ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 171–174 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 171–174*

УДК 517.576

Тетяна Садо, Олег Скасків

ОЦІНКИ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ В ТЕОРЕМАХ ТИПУ БОРЕЛЯ

Нехай L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. Для $\Phi \in L$ визначимо клас

$$H(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : (\exists K_F > 0)(\ln \mu(\sigma, F) \geqslant K_F \sigma \Phi(\sigma), \sigma \geqslant \sigma_0)\}.$$

У [1] одержано такий аналог теореми Бореля.

Теорема A[1]. *Для того щоб для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ співвідношення*

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{1}$$

справджувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної міри, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty. \tag{2}$$

У праці [2] в підкласі $H(\Lambda)$, який визначається умовою $\ln \mu(\sigma, F) = O(\sigma\Phi(\sigma))$ $(\sigma \to +\infty)$, умова (2) уточнюється, про виняткову множину у співвідношенні (2) можна лише стверджувати, що вона має нульову щільність. Однак твердження теореми A допускає уточнення і в частині опису виняткової множини.

Зазначимо, що доведення сформульованої нижче теореми в частині одержання асимптотичної рівності (1) в цілому повторює доведення відповідних теорем з [1, 2], а в частині оцінки величини міри виняткової множини – у певному сенсі повторює міркування, застосовані в [3] для доведення леми 1, правильної для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Нехай $h \in L$. Для множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри її h-щільністю у нескінченності називаємо величину $D_h(E) = \varlimsup\limits_{\sigma \to +\infty} h(\sigma)\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty))$. Визначимо також $L_1 = \{h \in L : h(x + \frac{1}{h(x)}) = O(h(x)) \ (x \to +\infty)\}$. Правильна теорема.

Теорема. *Нехай $h \in L_1$, $\Phi \in L$. Якщо для функції $F \in H(\Lambda, \Phi)$ виконується умова*

$$(\forall b > 0) : \lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{n\lambda_n} = 0, \tag{3}$$

то співвідношення (1) справджується при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E, D_h(E) = 0)$.

Доведення. Нехай $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n). Оскільки $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln n$ $(n \to +\infty)$, то умову (3) можна записати у вигляді

$$\lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \int_{b\Phi(\sigma)}^{+\infty} \frac{d \ln n(t)}{t} = 0,$$

Звідси випливає існування неперервної функції $C(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ такої, що для $b > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} h(\varphi(b\lambda_n)) \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{C(t) d \ln n(2t)}{t} = 0, \tag{4}$$

де $\varphi(x)$ — функція, обернена до $\Phi(t)$.

Нехай $\alpha(t) = \int_0^t C(x) \frac{d \ln n(2x)}{x}$, $\tau_n = \alpha(\lambda_n)$, $\alpha_n = \exp\{-\int_0^{\lambda_n} \alpha(t) dt\}$. Розглянемо ряд Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{z\alpha_n}. \tag{5}$$

Зауважимо, що $\frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{\sigma \lambda_n} \leqslant |a_n| e^{(\sigma + \alpha(\lambda_n))\lambda_n} \leqslant |a_n| e^{(\sigma + A)\lambda_n}$, де $A = \int_0^{+\infty} C(t) \frac{d \ln n(2t)}{t}$. Тому $f \in H(\Lambda)$.

За умовою $F \in H(\Lambda, \Phi)$ при $\sigma \geqslant \sigma_0$ маємо $K\sigma\Phi(\sigma) \leqslant \ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(0, F) + \int_0^\sigma \lambda_{\nu(t,f)} dt \leqslant 2\sigma \lambda_{\nu(\sigma - 0, F)}$, де $\nu(t, f)$ – центральний індекс ряду (5). Тому

$$K\Phi(\sigma) \leqslant 2\lambda_{\nu(\sigma-0,F)} \ (\sigma \geqslant \sigma_0). \tag{6}$$

Нехай $(\varkappa_j)$ – послідовність точок стрибка $\nu(\sigma, f)$, тобто $\nu(\sigma, f) = j$ при $\sigma \in [\varkappa_j, \varkappa_{j+1})$ і, якщо $\nu(\varkappa_{j+1}, f) = j + p$, то $\varkappa_{j+1} = \cdots = \varkappa_{j+p} < \varkappa_{j+p+1}$.

Якщо $(\sigma - \tau_j) \in [\varkappa_j, \varkappa_{j+1})$, то за означенням максимального члена $\mu(\sigma, f)$ для всіх $n \geqslant 0$

$$\frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{(\sigma - \tau_j)\lambda_n} \leqslant \frac{|a_j|}{\alpha_j} e^{(\sigma - \tau_j)\lambda_j}.$$

Звідси при $\sigma \in [\varkappa_j + \tau_j, \varkappa_{j+1} + \tau_j)$ та $n \neq j$

$$\frac{|a_n| e^{\sigma \lambda_n}}{|a_j| e^{\sigma \lambda_j}} \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_j} e^{\tau_j (\lambda_n - \lambda_j)} = \exp\left\{ - \int_{\lambda_j}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_j)) dt \right\} < 1. \tag{7}$$

Тому для центрального індексу $\nu(\sigma, F) = j$ при $\sigma \in [\varkappa_j + \tau_j, \varkappa_{j+1} + \tau_j)$. Отже, з (7) одержуємо при $n \geqslant 0$ і $\sigma \notin \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} [\varkappa_j + \tau_{j-1}, \varkappa_j + \tau_j] \stackrel{def}{=} E$

$$\frac{|a_n| e^{\sigma \lambda_n}}{\mu(\sigma, F)} \leqslant \exp\left\{ - \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_\nu)) dt \right\} = \exp\left\{ - \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} (\lambda_n - t) d\alpha(t) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ - \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} C(t) d \ln n(2t) \right\} \tag{8}$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$.

Оскільки, не зменшуючи загальності, можна вважати $a_0 = 1$, то з (8) при $n = 0$ для $\sigma \notin E$ маємо $\ln \mu(\sigma, F) \geqslant \int_0^{\lambda_\nu} C(t) d \ln n(2t)$, тому

$$\ln n(2\lambda_\nu) = o(\ln \mu(\sigma, F)) \tag{9}$$

при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$). Нехай $m = \min\{n : \lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu\}$. Тоді при $\sigma \notin E$ з (8) одержуємо

$$\begin{aligned}
\sum(\sigma) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{\mu(\sigma, F)} \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\left\{ -\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} C(t) d \ln n(2t) \right\} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\left\{ -\int_{\lambda_\nu}^{\frac{\lambda_n}{2}} C(\lambda_\nu) \frac{\lambda_n - t}{t} d \ln n(2t) \right\} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\left\{ -C(\lambda_\nu) \left(\ln n(\lambda_n) - \ln n(2\lambda_\nu) \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Зауважимо, що при $\nu \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\{-C(\lambda_\nu) \ln n(\lambda_n)\} &= \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{C(\lambda_\nu)}} \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{C(\lambda_\nu)}} = \\
= \int_m^{+\infty} \frac{dt}{t^{C(\lambda_\nu)}} &= \frac{1}{C(\lambda_\nu) - 1} \frac{1}{m^{C(\lambda_\nu)-1}} = o\left(\frac{1}{(n(2\lambda_\nu) - 1)^{C(\lambda_\nu)-1}} \right)
\end{aligned}$$

Звідси і з (10) при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$) маємо $\sum(\sigma) = o(n(2\lambda_\nu))$, тому, застосовуючи (9), при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$) послідовно отримуємо

$$M(\sigma, F) \leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant 2\lambda_\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} + \mu(\sigma, F) \sum(\sigma) \leqslant (1 + o(1)) n(2\lambda_\nu) \mu(\sigma, F)$$

та

$$\frac{\ln M(\sigma, F)}{\ln \mu(\sigma, F)} \leqslant 1 + \frac{\ln((1 + o(1)) n(2\lambda_\nu))}{\ln \mu(\sigma, F)} = 1 + o(1).$$

Залишилось показати, що $D_h(E) = 0$.

Оскільки при $\varkappa_j < \varkappa_{j+1} = \cdots = \varkappa_{j+p} < \varkappa_{j+p+1}$ ($p \geqslant 1$) і $\sigma \in [\varkappa_j + \tau_j, \varkappa_{j+1} + \tau_j)$ маємо $\nu(\sigma, F) = j$, то для міри множини $E \cap [\sigma, +\infty)$ одержимо

$$\begin{aligned}
\operatorname{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) &= \sum_{k=j}^{+\infty} ((\varkappa_{k+1} + \tau_{k+1}) - (\varkappa_{k+1} + \tau_k)) = \\
&= \sum_{k=j}^{+\infty} (\tau_{k+1} - \tau_k) = \int_{\lambda_\nu}^{+\infty} C(t) \frac{d \ln n(2t)}{t}.
\end{aligned}$$

Якщо ж $\sigma \in [\varkappa_{j+1} + \tau_j, \varkappa_{j+1} + \tau_{j+p})$, то $\operatorname{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) \leqslant \operatorname{meas}(E \cap [\varkappa_{j+1} + \tau_j, +\infty) = \int_{\lambda_j}^{+\infty} C(t) \frac{d \ln n(2t)}{t}$. Отже, при $\sigma \in [\varkappa_j + \tau_j; \varkappa_{j+1} + \tau_{j+p})$, оскільки $\nu(\varkappa_{j+1} +$

$\tau_j - 0, F) = j$ за нерівністю (6)

$$h(\sigma)\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) \leqslant h(\varkappa_{j+1} + \tau_j + (\tau_{j+p} - \tau_j)) \int_{\lambda_j}^{+\infty} C(t) \frac{d \ln n(2t)}{t} \leqslant$$

$$\leqslant h\left(\varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_j\right) + \int_{\lambda_j}^{+\infty} \frac{C(t) d \ln n(2t)}{t}\right) \int_{\lambda_j}^{+\infty} \frac{d \ln n(2t)}{t},$$

де $\varphi(t)$ – функція обернена до $\Phi(\sigma)$. Залишилось застосувати послідовно (4) з $b = \frac{2}{K}$ і умову $h \in L_1$.

Теорему доведено.

---

1. *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию//Мат. заметки. – 1985. – Т.37. – N1. – С.41-47.
2. *Шеремета М.Н.* Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена ряда Дирихле//Мат. заметки. – 1987. – Т.42. – N2. – С.215-226.
3. *Скаскив О.Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1989. – Т.53. – N4. – С.833–850.

Salo T., Skaskiv O.

ESTIMATES OF MEASURE OF EXPONENTIAL SET IN THE THEOREMS OF BOREL TYPE

This paper contains an investigation of conditions which an entire function $F(z)$ represented by a Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, satisfies the relation

$$\ln \sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\} = (1 + o(1)) \ln \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

as $\sigma \to +\infty$ outside some set E with $DE = \varlimsup\limits_{\sigma \to +\infty} h(\sigma)\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = 0$, where $h(\sigma)$ is nonnegative continuous increasing to $+\infty$ function on $[0, +\infty)$.

Стаття надійшла до редколегії 28.12.98