{1}{j}$. Тоді оцінки (1.9), (1.13) будуть виконуватися в Q.

Оскільки виконуються (1.9, 1.13), то з послідовності $\{u^j\}$ можна вибрати підпослідовність $\{u^s\}$ таку, що $\{u^s\} \to u\, *-$ слабко в $L^\infty((0,T); \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))$; $\sqrt{\varphi(t)}u^s_t \to \sqrt{\varphi(t)}u_t$ $*-$слабко в $L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$, коли $s \to \infty$.

Можна показати, що послідовність $\{u^j\}$ буде збігатися до узагальненого розв'язку задачі (1.1) – (1.3) [13].

II. Нехай Q – нециліндрична область, описана при формулюванні задачі. Застосуємо метод штрафу [14] для знаходження розв'язку задачі (1.1)-(1.3) в Q.

Виберемо O – обмежену область в $\mathbb{R}^n$ таку, що $Q \subset O \times (0,T)$. Позначимо $O_\tau = (O \times (0,T)) \bigcap \{t = \tau\}$; $M \in L^\infty(O \times (0,T))$, причому

$$M = \begin{cases} 0, & \text{на Q} \\ 1, & \text{в } O \times (0,T) \setminus Q. \end{cases}$$

Продовжимо F_α, Φ, $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, C_α, G_α на $O \times (0,T)$ так, щоб виконувалися умови (Φ_0), (Φ_1), (A_0), (B_0) і збережемо для них ті самі позначення.

У циліндрі $Ц = O \times (0,T)$ розглянемо систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u^\varepsilon_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u^\varepsilon) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u^\varepsilon_t) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t) D^\alpha u^\varepsilon) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t) D^\alpha u^\varepsilon_t + \frac{1}{\varepsilon} M \varphi(t) u^\varepsilon_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t), \tag{1.14}$$

з крайовими та початковими умовами

$$D^\alpha u^\varepsilon \Big|_{\partial O \times (0,T)} = 0,\ |\alpha| \leqslant l-1, \qquad D^\alpha u^\varepsilon_t \Big|_{\partial O \times (0,T)} = 0,\ |\alpha| = l-1, \tag{1.15}$$

$$\lim_{t\to+0} u^\varepsilon(x,t) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} \sqrt{\varphi(t)} u^\varepsilon_t(x,t) = 0,\ x \in O. \tag{1.16}$$

Тут $\varepsilon > 0$.

Аналогічно, як і у випадку циліндричної області Q, можна одержати оцінки

$$\|u^{j,\varepsilon}\|^2_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}} \leqslant M_3 \int\limits_{Ц_{\varepsilon,\tau}} \frac{1}{[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\,dx\,dt, \qquad \text{при } \alpha_0 \geqslant 0,$$

$$\|u^{j,\varepsilon}\|^2_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}} \leqslant M_3 \int\limits_{Ц_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\,dx\,dt, \qquad \text{при } \alpha_0 = 0.$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{Ц_{\varepsilon,\tau}} M\varphi(t)|u^{j,\varepsilon}|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant C_4.$$

Тоді, враховуючи вигляд M, одержимо:

$$\int\limits_{Ц_{\varepsilon,\tau}\setminus Q} M\varphi(\tau)|u^{j,\varepsilon}|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant C_4\varepsilon. \tag{1.17}$$

З послідовності $\{u^{j,\varepsilon}\}$ можна виділити підпослідовність, яка збігається $*-$слабко в $L^\infty((0,T);\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))$; $\sqrt{\varphi(t)}u_t^{s,\varepsilon} \to \sqrt{\varphi(t)}u_t^\varepsilon$ $*-$слабко в $L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$, коли $s\to\infty$.

Оскільки виконується (1.17), то $\sqrt{\varphi(t)}u_t^\varepsilon(x,t) = 0$ майже всюди в $Ц \setminus Q$, $u_t^\varepsilon(x,t) = 0$ майже всюди в $Ц\setminus Q$.

Оскільки $\lim\limits_{t\to 0} u^\varepsilon(x,t) = 0$ в $Ц_{\varepsilon,\tau}$, то $\lim\limits_{t\to 0} u^\varepsilon(x,t) = 0$ в $Ц_{\varepsilon,\tau}\setminus Q$. З умов $u_t^\varepsilon(x,t)=0$ майже всюди в $Ц\setminus Q$, $\Omega_{t_1}\subset\Omega_{t_2}$, $t_1\leqslant t_2$, $\lim\limits_{t\to 0} u^\varepsilon(x,t) = 0$ в $Ц\setminus Q$, отримаємо

$$u^\varepsilon(x,t) = 0 \text{ майже всюди в } Ц\setminus Q.$$

Перейшовши до звуження на Q, одержимо:

$$(\Phi(x,t)u_t^\varepsilon)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^\varepsilon) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^\varepsilon) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u^\varepsilon) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^\varepsilon = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t), \qquad (x,t)\in Q.$$

Так само, як і у випадку циліндричної області Q, перейшовши до границі при $\varepsilon\to 0$, використавши умову (1.18), можна показати, що u буде розв'язком поставленої задачі. Теорему 1 доведено.

Зауваження. Якщо в доведенні теореми взяти

$$\tau_4 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u^j, u_t^j) e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{\Gamma_m(t)g_0(t)}{\delta_1} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + \delta_1 \varphi'(t)|u_t^j|^2 \right] e^{-\nu t}\,dx\,dt, \qquad \delta_1 > 0,$$

де $\quad g_0(t) = \sup\limits_{Q_t} \dfrac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)};$

$$\tau_5 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j, u_t^j)\, e^{-\nu t} dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left[\frac{\psi(t)}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2 + \right.$$

$$\left. + \delta_2\varphi'(t)|u_t^j|^2\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt, \qquad \delta_2 > 0, \text{ де } c_0(t) = \sup_{Q_t}\frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)},$$

то в нерівності (1.5)

$$\nu_1 = \inf_{[0,T]}\sup_{[0,\tau]}\left[\beta_0 - \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)}\right].$$

і теорема 1 правильна при такому ν_1.

2. Мішана задача для еволюційної системи з виродженням в області, що звужується з часом. Нехай Q – обмежена область простору $\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_t$, $\Omega_\tau = Q\bigcap\{t=\tau\}$, $S = \bigcup\limits_{\tau\in[0,T]}\partial\Omega_\tau$, $\operatorname{mes}\Omega_\tau > 0$, $\tau\in[0,T]$, $Q_\tau = Q\bigcap\{0<t<\tau\}$, $\tau < T$; $\forall t_1,\ t_2\in[0,T]$, $\Omega_{\tau_2}\subset\Omega_{\tau_1}$, $\tau_1<\tau_2$; ν_t – кут між поверхнею S і віссю t. Припустимо, що $S\in C^1$, $\nu_t\neq 0$.

Розглянемо в області Q систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) +$$
$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u) +$$
$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha F_\alpha(x,t) \tag{2.1}$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u\Big|_S = 0, \qquad |\alpha|\leqslant m-1, \tag{2.2}$$

де $1\leqslant l\leqslant m$; $p\leqslant m$; $\Phi(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t)$, $|\alpha|=|\beta|\leqslant m$, $B_{\alpha\beta}(x,t)$, $|\alpha|=|\beta|\leqslant l$, $G_\alpha(x,t)$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant m$, $C_\alpha(x,t)$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant m$ – квадратні матриці порядку N; $u = \operatorname{colon}(u_1,..,u_N)$; $F_\alpha = \operatorname{colon}(F_{\alpha 1},...,F_{\alpha N})$, $|\alpha|\leqslant p$; $x=(x_1,..,x_n)$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (2.1) виконуються такі умови:

Умова (Φ_0). $\Phi\in L^\infty(Q)$; $(\Phi(x,t)\xi,\xi)\geqslant\varphi_0 t^\lambda|\xi|^2$, $\varphi_0>0$, $\lambda>0$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^N$, $\Phi(x,t)=\Phi^*(x,t)$, для майже всіх $(x,t)\in Q$.

Умова (Φ_1). $\Phi_t\in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$, $\forall\varepsilon>0$; $(\Phi_t(x,t)\xi,\xi)\geqslant\varphi_1 t^{\lambda-1}|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^N$.

Умова (A_0). $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta_t}\in L^\infty(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant a_0\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha v|^2\,dx, \qquad a_0>0,$$

для майже всіх $t\in(0,T)$, $\quad\forall v\in(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t))^N$; $\quad A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t)$, $\quad A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\beta\alpha}(x,t)$, для майже всіх $(x,t)\in Q$, $|\beta|=|\alpha|\leqslant m$.

Умова (B_0). $B_{\alpha\beta} \in L^\infty(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant \psi(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2\,dx,$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_t))^N; \psi \in C([0,T]);\ \psi(0) \geqslant 0;\ \psi(t) > 0$, $\forall t \in (0,T]$.

Введемо простір вектор-функцій $(H^{l,1}_{0,\lambda,\psi}(Q))^N$ як замикання множини нескінченно диференційовних вектор-функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі S за нормою

$$\|u\|_{m,l,1} = \left(\int\limits_Q \left(t^\lambda |u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2\right) dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Розглянемо початкові умови

$$u(x,0) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} t^{\frac{\lambda}{2}} u_t(x,t) = 0. \tag{2.3}$$

Означення 2.1. Функцію $u(x,t)$ з простору $(H^{m,l,1}_{0,\lambda,\psi}(Q))^N$ назвемо узагальненим розв'язком задачі (2.1)-(2.3), якщо вона задовольняє початкову умову $u(x,0) = 0$ і рівність

$$\int\limits_Q \Bigg[-(\Phi(x,t)u_t, v_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha v) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t, D^\alpha v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t, v) - \sum_{|\alpha|\leqslant p} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v)\Bigg]\,dxdt = 0,$$

для довільної функції $v \in (C_0^\infty(Q))^N$ такої, що $v(x,T) = 0$.

Позначимо:

$$\alpha_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{t^\lambda}{\psi(t)}; \quad \beta_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\Gamma_l(t)c_0(t)}{2b_0}; \quad \Gamma_k(t) = \sum_{j=1}^k \gamma_{k,j}(t);$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{якщо } \alpha_0 = 0 \\ t^\lambda, & \text{якщо } \alpha_0 > 0 \end{cases}; \quad \nu_1 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} [\beta_0\omega(t) - \varphi_1];$$

$$c_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\tau^{\lambda-1}\omega(\tau)\psi(\tau)}; \quad g_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \frac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\tau^{\lambda-1}};$$

$$c_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\psi(\tau)}; \quad g_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \frac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)};$$

$$\varkappa_1 = \begin{cases} \dfrac{\nu_1 + \delta_0}{\varphi_0}, & \text{якщо } \nu_1 \geqslant 0 \\ 0, & \text{якщо } \nu_1 < 0 \end{cases}, \qquad \delta_0 > 0.$$

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти системи (2.1) задовольняють умови* (Φ_0), (Φ_1), (A_0), (B_0), G_α $(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m)$, C_α $(1 \leqslant |\alpha| \leqslant l) \in L^\infty(Q_{\varepsilon,\tau})$, $\forall \varepsilon > 0$; *виконується одна з умов:*

1. $\alpha_0 > 0$, c_0, $g_0 \in L^\infty(0,T)$; $\nu_1 < +\infty$,

$$\int\limits_Q \frac{1}{t^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} |F_{\alpha t}(x,t)|^2 \, dxdt + \int\limits_Q \frac{1}{t^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} |F_\alpha(x,t)|^2 \, dxdt < \infty. \tag{2.4}$$

2. $\alpha_0 = 0 : c_{01}$, $g_{01} \in L^\infty(0,T)$; $\nu_1 < +\infty$;

$$\inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \sqrt{\Gamma_l(t) c_0(t) \gamma_{l,0}(t)} < b_0;$$

$$\int\limits_Q \sum_{|\alpha| \leqslant p} |F_{\alpha t}(x,t)|^2 \, dxdt + \int\limits_Q \sum_{|\alpha| \leqslant p} |F_\alpha(x,t)|^2 \, dxdt < \infty.$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (2.1)-(2.3).

Зауваження. Якщо

$$g_0(t) = \sup_{Q_t} \frac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\tau^{\lambda-1}}; \quad c_0(t) = \sup_{Q_t} \frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\tau^{\lambda-1}}; \quad \nu_1 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \Big[\beta_0 - \varphi_1\Big],$$

то теорема 2 правильна при такому ν_1.

---

1. *Калашников А.С.* Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка // Вестн. Москов. ун-та. Сер. мат., мех. – 1971. – N 2,3. – С.42-48, 3-9.
2. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1994. – N 6. – С.7-11.
3. *Возняк О.Г.* Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Матеріали міжнар. конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці, 1995. – С.42-60.
4. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова// Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т.27. – N 3. – С.479-487.
5. *Барановский Ф.Т.* Задача Коши с видоизмененными начальными данными для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу// Мат. сб. – 1983. – Т.120. – N 2. – С.147-163.
6. *Бубнов Б.А.* Смешаная задача для одного класса некласических уравнений// Докл. АН СССР. – 1984. – Т.275. – N 3. – С.525-528.
7. *Бубнов Б.А., Врагов В.Н.* К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений// Докл. АН СССР. – 1982. – Т.264. – N 4. – С.795-800.
8. *Лавренюк С.П.* Смешанная задача для вырождающегося уравнения типа колебания пластины//Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т.25. – N 8. – С.1375-1383.

9. *Лавренюк С.П.* Змішана задача для однієї слабко виродженої системи //Доп. АН України. Мат., природозн., техн. науки. – 1993. – N 5. – С. 18-20.

10. *Лавренюк С.П.* Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы //Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т.30. – N 8. – С.1405-1411.

11. *Лавренюк С.П.* Про єдиність розв'язку деяких еволюційних систем з виродженням// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.51, – С. 20-25.

12. *Lavrenyuk S.P.* On the uniqueness of a solution of mixed problem for one degenerated evolutional system// Мат. студії. – 1998. – Т.9. – N 1. – С.21-28.

13. *13. Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М., 1973.

14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

Protsakh N.

EXISTENCE OF A SOLUTION OF ONE DEGENERATED EVOLUTIONAL SYSTEM

In this paper is considered one linear evolutionary system with second time derivative degenerative into an elliptic system on the initial plane. The system contains, in particular, some classes of parabolic systems. There are obtained sufficient conditions of the existance of a weak solution of the mixed problem for the evolutional system

$$
\begin{aligned}
&(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u) + \\
&+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u_t) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t) D^\alpha u) + \\
&+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t) D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t)
\end{aligned}
$$

with the boundary and initial conditions $D^\alpha u\Big|_S = 0, \quad |\alpha| \leqslant l-1,$

$D^\alpha u_t\Big|_S = 0$, $|\alpha| = l-1$, $\lim\limits_{t\to+0} u(x,t) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{\varphi(t)}\, u_t(x,t) = 0$ in bounded noncylindrical domain which extends in time and in bounded noncylindrical domain which gets narrow in time.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.99