ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 180–182
VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 180–182

УДК 517.576

Олег Скасків

ПРО КЛАСИЧНУ НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Відомо, (див., наприклад, [1, с.214]), що для кожної цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subset [1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто $\int_E r^{-1}\, dr < +\infty$) така, що для всіх $r \in [1, +\infty) \setminus E$ правильна нерівність

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r)\big(\ln \mu_f(r)\big)^{1/2+\varepsilon}. \tag{1}$$

У випадку цілих рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n} \tag{2}$$

$0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant n \to +\infty)$ аналоги нерівності (1) близькі до класичної знаходимо в [2–4]. Зокрема, за виконання умови $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$ $(n \geqslant 0)$ в [2] показано, що $\forall \varepsilon > 0$, нерівність

$$M(\sigma, F) \leqslant \mu(\sigma, F)\big(\ln \mu(\sigma, F)\big)^{1/2+\varepsilon} \tag{3}$$

справджується для всіх $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, E – скінченної міри, де $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$. У працях [3, 4] за виконання умови

$$|n(t) - \Delta t^\rho| \leqslant D \ (t \geqslant t_0), \quad 0 < \Delta < +\infty, \frac{1}{2} \leqslant \rho, D < +\infty, \tag{4}$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$, показано, що для кожного $\varepsilon > 0$, нерівність

$$M(\sigma, F) \leqslant \mu(\sigma, F)\big(\ln \mu(\sigma, F)\big)^{\rho - 1/2+\varepsilon}$$

справджується для всіх $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, E – скінченної міри.

Нехай L – клас додатних неперервних функцій таких, що $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$.

У цьому повідомленні доведемо теорему.

Теорема 1. *Нехай F має вигляд (2). Якщо для деякої функції $\psi \in L$ виконується умова*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\ln n_1\big(t, \sqrt{\psi(t)}\big)}{\ln t} \leqslant p, \tag{5}$$

де $n_1(a,\Delta)=n(a+\Delta,a-\Delta)$, *то для кожного* $\varepsilon>0$ *і для всіх* $\sigma\in[0,+\infty)\setminus E$, *(*$E$ *– деяка множина скінченної міри)*

$$M(\sigma,F)\leqslant\mu(\sigma,F)\big(\ln\nu(\sigma,F)\big)^{p+\varepsilon}.$$

Оскільки за виконання умови $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant h>0$ $(n\geqslant 0)$ в (5) можна вибрати $p=1/2$, а за виконання умови (4) – $p=\rho-1/2$ (при цьому в (5) існує границя), то з теореми 1 одержуємо цитовані вище результати з [2–4].

Про те, що теорему 1 не можна покращити, свідчить теорема 2.

Теорема 2. *Якщо для деякої функції* $\psi\in L$ *такої, що* $\psi(t)=O(t\ln t\ln^2\ln t)$ $(t\to+\infty)$ *виконується умова*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\ln n_1(t,\sqrt{\psi(t)})}{t^p}=p_1,\quad p>0,$$

то існує цілий ряд Діріхле F *вигляду (2), для якого*

$$\frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma,F)}\big(\ln\mu(\sigma,F)\big)^{-p}\to+\infty\quad(\sigma\to+\infty).$$

Звідси, зокрема, отримуємо, що для кожної послідовності Λ такої, що виконується умова (4) існує цілий ряд Діріхле, для якого

$$\frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma,F)}\big(\ln\mu(\sigma,F)\big)^{\rho-1/2}\to+\infty\quad(\sigma\to+\infty).$$

Доведення теореми 1. При фіксованому $\sigma\in\mathbb{R}$ нехай ξ – дискретна випадкова величина з розподілом ймовірностей

$$P\{\xi=\lambda_n\}=\frac{1}{\mathfrak{m}(\sigma)}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}\quad(n\geqslant 0),$$

де $\mathfrak{m}(\sigma)=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}$. Зауважимо, що математичне сподівання $M\xi=g'(\sigma)$ і дисперсія $D\xi=g''(\sigma)$, де $g(\sigma)=\ln\mathfrak{m}(\sigma)$.

Нехай $\psi_1\in L$ і g_1 – диференційовна додатна зростаюча функція, а $E(g_1)=\{\sigma\geqslant 0:g_1'(\sigma)\geqslant\psi_1(g_1(\sigma))\}$. Тоді, очевидно, лебегова міра $\operatorname{meas}\big(E(g_1)\big)<+\infty$. Тому при $\psi_1(t)=\frac{1}{2}\psi(t)$ і $g_1(\sigma)=g'(\sigma)$ маємо, що $E(g')$ має скінченну міру, а також при $\psi_1(t)=t(\ln^+t)^2$, $g_1(\sigma)=g(\sigma)-E(g)$ має скінченну міру. Тому, одночасно, при $\sigma\notin E(g)\cup E(g')\overset{def}{=}E$ виконуються нерівності

$$g''(\sigma)\leqslant\frac{1}{2}\psi\big(g'(\sigma)\big),\quad g'(\sigma)\leqslant g(\sigma)\big(\ln^+g(\sigma)\big)^2.\tag{6}$$

Застосовуючи тепер при $\varepsilon=\sqrt{2D\xi}$ нерівність Чебишева $P\{|\xi-M\xi|\leqslant\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$, одержуємо $\mathfrak{m}(\sigma)\leqslant 2\sum_{|\lambda_n-g'(\sigma)|\leqslant\sqrt{2g''(\sigma)}}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}$. Звідки, застосовуючи послідовно першу нерівність з (6), умову (5), а потім другу нерівність з (6), отримуємо нерівність з теореми 1.

Доведення теореми 2. Припустимо, що $\ln n=o(\lambda_n)$ $(n\to+\infty)$, виберемо $\ln a_n=-\beta\lambda_n(\ln_3\lambda_n)^+$, $\beta>0$, і розглянемо функцію F вигляду (2). Позначимо $h(x)=-\beta x\ln_3^+x+\sigma x$ і $x(\sigma)$ – єдину точку максимуму $h(x)$ при $x\geqslant e^e$. Тоді при $\sigma\to+\infty$

$$\ln\mu(\sigma,F)\leqslant h\big(x(\sigma)\big)=\beta x(\sigma)/\big(\ln x(\sigma)\ln_2 x(\sigma)\big).$$

Нехай $t_{\pm} = x(\sigma) \pm \sqrt{\psi(x(\sigma))}$. Оскільки $h''(x) \sim -\beta(x \ln x \ln_2 x)^{-1}$ $(x \to +\infty)$, то, враховуючи, що при $x \in (t_-, t_+)$

$$h(x) = h\big(x(\sigma)\big) + \frac{h''(\tilde{x})}{2}\big(x - x(\sigma)\big)^2 \geqslant$$
$$\geqslant h(x(\sigma)) - \Big(\frac{\beta}{2} + o(1)\Big)\big((x(\sigma)\ln x(\sigma)\ln_2 x(\sigma)\big)^{-1}\psi\big(x(\sigma)\big),$$

при $\sigma \to +\infty$ одержимо

$$F(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{h(x)}dn(x) \geqslant \int_{t_-}^{t_+} e^{h(x)}dn(x) \geqslant$$
$$\mu(\sigma, F)n_1\big(x(\sigma), \sqrt{\psi(x(\sigma))}\big)\exp\Big\{-\Big(\frac{\beta}{2} + o(1)\Big)\big((x(\sigma)\ln x(\sigma)\ln_2 x(\sigma)\big)^{-1}\psi\big(x(\sigma)\big)\Big\}.$$

Зважаючи на те, що $\psi(t) \leqslant Kt\ln t\ln_2^2 t$ $(t \to +\infty)$, а за умовою $n_1\big(x(\sigma), \sqrt{\psi(x(\sigma))}\big) \geqslant c_1\big(x(\sigma)\big)^p \geqslant c_2\big(\ln\mu(\sigma, F)\ln x(\sigma)\ln_2 x(\sigma)\big)^p$, де $c_1, c_2 > 0$, то, вибираючи $\beta = \varepsilon/K$, $\varepsilon \in (0, p)$, при $\sigma \to +\infty$ одержуємо

$$F(\sigma) \geqslant \mu(\sigma, F)\big(\ln\mu(\sigma, F)\big)^p \exp\Big\{\big(p - \frac{\varepsilon}{2} + o(1)\big)\ln_2 x(\sigma)\Big\} \geqslant$$
$$\geqslant \mu(\sigma, F)\big(\ln\mu(\sigma, F)\big)^p\big(\ln_2\mu(\sigma, F)\big)^{p-\varepsilon}. \quad (7)$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Насправді доведено за виконання умов теореми 2 сильнішу нерівність (7).

---

1. *Валірон Ж.* Аналитические функции. – М., 1957.
2. *Sunier i Balaguer F.* Generalizacion de metodo de Wiman-Valiron a una classe de series de Dirichlet // Publ. semin. math. fac. cient Zaragoza. – 1962. – №3. – P.43–47.
3. *Шеремета М.Н.* Метод Вимана- Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле// Докл. АН СССР. – 1978. – Т.240. – №5. – С.1036–1039.
4. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.

Skaskiv O.

ON THE CLASSICAL WIMAN INEQUALITY FORf ENTIRE DIRICHLET SERIES

We establish unimprovable conditions for entire Dirichlet series under which the classical Wiman inequality holds.

Стаття надійшла до редколегії 09.09.99