ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.1999.Вип.54.С.175–179

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.1999.Vol.54.P.175–179

УДК 517.5

Олег Скасків, Оксана Трусевич

ПРО ПОВНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЛОГАРИФМІВ СУМИ ТА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ДОДАТНОГО РЯДУ ТИПУ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \nearrow +\infty(1 \leqslant n \uparrow +\infty)$; $\beta = (\beta_n)$, $\beta_n \in \mathbb{R}_+(n \geqslant 0)$, $\beta_0 = 0$, $h(\sigma)$ – невід'ємна, неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що $h(\sigma) \leqslant \sigma, \sigma \geqslant 0$.Через $R(\Lambda, \beta)$ позначимо клас збіжних при $\sigma \geqslant 0$ рядів вигляду

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n), a_n \geqslant 0 (n \geqslant 1) \tag{1}$$

Задача отримання оцінок зверху для досить широкого спектра функціональних рядів (ряди Тейлора, Діріхле, Тейлора-Діріхле, ряди за системою функцій Міттаг-Леффлера, інтерполяційні ряди) зводиться до подібної задачі для рядів з класу $R(\Lambda, \beta)$ (див.[1-3]). У праці [1] для рядів, подібних до (1), введено поняття порядку та одержано формули обчислення порядку через (a_n) і показники Λ та β. В [2,3] визначені умови правильності при $\sigma \to +\infty$ зовні виняткових множин співвідношення

$$F(\sigma) = (1 + (o(1))\mu(\sigma),$$

де $\mu(\sigma) = \max\{a_n \exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n) : n \geqslant 0\}$ - максимальний член ряду(1). Визначимо умови правильності при $\sigma \to +\infty$ співвідношення

$$\ln F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma). \tag{2}$$

Нехай $\psi(t)$ - додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція. Через $R_\psi(\Lambda, \beta)$ позначимо клас функцій $F \in R(\Lambda, \beta)$ таких, що

$$|a_n| \leqslant \exp\{-(\lambda_n + \beta_n)\psi(\lambda_n + \beta_n)\}(n \geqslant n_0). \tag{3}$$

Зауважимо, що у випадку $\beta_n \equiv 0 (n \geqslant 0)$ одержуємо класи додатних рядів Діріхле $R(\Lambda, 0)$ і $R_\psi(\Lambda, 0)$. М.М.Шеремета [4, 5] для цілих рядів Діріхле довів результат, який можна сформулювати у такій рівносильній формі.

Теорема А [4]. *Для того щоб для кожної функції $F \in R_\psi(\Lambda, 0)$ виконувалось при $\sigma \to +\infty$ співвідношення (2), необхідно і достатньо, щоб*

$$\ln n = O(\psi(\lambda_n))(n \to +\infty).$$

Правильне таке твердження.

Теорема 1. *Якщо* $F \in R_\psi(\Lambda, \beta)$ *і*

$$\ln n = O(\psi(\lambda_n + \beta_n))(n \to +\infty), \tag{4}$$

то співвідношення (2) справджується при $\sigma \to +\infty$.

Доведення. Зауважимо, що оскільки $\ln \mu(\sigma) \geqslant \ln a_n + \sigma\lambda_n$ для всіх $n \geqslant 0$, то

$$\sigma = o(\ln \mu(\sigma))(\sigma \to +\infty) \tag{5}$$

у випадку $|\{n : a_n \neq 0\}| = +\infty$. У протилежному випадку правильність (2) є очевидною. Нехай $N(\sigma)$ - найменше з тих $n_1 \geqslant n_0$, що для всіх $n \geqslant n_1$ виконується нерівність

$$\psi(\lambda_n + \beta_n) \geqslant 2\sigma, \tag{6}$$

де n_0 - визначено в (3). Тоді при $n = N(\sigma) - 1$ і $\sigma \to +\infty$

$$\psi(\lambda_n + \beta_n) < 2\sigma$$

За умовою (4) $\ln(n+1) < \tau\psi(\lambda_n + \beta_n)$ для $n \geqslant n_2$ з деякими $\tau \in (0, +\infty)$, тому при $n = N(\sigma) - 1$ і $\sigma \to +\infty$, враховуючи (5), маємо

$$\ln N(\sigma) = \ln(n+1) < 2\tau\sigma = o(\ln \mu(\sigma)). \tag{7}$$

Отже, при $\sigma \to +\infty$, використовуючи нерівність (6), одержуємо

$$F(\sigma) \leqslant \sum_{n=0}^{N(\sigma)-1} a_n \exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n) + \sum_{n=N(\sigma)}^{+\infty} \exp(-0,5(\lambda_n + \beta_n)\psi(\lambda_n + \beta_n)) \leqslant$$

$$\leqslant N(\sigma)\mu(\sigma) + O(1) \leqslant 2N(\sigma)\mu(\sigma).$$

Звідси, враховуючи (7), при $\sigma \to +\infty$ маємо

$$\ln F(\sigma) \leqslant \ln 2 + \ln N(\sigma) + \ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma).$$

Теорему 1 доведено.

Введемо також клас $\tilde{R}_\psi(\Lambda, \beta)$ функцій $F \in R(\Lambda, \beta)$ таких, що

$$|a_n| \leqslant \exp(-(\lambda_n + \beta_n)\psi(\lambda_n))(n \geqslant n_0), \tag{8}$$

і покажемо правильність такого твердження.

Теорема 2. *Якщо* $F \in \tilde{R}_\psi(\Lambda, \beta)$ *і*

$$\ln n = O(\psi(\lambda_n)), \tag{9}$$

то співвідношення (2) справджується при $\sigma \to +\infty$.

Доведення в цілому подібне до доведення теореми 1 з тією різницею, що в означенні $N(\sigma)$ замість нерівності (6) треба розглянути нерівність

$$\psi(\lambda_n) \geqslant 2\sigma,$$

звідки при $n = N(\sigma) - 1$ і $\sigma \to +\infty$ за умовою (9) одержуємо $\ln(n+1) \leqslant \tau\psi(\lambda_n)$ і, отже,

$$\ln(n+1) < 2\tau\sigma = o(\ln \mu(\sigma)).$$

Завершується доведення з використанням нерівності (8) замість нерівності (3).

З теореми А випливає, що умови як теореми 1, так і теореми 2, взагалі кажучи, покращити не можна. А у випадку $\beta_n = O(1)(n \to +\infty)$ просто отримати і необхідність умови (4) в теоремі (1) та умови (9) в теоремі 2. Справді, якщо умова (9), наприклад, не виконується, то за теоремою A, застосованою з $\psi_0(x) = 2\psi(x)$ замість $\psi(x)$, існують функція $F_0 \in R_{\psi_0}(\Lambda, 0) \equiv \tilde{R}_\psi(\Lambda, 0)$, стала $h > 0$ і послідовність $\sigma_n \to +\infty$ такі, що

$$\ln F_0(\sigma_n) \geqslant (1+h)\ln\mu(\sigma_n, F_0)(n \geqslant 1). \tag{10}$$

Треба пригадати, що $h(\sigma) \leqslant \sigma(\sigma \geqslant 0)$ і тому за виконання умови $\beta = \sup\{\beta_n : n \geqslant 0\} < +\infty$, для функції F вигляду (1) з коефіцієнтами тими ж, що й у функції F_0,

$$\ln\mu(\sigma, F_0) \leqslant \ln\mu(\sigma, F) \leqslant \beta h(\sigma) + \ln\mu(\sigma, F_0)(\sigma \geqslant 0).$$

Звідси,

$$\ln\mu(\sigma, F) = (1 + o(1))\ln\mu(\sigma, F_0)(\sigma \to +\infty).$$

Отже, за допомогою (10), одержуємо при $n \to +\infty$

$$\ln F(\sigma_n) \geqslant \ln F_0(\sigma_n) \geqslant (1+h)(1+o(1))\ln\mu(\sigma, F) \geqslant (1+0,5h)\ln\mu(\sigma_n, F),$$

і необхідність умови (9) для правильності при $\sigma \to +\infty$ для кожної функції $F \in \tilde{R}_\psi(\Lambda, \beta))$ співвідношення (2) доведено, оскільки при $n \to +\infty$

$$a_n \leqslant \exp(-\lambda_n\psi_0(\lambda_n)) \leqslant \exp(-(\lambda_n + \beta_n)\psi(\lambda_n)).$$

Подібно доводимо необхідність умови (4) в теоремі 1 у випадку $\beta_n = O(1)(n \to +\infty)$ і функції ψ такої, що $\psi(2t) = O(\psi(t))(t \to +\infty)$. В загальному правильна така теорема, яка свідчить про необхідність умови (4) теореми 1.

Теорема 3. *Якою б не була послідовність $\mu_n = \lambda_n + \beta_n \nearrow (n \to +\infty)$, для якої $\tau = \sup\{\frac{\beta_n}{\lambda_n} : n \geqslant 1\} < +\infty$,*

$$\ln n = o(\mu_n\psi(\mu_n)) \quad (n \to +\infty) \tag{11}$$

і умова (4) не виконується, функція $h(\sigma)$ така, що $0 \leqslant h'(\sigma) \leqslant 1$ $(\sigma \in [0, +\infty))$ і додатна стала $b > 0$, існує функція F вигляду (1) і послідовність $\sigma_k \uparrow +\infty$ така, що для всіх $k \geqslant 1$

$$\ln F(\sigma_k) \geqslant (1+b)\ln\mu(\sigma_k). \tag{12}$$

Доведення Нехай $P = \frac{8}{3}(1+\tau)$. Позначимо $\alpha_n(\sigma) = \sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n$. Виберемо зростаючі послідовності $\{n_k\} \subset \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $m_k = 0,5n_k$ і через $\varkappa_k$ позначимо єдиний розв'язок рівняння $\alpha_{n_k}(\sigma) = \alpha\ln n_k + P\mu_{n_k}\psi(\mu_{n_k}), \alpha = \frac{1}{2b}$. Зауважимо, що при $k \geqslant 1$

$$\varkappa_k \geqslant P\psi(\mu_{n_k}), \tag{13}$$

та

$$\varkappa_k\lambda_{n_k} \leqslant \alpha\ln n_k + P\mu_{n_k}\psi(\mu_{n_k}),$$

звідси

$$\varkappa_k \leqslant P_1\psi(\mu_{n_k}), \tag{14}$$

якщо виконується перша умова вибору n_k

$$\frac{\ln n_k}{\mu_{n_k}\psi(\mu_{n_k})} \leqslant 1 \quad (k \geqslant 1), \tag{15}$$

де $P_1 = (P+\alpha)(1+\tau)$. Інші умови вибору (n_k), $n_1 = 2$ та для всіх $k \geqslant 1$

$$\frac{\ln n_k}{\lambda_{m_k}\psi(\mu_{n_k})} \leqslant \frac{P}{4\alpha}, \tag{16}$$

$$\psi(\mu_{n_{k+1}}) \geqslant \frac{2P_1\psi(\mu_{n_k})}{P}, \tag{17}$$

$$\ln n_{k+1} > 2\ln n_k, \tag{18}$$

$$\frac{\ln n_{k+1}}{\psi(\mu_{n_{k+1}})\mu_{n_k}} \geqslant \frac{4P_1}{\alpha}. \tag{19}$$

Зауважуючи, що з умови (11) випливає $\ln(2n) = o(\lambda_n\psi(\mu_{2n}))(n \to +\infty)$, а з того, що умова (4) не виконується, випливає існування послідовності $p_k \nearrow +\infty$ такої, що $\frac{\ln(2p_k)}{\psi(\mu_{2p_k})} \uparrow +\infty$, негайно одержуємо, що умови (15) - (19) вибору послідовності (n_k) є не суперечливими. Вибираємо тепер $a_{n_k} = \exp(-P\mu_{n_k}\psi(\mu_{n_k}))$, для $n_{k-1} < n < m_k$, $a_n = 0$, а для $m_k \leqslant n \leqslant n_k$ $a_n = A_{n_k}(\varkappa_k)\exp(-\alpha_n(\varkappa_k))$, де $A_n(\sigma) = a_n\exp(\alpha_n(\sigma))$. Оскільки $A_{n_k}(\varkappa_k) = n_k^\alpha$, то для $m_k \leqslant n \leqslant n_k$, $k \geqslant 1$ з нерівностей (13) та (16) отримуємо

$$\ln a_n = \alpha\ln n_k - \alpha_n(\varkappa_k) \leqslant \alpha\ln n_k - P\psi(\mu_{n_k})\lambda_n \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{3}{4}P\psi(\mu_{n_k})\lambda_n \leqslant -\frac{3}{8}P(1+\tau)\mu_n\psi(\mu_n) = -\mu_n\psi(\mu_n),$$

що разом з умовою (11) дає $F \in R_\psi(\Lambda,\beta)$.

Покажемо, що $\mu(\varkappa_k) = A_n(\varkappa_k) = n_k^\alpha$ для $m_k \leqslant n \leqslant n_k$. Для $j \geqslant 1$ та $m_{k+j} \leqslant n \leqslant n_{k+j}$, послідовно використовуючи (13), (14), (17), (16), маємо

$$\ln\frac{A_{n_k}(\varkappa_k)}{A_n(\varkappa_k)} = \alpha\ln\frac{n_k}{n_{k+j}} + (\varkappa_{k+j}-\varkappa_k)\lambda_n + (h(\varkappa_{k+j}) - h(\varkappa_k))\beta_n \geqslant$$
$$\geqslant -\alpha\ln n_{k+j} + (P\psi(\mu_{n_{k+j}}) - P_1\psi(\mu_{n_k}))\lambda_n \geqslant$$
$$\geqslant -\alpha\ln n_{k+j} + \frac{P}{2}\psi(\mu_{n_{k+j}})\lambda_n \geqslant -\alpha\ln n_{k+j} + \frac{P}{2}\psi(\mu_{n_{k+j}})\lambda_{m_{k+j}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{P}{4}\lambda_{m_{k+j}}\psi(\mu_{n_{k+j}}) > 0,$$

тобто $A_{n_k}(\varkappa_k) > A_n(\varkappa_k)$ для $m_{k+j} \leqslant n \leqslant n_{k+j}, j \geqslant 1$. Для $1 \leqslant j < k, m_{k-j} \leqslant n \leqslant n_{k-j}$, використовуючи послідовно умову (18), нерівність $h'(\sigma) \leqslant 1(\sigma > 0)$, та нерівності (14) та (19), одержуємо

$$\ln\frac{A_{n_k}(\varkappa_k)}{A_n(\varkappa_k)} = \alpha\ln\frac{n_k}{n_{k-j}} - (\varkappa_k - \varkappa_{k-j})\lambda_{n_{k-j}} - (h(\varkappa_k) - h(\varkappa_{k-j}))\beta_{n_{k-j}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{2}\ln n_k - (\varkappa_k - \varkappa_{k-j})\mu_{n_{k-j}} \geqslant \frac{\alpha}{2}\ln n_k - \varkappa_k\mu_{n_{k-j}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{2}\ln n_k - P_1\psi(\mu_{n_k})\mu_{n_{k-j}} \geqslant \frac{\alpha}{4}\ln n_k > 0,$$

тобто $A_{n_k}(\varkappa_k) > A_n(\varkappa_k)$ для $m_{k-j} \leqslant n \leqslant n_{k-j}, 1 \leqslant j < k$. Отже, $\mu(\varkappa_k) = A_n(\varkappa_k) = n_k^\alpha$ для $m_k \leqslant n \leqslant n_k$ і остаточно для $k \geqslant 2$ одержуємо

$$F(\varkappa_k) \geqslant \sum_{n=m_k}^{n_k} A_n(\varkappa_k) = (n_k - m_k + 1)n_k^\alpha \geqslant \frac{1}{2}(\mu(\varkappa_k))^{1+\frac{1}{\alpha}},$$

тобто

$$\ln F(\varkappa_k) \geqslant (1+2b)\ln\mu(\varkappa_k) - \ln 2 = (1+b)\ln\mu(\varkappa_k) + \frac{1}{2}\ln n_k - \ln 2 \geqslant (1+b)\ln\mu(\varkappa_k),$$

достатньо вибрати $\sigma_k = \varkappa_{k+1}$ і теорему 3 доведено. Подібно доводимо теорему, яка свідчить про необхідність умови (9) для правильності співвідношення (2) в класі $\tilde{R}_\psi(\Lambda,\beta)$.

Теорема 4. *Якою б не була послідовність $\mu_n = \lambda_n + \beta_n \nearrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, для якої $\tau = \sup\{\frac{\beta_n}{\lambda_n} : n \geqslant 1\} < +\infty$, $\ln n = o(\mu_n\psi(\mu_n))$ $(n \to +\infty)$ і умова (4) не виконується, функція $h(\sigma)$ така, як у теоремі 3 і додатна стала $b > 0$, існують функція $F \in \tilde{R}_\psi(\Lambda,\beta)$ і послідовність $\sigma_k \nearrow +\infty$ такі, що для всіх $k \geqslant 1$ справджується нерівність (12).*

---

1. *Осколков В.А.* О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами // Мат. сб. – 1976. – Т.100. – №2. – С.312–334.
2. *Величко С.Д., Скасків О.Б.* Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1989. – Вип.32. – С.50–51.
3. *Скасків О.Б., Трусевич О.М.* Максимальний член і сума регулярно-збіжного функціонального ряду // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.49. – С.75–79.
4. *Шеремета М.М.* О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле // Мат.заметки. – 1992. – Т.51. – №5. – С.141–148.
5. *Шеремета М.М.* Про співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом цілого ряду Діріхле // Мат. студії. – 1991. - Вип.1. – С.33–43.

Skaskiv O., Trusevych O.

ON FULL EQUIVALENCE LOGARITHMES OF A SUM AND A MAXIMAL TERM OF POSITIVE SERIES OF TALOR-DIRICHLET TYPE

Unimproved conditions under which the asymptotic equality

$$\ln F(\sigma) \sim \ln\max\{a_n\exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n) : n \geqslant 0\}$$

holds as $\sigma \to +\infty$ are established for functional series of the form

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n), \quad a_n \geqslant 0 \quad (n \geqslant 0).$$

Стаття надійшла до редколегії 14.06.99