ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 54

Львів 1999

ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 54

Видається з 1965 року

Львів
ЛНУ імені Івана Франка
1999

Міністерство освіти України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. 1999. Випуск 54. 184 с.

Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. 1999. №54. 184 p.

Вісник містить статті з теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, алгебри, топології, теорії функцій комплексного змінного, функціонального аналізу, теорії ймовірності та статистики, проблем математичного моделювання фізико-механічних процесів і механіки.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

The issue contains articles on theory of boundary value problems for differential equations, algebra, topology, complex analysis, functional analysis, probability theory and statistics, problems of mathematical modelling of physical and mechanical processes and mechanics.

For scientists, post graduates and students.

Адреса редакційної колегії:

79002, Львів, вул. Університетська, 1, Львівський національний університет,
мех.-мат. ф-т, кафедра диференціальних рівнянь
Тел. (0322) 79-45-93 E-mail: diffeq@franko.lviv.ua

Chair of Differential Equations, Departament of Mechanics and Mathematics,
Lviv National University, Universytetska 1, Lviv, 79002

Відповідальний за випуск *С. П. Лавренюк*

Редактор *Н. Плиса*

Друкується за ухвалою Вченої Ради Львівського національного університету імені Івана Франка

ЗМІСТ

CONTENTS

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 5-9

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 5-9

УДК 519.21

Ірина Ардан

ДЕЯКІ ПРИНЦИПИ ВИБОРУ СТРАХОВИХ ВНЕСКІВ

Різноманітні економічні механізми стабілізації або "зменшення ризику" належать здебільшого до двох типів. Перший тип – це механізми, так чи інакше націлені на реальне зниження ймовірностей аварії чи розмірів відповідних збитків, другий – різні механізми перерозподілу ризику. Сам собою механізм перерозподілу ризику не знижує ймовірності появи ризикових ситуацій, а лише перерозподіляє відповідальність за ризик. Такі механізми тим ефективніші, чим більше самостійних економічних одиниць у системі і чим менша для кожної з них ймовірність збитків.

Укладаючи страхові контракти, припускають наявність апріорної інформації про розподіл можливих збитків і можливості уточнення інформації за результатами діяльності економічних одиниць. Під час формування механізмів перерозподілу ризику роблять вибір між багатьма можливостями.

Серед них:

1) створення страхової організації, яка бере на себе зобов'язання повного чи часткового повернення збитків із коштів, отриманих у результаті нагромадження страхових внесків;

2) створення організації взаємного страхування. В цьому випадку відшкодування збитків відбувається шляхом перерозподілу страхового фонду;

3) особливим макромеханізмом є перестрахування, тобто перерозподіл ризику між страховими організаціями шляхом, наприклад, перерозпродажу зобов'язань на покриття страхових витрат або на основі інших договорів між страховими фірмами;

4) використання опціонів, тобто довготермінових угод про право на купівлю чи продаж. Ці договори укладають у випадку, коли треба гарантувати купівлю чи продаж за наперед домовленою ціною. Їх використовують під час продажу акцій, укладають у зв'язку з використанням іноземної валюти.

Побудова практично будь-якої моделі страхування складається з таких елементів.

1. Опис випадкових процесів надходження прибутків чи виникнення збитків окремих елементів системи і опис процесу виникнення глобальних збитків (чи прибутків) системи в цілому.

2. Визначення цілей окремих одиниць, які здебільшого призводять до визначення функції корисності цих економічних одиниць.

3. Визначення механізму стабілізації. У випадку перерозподілу ризику принциповим є вибір між деякими можливостями. Перша можливість – створити незалежну страхову організацію, яка має власну мету – максимізувати прибутки від страхової діяльності, мінімізувати ймовірності банкрутства і т.д. Друга

– створення страхового товариства, фонд якого "справедливо" розподіляється між членами товариства в найвигіднішний час. Тоді розміри внесків, правила розподілу фонду спираються на принципи, що пов'язані з міркуваннями стабільності, рівноваги поведінки системи. Внаслідок такого підходу страхове товариство є добровільним об'єднанням економічних одиниць: розмір внесків визначають вони добровільно, з огляду на власні інтереси. а правила розподілу фонду визначають до реалізації економічної ситуації. У такій ситуації якість функціонування відповідних самостійних "страхових" одиниць повинна зумовлюватись їхньою зацікавленістю.

4. Опис механізму взаємодії між страховим товариством і клієнтами. В кінцевому результаті розв'язок такої задачі призводить до опису "ринкової" рівноваги у відповідній моделі, наприклад, у простому випадку до визначення вартості страхових полісів. Найскладніша задача виникає при наявності клієнтів з різними степенями ризику, для яких випадкові величини можливих збитків мають різні розподіли ймовірностей. У загальному випадку виникає необхідність у природному "ринковому" розподілі клієнтів на однорідні групи.

Що стосується механізмів розподілу, то можливі різні варіанти. Можна визначити різні ціни страхових полісів при різних максимальних сумах відшкодувань (у цьому випадку повернення може бути частковим). При єдиній ціні страхових полісів після реалізації випадкової ситуації повертати частину виплачених сум тим клієнтам, які не потребують відшкодувапнь збитків (премія за стабільність). Розглянемо деяку страхову організацію, яка випустила і продала n страхових полісів. Нехай резервний капітал дорівнює S. Кожен страховий контракт містить страхові виплати клієнтам, які є незалежними випадковими величинами (ВВ). Позначимо через X_i виплати і-му клієнту, а її функцію розподілу (ФР) – F_i. Вважаємо, що $X_i \geqslant 0$. Загальні страхові виплати, які породжені цим набором страхових полісів має вигляд $X = \sum X_i$. Функцію розподілу ВВ X позначимо через $F(x)$. $F(x)$ називають розподілом ризику страхової компанії. Припустимо, що ВВ X має скінченне математичне сподівання $EX = M$ і дисперсію DX. Ціна полісу $M_1 = \frac{M}{n}$ називається чистою ціною, тоді середній дохід компанії дорівнює нулю. Насправді в ціну поліса входить ще так зване навантаження, яке відповідає витратам компанії на сам процес страхування з прийнятим для компанії рівнем прибутку. Нехай L_i – навантаження, що відповідає і-му полісу. Тоді перед початком страхових виплат компанія має капітал

$$S + \sum L_i + M = R + M.$$

Величина R називається вільним резервом. Ризикова ситуація страхової компанії характеризується двома елементами R та $F(x)$. Виникають такі проблеми:

1) страхова компанія так повинна визначити свою політику і навантаження, щоб ризик був мінімальним;

2) треба проаналізувати цю ризикову ситуацію і спробувати її "оптимізувати" за допомогою деяких механізмів перестрахування. Нехай $Y = R + M - X$ – кінцевий капітал страхової компанії, $G(y)$ – ФР ВВ Y. Між ФР $G(y)$ і ризиковими ситуаціями $(R, F(x))$ встановлюється взаємнооднозначна відповідність, і замість всіх ризикових ситуацій можна розглядати множину ймовірнісних розподілів, які їм відповідають.

Для визначення оптимальної політики страхової компанії треба порівнювати різні ризикові ситуації. Страхова компанія повинна визначити свою систему переваг на множині ВВ Y майбутнього прибутку. Практично задача зводиться до того, щоб кожній ВВ Y поставити у відповідність число $U(Y)$ – якість чи корисність ВВ прибутку Y, де $U(Y) = \int u(y)dG(y) = Eu(Y)$, $u(y)$ – деяка функція корисності грошей компанії, $G_Y(y) = P\{Y < y\}$. Отже, корисність будь-якої ризикової ситуації може бути представлена як середнє значення випадкової корисності майбутнього прибутку. Вивчення відношення страхової компанії до різних ризикових ситуацій рівносильне дослідженню властивостей функції $u(y)$.

Нехай компанія володіє початковим капіталом S, а її функція корисності має вигляд $u(y) = ay^2 + by + c$. Компанія має справу з n клієнтами і X_i – випадкова величина, яка означає можливі збитки і-го клієнта. Вважаємо, що клієнти однорідні в тому сенсі, що початковий капітал I однаковий, функція корисності $u_1(y)$ така сама для всіх X_i, а саме – $u_1(x) = |a_1x + b_1|$. Випадкові величини X_i однаково розподілені та незалежні в сукупності. Будемо вважати, що ФР $F_i(x)$ ВВ X_i має вигляд $F_i = c_1F_1(x) + c_2F_2(x)$, де $F_1(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$, $F_2(x) = 1 - e^{-\lambda_2 x}$, $c_1 + c_2 = 1$. Тоді $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ – сумарна вимога на виплату збитків.

Нехай d – ціна одного страхового полісу. Тоді $D = nd$ є сумарний страховий внесок.

Орієнтуючись на очікувану корисність, страхова компанія погодиться страхувати клієнтів, якщо
$$Eu(S + D - X) \geqslant u(S). \tag{1}$$

Клієнт буде страхуватися тільки тоді, коли
$$u_1(I - d) \geqslant E(I - X_1). \tag{2}$$

Нехай D^* – найменше з D, для яких виконується нерівність (1), а d^* – найбільше зі значень d, для яких правильна нерівність (2). Тоді якщо $D^* > nd^*$, то страхування неможливе. Якщо $D^* \leqslant nd^*$, то страхування можливе і $d^* \approx \frac{D^*}{n}$.

Згідно з нашими припущеннями ФР $F_X(x)$ ВВ X має вигляд
$$F_X(x) = \int_0^x f_X(y)dy,$$
де $f_X(y)$ – щільність розподілу ВВ X, яка вираховується в явному вигляді
$$f_X(x) = e^{-\lambda_1 x}\left(A_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + A_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + A_{n-1}\frac{x}{1!} + A_n\right) +$$
$$+e^{-\lambda_2 x}\left(B_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!)} + B_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + B_{n-1}\frac{x}{1!} + B_n\right), \tag{3}$$
де
$$A_1 = \lambda_1^n c_1^n, \quad B_1 = \lambda_2^n c_2^n,$$
$$A_k = \frac{(\lambda_1 c_1)^{n-k+1}\lambda_2 c_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^{k-1}}\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i C_n^{i+1}C_{k-2}^i(\lambda_1 c_1)^{k-2-i}(\lambda_2 c_2)^i,$$
$$B_k = \frac{(\lambda_2 c_2)^{n-k+1}\lambda_1 c_1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^{k-1}}\sum_{i=0}^{k-2}(-1)^i C_n^{i+1}C_{k-2}^i(\lambda_2 c_2)^{k-2-1}(\lambda_1 c_1)^i, k = \overline{2, n}.$$

Тоді правильна лема.

Лема. *Якщо щільність розподілу $f_X(x)$ ВВ X задається формулою (3), тоді ФР $F_X(x)$ ВВ X має вигляд*

$$F_X(x) = K_n - e^{\lambda_1 x}\left(K_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + K_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + K_{n-1}\frac{x}{1!} + K_n\right)$$
$$+H_n - e^{-\lambda_2 x}\left(H_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + H_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + H_{n-1}\frac{x}{1!} + H_n\right), \tag{4}$$

$$\text{де}\quad K_m = \frac{1}{\lambda_1^m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_1^{i-1}A_i,\quad H_m = \frac{1}{\lambda_2^m}\sum_{i=1}^{m}\lambda_2^{i-1}B_i,\qquad m=\overline{1,n}.$$

Знайдемо d^* з врахуванням умови (2). Оскільки $u_1(I-d) = |a_1(I-d)+b_1|$, то

$$Eu_1(Y) = \int_0^I |a_1(I-x)+b_1|dF(x) =$$
$$= \begin{cases} (a_1I+b_1)F(I) + a_1\left[\frac{1}{\lambda_1}(e^{-\lambda_1 I}R+R_1) + \frac{1}{\lambda_2}(e^{-\lambda_2 I}T+T_1)\right],\ X \leqslant I + \frac{b_1}{a_1} \\ -(a_1I+b_1)F(I) - a_1\left[\frac{1}{\lambda_1}(e^{-\lambda_1 I}R+R_1) + \frac{1}{\lambda_2}(e^{-\lambda_2 I}T+T_1)\right],\ X > I + \frac{b_1}{a_1}, \end{cases}$$

де

$$R_1 = \frac{A_1n}{\lambda_1^n} + \frac{A_2(n-1)}{\lambda_1^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}2}{\lambda_1^2} + \frac{A_n}{\lambda_1},$$
$$T_1 = \frac{B_1n}{\lambda_2^n} + \frac{B_2(n-1)}{\lambda_2^{n-1}} + \dots + \frac{B_{n-1}2}{\lambda_2^2} + \frac{B_n}{\lambda_2};$$
$$R = A_1n\frac{I^n}{n!} + \frac{A_1n + A_2(n-1)\lambda_1}{\lambda_1}\frac{I^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$
$$+\frac{A_1n + A_2(n-1)\lambda_1 + A_3(n-2)\lambda_1^2 + \dots + A_{n-1}2\lambda_1^{n-1} + A_n\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^{n-1}}I +$$
$$+\frac{A_1n + A_2(n-1)\lambda_1 + \dots + A_{n-1}2\lambda_1^{n-2} + A_n\lambda_1^{n-1}}{\lambda_1^n};$$
$$T = B_1n\frac{I^n}{n!} + \frac{B_1n + B_2(n-1)\lambda_2}{\lambda_2}\frac{I^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$
$$+\frac{B_1n + B_2(n-1)\lambda_2 + \dots + B_{n-1}2\lambda_2^{n-1}}{\lambda_2^n};$$
$$F(I) = K_n - e^{-\lambda_1 I}\left(K_1\frac{I^{n-1}}{(n-1)!} + K_2\frac{I}{\lambda^{n-1}} + \dots + K_{n-1}I + K_n\right) -$$
$$H_n - e^{-\lambda_2 I}\left(H_1\frac{I^{n-1}}{(n-1)!} + H_2\frac{I}{\lambda^{n-1}} + \dots + H_{n-1}I + H_n\right).$$

Підставивши вираз (5) в умову (2) одержимо умову на ціну d одного полісу.

Теорема. *Ціна полісу d для заданої функції корисності повинна задовольняти таку умову*

$$0 < d \leqslant I + \frac{b_1}{a_1} - \frac{Eu_1(I-X_1)}{a_1}. \tag{6}$$

Доведення. Виберемо загальну суму страхових внесків D, враховуючи принцип "нульової корисності". Функція корисності $u(y)$ задовільняє умови $u'(y) > 0, u''(y) \leqslant 0$, тобто $u'(y) = 2ay + b > 0, u''(y) = 2a \leqslant 0$. D знаходимо з рівняння

$$Eu(S + D - X) = u(S) \tag{7}$$

Оскільки $u(S) = aS^2 + bS + c$,

$$Eu(Y) = \int_0^\infty u(S + D - X)dF(x) =$$

$$a(S + D)^2 + b(S + D) + c - (2a(S + D) + b)EX + a(D(X) + (EX)^2),$$

де EX – математичне сподівання, DX – дисперсія в.в. X, тоді

$$aD^2 + D(h - 2aEX) - hEX + a(D(X) + (EX)^2) = 0, h = 2aS + b. \tag{8}$$

Рівняння (8) має розв'язок

$$D_{1,2} = \left(EX - \frac{h}{2a}\right) \pm \frac{\sqrt{h^2 - 4a^2D(X)}}{2a}.$$

D_1, D_2 повинні бути додатні, тоді якщо:

a) $\frac{h}{2a} > \sigma X$, то $S > \sigma X - \frac{b}{2a}$, $D_{1,2} \leqslant EX - \sigma X \pm \frac{\sqrt{h^2 - 4a^2D(X)}}{2a}$,
при $\frac{h}{2a} = \sigma X, D = EX - \sigma X$;

b) $\frac{h}{2a} < -\sigma X$, то $S > -\sigma X - \frac{b}{2a}$, $D_{1,2} \geqslant EX + \sigma X \pm \frac{\sqrt{h^2 - 4a^2D(X)}}{2a}$,
при $-\frac{h}{2a} = \sigma X, D = EX + \sigma X$.

$$EX = n\left(\frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}\right), \quad DX = n\left(\frac{c_1}{\lambda_1^2} + \frac{c_2}{\lambda_2^2}\right).$$

---

1 *Бенинг В.Е., Ротарь В.И.* Одна модель оптимального поведения страховой компании// Экон. и мат. методы. – 1993. – Т. 29. – Вып. 4. – С. 617-626.

2 *Ротарь В.И.* Некоторые замечания о существовании и свойствах функции полезности// Экон. и мат. методы. – 1982. – Т.18. – Вып. 4. – С. 719-723.

3 *Ротарь В.И.* Теория вероятностей. – М., 1992.

4 *Фишберн Н.С.* Теория полезности для принятия решений. – М., 1978.

5 *Эмбрехте П., Клюппельберг К.* Некоторые аспекты страховой математики// Теория вероятности и ее применение. – 1993. – Т. 38. – Вып. 2. – С. 374-416.

Ardan I.

SOME KINDS OF CHOICE THE INSURANCE ACCIDENTS

The article considers the portfolio of the insurance company. The portfolio contains one kind of insurance accidents. In this article the terms of the policy price, the amount of summary investments for the functioning of the insurance company have been defined. All these terms were calculated on the condition that the client function is linear combination of the two exponential distributions, utility functions of the client $u(y) = |a_1y + b_1|$, utility function of the company $u(y) = ay^2 + by + c$.

Стаття надійшла до редколегії 07.11.98

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 10–14 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 10–14*

УДК 519.45

OREST ARTEMOVYCH

RIGID DIFFERENTIALLY TRIVIAL HEREDITARY RINGS

0. A ring R having no nontrivial derivations will be called differentially trivial (see [1]). A ring R is called rigid if it has only the trivial ring endomorphisms: that is, identity id_R and zero 0_R. The problem of investigating rigid rings has been posed by C. Maxson [2]. C. Maxson [2] and K. McLean [3] described the rigid right Artinian rings. M. Friger [4] constructed an example of a noncommutative ring R with the additive group R^+ of finite Prüfer rank. The rigid ring R with the additive group R^+ of finite Prüfer rank are characterized in [5].

In this note we characterize the rigid differentially trivial right hereditary rings.

Throughout the paper all rings are associative and, as a rule, contain an identity element. $Q(A)$ will always denote the field of quotients of a commutative domain A, $\mathrm{char}(R)$ the characteristic of a ring R, $\mathcal{J}(R)$ the Jacobson radical of R and $\phi|_R$ the restriction of a homomorphism ϕ to R. Any unexplained terminilogy is standard, as in [6].

1. C. Maxson [2, theorem 2.5] proved that a commutative domain R of prime characteristic p is rigid if and only if it is isomorphic to the finite field $\mathbb{Z}_p$ with p elements. Some rigid fields of characteristic 0 were investigated in [2] and [5]. In particular, C. Maxson [2, theorem 4.2] characterized the rigid finitely generated algebraic extension of the rational numbers field $\mathbb{Q}$. To date, the problem of a description of the rigid domains (in particular, fields) A of characteristic 0 with the additive group A^+ of infinite Prüfer rank remains open. The field of real numbers $\mathbb{R}$ is an example of a rigid field with the additive group $\mathbb{R}^+$ of infinite Prüfer rank.

Let K, L, N be the commutative domains, $K \subseteq L$ and $\sigma : K \longrightarrow N$ is a homomorphism. If an element α is algebraic over $Q(K)$ then by $f_{(Q(K),\alpha)}(x)$ we denote a minimal polynomial of α over $Q(K)$. A homomorphism σ extends to a homomorphism $\overline{\sigma} : Q(K) \longrightarrow Q(N)$. By $g^\sigma(x)$ we denote the polynomial

$$\overline{\sigma}(a_0)x^n + \ldots + \overline{\sigma}(a_n) \in Q(N)[x],$$

where $g(x) = a_0x^n + \ldots + a_n \in Q(K)[x]$.

The following lemmas are generalizations of the results from [7, chapter VI, §41] and [8].

Lemma 1.1. *Let K, L, N be the commutative domains, $K \subseteq L$, the field $Q(L)$ be algebraic over $Q(K)$ and $\alpha \in L \setminus K$. Then a homomorphism $\sigma : K \longrightarrow N$ can be extended to a homomorphism $\tau : K[\alpha] \longrightarrow N$ if and only if the polynomial $f^\sigma_{(Q(K),\alpha)}(x)$ has at least one root in N.*

Proof. ($\Rightarrow$) Suppose that σ extended to a homomorphism $\tau : K[\alpha] \longrightarrow N$. Then $\tau(\alpha) \in N$ and $f_{(Q(K),\alpha)}(\alpha) = 0$ implies that $f^\sigma_{(Q(K),\alpha)}(\tau(\alpha)) = 0$.

($\Leftarrow$) Let β be a root of

$$f^{\sigma}_{(Q(K),\alpha)}(x) \in Q(N)[x],$$

which is contained in N. Then the map $\tau : K[\alpha] \longrightarrow N$ given by the rule

$$\tau(\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha^{n-i}) = \sum_{i=0}^{n} \sigma(a_i)\beta^{n-i}$$

determines a homomorphism $\tau : K[\alpha] \longrightarrow N$. The lemma is proved.

Recall that a domain L is finitely generated over K if $L = K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ for some elements $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L \quad (n \in \mathbb{N})$.

Lemma 1.2. *Let K, L, N be the commutative domains, $K \subseteq L$ and $Q(L)$ be algebraic over $Q(K)$. Then a homomorphism $\sigma : K \longrightarrow N$ can be extended to a homomorphism $\tau : L \longrightarrow N$ if and only if σ extends to a homomorphism $\sigma_M : M \longrightarrow N$ for all finitely generated extension M of K in L.*

Proof. ($\Rightarrow$) is obvious.

($\Leftarrow$) Let $\{K_\alpha\}_{\alpha\in I}$ be the set of all finitely generated extensions of K, every of which is contained in L and, moreover, $I = \{0, \alpha, \beta, \dots\}$, $K_0 = K$ and $\alpha \leqslant \beta$ if and only if $K_\alpha \subseteq K_\beta$. Then I is a partially ordered directed set, $L = \bigcup_{\alpha\in I} K_\alpha$.

Let

$$A_i = \{\phi_\nu^{(i)} \mid \nu \in I_i = \{\ \nu, \mu, \dots\}\}\ (i \in I)$$

be the set of all homomorphisms

$$\phi_\nu^{(i)} : K_i \longrightarrow N,$$

where $\phi_\nu^{(i)}$ is an extension of σ. By our hypothesis the set A_i is nonempty and finite. Define the map $\pi_{ji} : A_i \longrightarrow A_j \ (i, j \in I,\ j \leqslant i)$ by the rule

$$\pi_{ji}\phi_\nu^{(i)} = \phi_\nu^{(i)}|_{K_j}.$$

Since every set A_i is finite and nonempty, by Lemma of [10, chapter II, §2] there exists a nonempty inverse limit $A = \varprojlim A_i$ of the inverse system $\{A_i, \pi_{ji}\}$. Let $\phi \in A$. Then $\phi : L \longrightarrow N$ is a homomorphism, which extended σ. The lemma is proved.

Corollary 1.3. *Let K, L, N be the commutative domains of prime characteristic p, $K \subseteq L$, the field $Q(L)$ be a purely inseparable extension of $Q(K)$. Then a homomorphism $\sigma : K \longrightarrow N$ can be extended to a homomorphism $\tau : L \longrightarrow N$ if and only if the polynomial $f^{\sigma}_{(Q(K),\alpha)}(x)$ has at least one root in N for every element $\alpha \in L \setminus K$.*

Proof. ($\Rightarrow$) is obvious.

($\Leftarrow$) Let $Q(L)$ be a purely inseparable extension of $Q(K)$ and $M = K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ for some elements $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in L. We shall prove by induction on n.

Suppose that σ can be extended to a homomorphism $\sigma_1 : M_1 \longrightarrow N$, where $M_1 = K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Then $M = M_1[\alpha_n]$. Let

$$f(x) = f^{\sigma}_{(Q(M_1),\alpha_n)}(x) = x^{p^s} + a = (x - \alpha_n)^{p^s} \in Q(M_1)[x],$$

$$g(x) = f^{\sigma}_{(Q(K),\alpha_n)}(x) = x^{p^m} + b = (x - \alpha_n)^{p^m} \in Q(K)[x].$$

Hence

$$g^{\sigma}(x) = x^{p^m} + \overline{\sigma}(a) = (x - \beta)^{p^m}$$

for some element β of N. The polynomial $f^{\sigma_1}(x)$ divides the polynomial $g^{\sigma}(x)$ over the field $Q(\sigma_1(M))$. Since $g^{\sigma}(x)$ has a root in N, we conclude that $\beta \in N$ and consequently β is a root of $f^{\sigma_1}(x)$. So by Lemma 1.1 a homomorphism σ_1 can be extended to a homomorphism $\sigma_M : M \longrightarrow N$. Finally, we apply Lemma 1.2 to complete the proof.

Corollary 1.4 ([8, corollary 1]). *Let K, L, N be the fields of prime characteristic p, $K \subseteq L$, L be a separable (relatively purely inseparable) algebraic extension of K. Then a homomorphism $\sigma : K \longrightarrow N$ can be extended to a homomorphism $\tau : L \longrightarrow N$ if and only if the polynomial $f^{\sigma}_{(Q(K),\alpha)}(x)$ has at least one root in N for every element $\alpha \in L \setminus K$.*

Lemmas 1.1 and 1.2 yield

Theorem 1.5. *Let F be a field of zero characteristic algebraic over its prime subfield P. Then F is a rigid field if and only if the minimal polynomial $f_{\xi}(x) \in P[x]$ of ξ has exactly one root in F for every element ξ of F.*

2. In this section we characterize the rigid differentially trivial right hereditary rings.

Proposition 2.1 (see [1] or [5]). *A commutative domain R is differentially trivial if and only if at least one of the following two cases takes place:*
(i) $\mathrm{char}(R) = 0$ *and the field of quotients $Q(R)$ is algebraic over its prime subfield;*
(ii) $\mathrm{char}(R) = p$ *is a prime and $R = \{ x^p \mid x \in R \}$.*

Lemma 2.2. *Let R be a right hereditary ring. Then R is differentially trivial if and only if it is a ring direct sum of differentially trivial domains.*

Proof. $(\Rightarrow)$ Since R is commutative, we conclude that R not contains nontrivial nilpotent elements (see, for example, [6, chapter 8, exercises]). In view of [10] (see also 8.23.9(a) of [6]) R is a ring direct sum of differentially trivial domains.

$(\Leftarrow)$ Let R be a ring direct sum of differentially trivial domains, i.e.

$$R = \sum\nolimits^{\oplus} R_i.$$

Suppose that R has a nontrivial derivation D. Let $r = (r_i)_{i \in I}$ be an element of R such that

$$D(r) = (a_i)_{i \in I} \neq 0.$$

and j be a fixed element of I such that

$$a_j \neq 0.$$

Then the map $d : R_j \longrightarrow R_j$ given by the rule

$$d(r_j) = a_j \ (r_j \in R_j)$$

determines a nontrivial derivation of R_j, a contradiction. The lemma is proved.

Lemma 2.3. *Let R be a ring with the identity element 1 and nontrivial nilpotent element a of the nilpotency index n. If R has a nontrivial derivation D then the rule*

$$\tau(r) = \sum\nolimits_{i=0}^{n} \frac{D^{(i)}(r)}{i!} a^i, \ D^{(0)}(r) = r, \ a^0 = 1 \ (r \in R)$$

determines a nontrivial automorphism of R.

Proof. Straightforward.

Recall that a ring R is called reduced if $x^2 = 0$ implies $x = 0$ for any $x \in R$.

Lemma 2.4. *Any rigid right hereditary ring R is reduced.*

Proof. If R contains a nontrivial nilpotent element then by Lemma 2.3 it is a differentially trivial ring. Consequently R is commutative, a contradiction. The lemma is proved.

Corollary 2.5. *Let R be a commutative hereditary ring. Then R is a rigid ring if and only if $R \cong \mathbb{Z}_p$ for some prime p or R is a rigid domain of zero characteristic.*

Proof. ($\Leftarrow$) is obvious.

($\Rightarrow$) In view of Lemma 2.4 and the results of [10] R is a Dedekind domain. By Corollary of [11, application, §4, $n^\circ 3$] R is a local domain. If $\mathrm{char}(R) = p$ is a prime then by Theorem 2.5 of [2] $R \cong \mathbb{Z}_p$, and the proof is complete.

Lemma 2.6. *Let R be a differentially trivial domain of zero characteristic. If R contains a subfield then the Jacobson radical $\mathcal{J}(R)$ is trivial.*

Proof. Since R contains a subfield, its prime subfield is isomorphic to the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. Then by Proposition 2.1 for every element j of $\mathcal{J}(R)$ there exists a nontrivial polynomial

$$g(x) = \sum\nolimits_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} \in P[x]$$

such that

$$g(j) = 0.$$

Hence

$$a_m = -\sum\nolimits_{i=0}^{m-1} a_i j^{m-i} \in (P \cap \mathcal{J}(R)),$$

and this yields that

$$j \cdot (\sum\nolimits_{i=0}^{m-1} a_i j^{m-i-1}) = 0,$$

a contradiction. The lemma is proved.

Theorem 2.7. *Let R be a right hereditary ring. Then the following statements are equivalent.*

(*a*) *R is a rigid differentially trivial ring.*

(*b*) *R is of one of the following types:*

(*i*) *$R \cong \mathbb{Z}_p$;*

(*ii*) *R is a rigid field of zero characteristic algebraic over its prime subfield;*

(*iii*) *R is a rigid local domain of zero characteristic with the residue field $R/\mathcal{J}(R)$ of prime characteristic p and the field $Q(R)$ is algebraic over its prime subfield.*

Proof. (b) $\Rightarrow$ (a) is obvious.

(a) $\Rightarrow$ (b) From Corollary 2.5 it follows that $R \cong \mathbb{Z}_p$ or R is a rigid differentially trivial local domain of zero characteristic. Let $\mathrm{char}(R) = 0$. By Proposition 2.1 $Q(R)$ is algebraic over its prime subfield. From $\mathrm{char}(R/\mathcal{J}(R)) = 0$ in view of Lemma 2.6 it follows that R is of type (ii). If $\mathrm{char}(R/\mathcal{J}(R)) = p$ is a prime then R is a ring of type (iii). The theorem is proved.

Recall [12], that a v-ring is a commutative unramified complete regular rank one local domain of zero characteristic with a residue field of prime characteristic.

Remark 2.8. If a ring R of type *(iii)* (see Theorem 2.7) is complete in $\mathcal{J}(R)$-adic topology then R is a v-ring with the quotient field $R/\mathcal{J}(R) \cong \mathbb{Z}_p$.

---

1. *Артемович О.Д.* Ідеально-диференціальні і досконалі жорсткі кільця// Доп. АН УРСР. – 1985. – N 4. – C.3-5.
2. *Maxson C.J.* Rigid rings// Proc. Edinburgh Math. Soc.– 1979. – Vol.21. – N 1. – P.95-101.
3. *McLean K.R.* Rigid Artinian Rings// Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1982. –Vol. 25. – N 1. – P.97-99.
4. *Фригер М.Д.* О жестких кольцах без кручения// Сиб. мат. журн. – 1986. –Т. 27. – N 1. – C.217-219.
5. *Artemovych O.D.* Differentially trivial and rigid rings of finite rank// Periodica Math. Hungar. – 1998. – Vol.36. – N 1. – P. 1-16.
6. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. Т.1. – М.,1977.
7. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М., 1977.
8. *Сергеев Э.А.* О продолжении мономорфизмов полей. – Краснодар, 1980. – Депонировано ВИНИТИ, N 50-81.
9. *Серр Ж.-П.* Курс арифметики. – М., 1972.
10. *Levy L.* Unique direct sums of prime rings// Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 106. – N 1. – P.64-76.
11. *Грауэрт Г., Реммерт Р.* Аналитические локальные алгебры. – М., 1988.
12. *Cohen I.S.* On the structure and ideal theory of complete local rings// Trans. Amer. Math. Soc. – 1946. – Vol. 59. – N 1. – P.54-106.

Артемович О.

ЖОРСТКІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТРИВІАЛЬНІ СПАДКОВІ КІЛЬЦЯ

Охарактеризовано праві спадкові кільця, які володіють тільки нульовими диференціюваннями і тривіальними кільцевими ендоморфізмами.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 15–26

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 15–26

УДК 517.95

Галина Барабаш

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

У цій праці ми дослідили умови існування розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння. Трудність вивчення таких рівнянь полягає у побудові притаманного саме йому функціонального простору і виборі методу дослідження. Задачі для параболічних рівнянь з другою похідною за часом, нелінійна частина яких пов'язує молодші похідні за просторовими змінними, розглянуто у [1-5].

У праці [6] доведено існування єдиного класичного розв'язку задачі Коші для нелінійного рівняння вищого порядку. Умови існування та єдиності розв'язку мішаної задачі для рівнянь, нелінійна частина яких містить старші похідні за просторовою змінною, одержано в [7, 8].

У праці [9] досліджено мішану задачу для нелінійного рівняння типу коливання пластинки, в [10], застосовуючи метод Гальоркіна, вивчено поведінку нульового розв'язку нелінійного параболічного рівняння з другою похідною за часом. Використовуючи цей метод, ми довели теорему існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного параболічного рівняння.

Нехай Ω - обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \subset C^2$. Розглянемо в циліндрі $Q_{t_0,T} = \Omega \times (t_0; T)$ рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) - \sum_{i=1}^n \left(b_i(x,t)\,|u_{x_i}|^{p-2}\,u_{x_i}\right)_{x_i} - \\ - \sum_{i,j=1}^n \left(c_{ij}(x,t)u_{x_jt}\right)_{x_i} = f(x,t) \qquad (1)$$

з крайовими

$$u|_{S_{t_0,T}} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_{t_0,T}} = 0 \qquad (2)$$

і початковими

$$u(x,t_0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad (3)$$
$$u_t(x,t_0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \qquad (4)$$

умовами. Тут $p \geqslant 3$, $S_{t_0,T} = \partial\Omega \times (t_0; T)$, $T > 0$, ν - зовнішня нормаль до $S_{t_0,T}$.

Позначимо через $H_0^2(\Omega)$ замикання множини неперервно диференційовних функцій в $\overline{\Omega}$, які задовольняють умови (2), за нормою простору $H^2(\Omega)$. На основі нерівності Фрідріхса [11, с. 50] у просторі $H_0^2(\Omega)$ можна ввести еквівалентну норму за формулою

$$\|u\|_{H_0^2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha u)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Введемо простір $V = H_0^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ з нормою

$$\|u\|_V = \|u\|_{H_0^2(\Omega)} + \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)}.$$

Розглянемо простір $V_0 = H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$. При $2 < n \leqslant 5 :\ 3 \leqslant p \leqslant 2 + \frac{4}{n-2}$ (у випадку $n \leqslant 2 :\ \ p \geqslant 3$) простір V_0 вкладений у простір $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Припускатимемо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

Умова (A). $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t),\ \ (x,t) \in Q_{t_0,T};$
$a_{\alpha\beta tt} \in L^\infty(Q_{t_0,T}),\ a_{\alpha\beta x_i x_j} \in L^\infty(D_{t_0}),\ \ |\alpha| = |\beta| \leqslant 2,\ \ i,\ j = 1,...,n;$

$$a_0 \int\limits_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha v)^2\, dx \leqslant \int\limits_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta v D^\alpha v\, dx \leqslant a_1 \int\limits_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha v)^2\, dx,$$

$t \in [t_0;T]$, $a_0 > 0$ для довільної $v \in H_0^2(\Omega)$, де $D_\tau = Q_{t_0,T} \cap \{t = \tau\}$.

Умова (B). $0 < b_0 \leqslant b_i(x,t) \leqslant b_1,\ (x,t) \in Q_{t_0,T};$
$b_{it} \in L^\infty(Q_{t_0,T}),\ b_{ix_j} \in L^\infty(D_{t_0}),\ i,\ j = 1,...,n.$

Умова (C). $c_{ijt} \in L^\infty(Q_{t_0,T}),\ c_{ijx_i} \in L^\infty(D_{t_0}),\ i,\ j = 1,...,n;$

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant c_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2,\ c_0 > 0,\ (x,t) \in Q_{t_0,T}.$$

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(4) називається функція u, яка задовольняє рівність*

$$\int_{t_0}^T \int\limits_{D_t} \Bigg(u_{tt}v + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u D^\alpha v + \sum_{i=1}^n b_i(x,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}v_{x_i} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x,t) u_{x_j t} v_{x_i} \Bigg) dx\, \psi(t)\, dt = \int_{t_0}^T \int\limits_{D_t} f(x,t) v\, dx\, \psi(t)\, dt \qquad (5)$$

для довільних функцій $v \in H_0^2(\Omega)$, $\psi \in L^1(t_0;T)$ і початкові умови (3), (4).

Теорема. *Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови* **(A)**, **(B)**, **(C)**; $f,\ f_t \in L^2(Q_{t_0,T})$; $u_0 \in V_0$; $u_1 \in H_0^2(\Omega)$; $p \geqslant 3$ *при* $n \leqslant 2$, $3 \leqslant p \leqslant 2 + 4/(n-2)$ *при* $2 < n \leqslant 5$.

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(4), який задовольняє включення

$$u \in L^\infty((t_0;T);V),\ u_t \in L^\infty((t_0;T);H_0^2(\Omega)),\ u_{tt} \in L^\infty((t_0;T);L^2(\Omega)).$$

T залежить від початкових умов і коефіцієнтів рівняння (1).

Доведення. Виберемо у просторі V повну систему функцій $\{\omega_k(x)\}$. Нехай

$$u_0^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{0k}^N \omega_k(x), \quad u_1^N(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{1k}^N \omega_k(x),$$

причому $u_0^N(x) \to u_0(x)$ в V_0, $u_1^N(x) \to u_1(x)$ в $H_0^2(\Omega)$ при $N \to \infty$. Будемо шукати розв'язок задачі (1) - (4), використовуючи метод Гальоркіна. Нехай $\{u^N(x.t)\}$ послідовність функцій, які визначаються рівністю

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\omega_k(x), \quad N = 1, 2, ...,$$

де $C_1^N(t), ..., C_N^N(t)$ – розв'язок задачі Коші

$$\int\limits_{D_t} \Big(u_{tt}^N \omega_k + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha \omega_k + \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{x_i}^N|^{p-2} u_{x_i}^N \omega_{kx_i} +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} u_{x_j t}^N \omega_{kx_i} \Big) dx = \int\limits_{D_t} f\, \omega_k\, dx, \tag{6}$$

$$C_k^N(t_0) = u_{0k}^N,\ C_{kt}^N(t_0) = u_{1k}^N, \quad k = 1, ..., N. \tag{7}$$

Домножимо кожну рівність системи (6) відповідно на функцію $C_{kt}^N(t)$, підсумуємо за k від 1 до N і зінтегруємо по проміжку $[t_0; \tau]$, де $\tau \leqslant T$. Після виконання цих операцій одержимо рівність:

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big(u_{tt}^N u_t^N + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha u_t^N + \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{x_i t}^N|^{p-2} u_{x_i}^N u_{x_i t}^N +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} u_{x_j t}^N u_{x_i t}^N \Big) dx\, dt = \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f\, u_t^N dx\, dt. \tag{8}$$

Враховуючи умови теореми та інтегруючи частинами, перетворимо кожний доданок у (8):

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} u_{tt}^N u_t^N dx\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{D_\tau} (u_t^N)^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (u_1^N)^2 dx;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha u_t^N dx\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha u^N dx -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{D_0} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u_0^N D^\alpha u_0^N dx - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t} D^\beta u^N D^\alpha u^N dx\, dt;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{x_i t}^N|^{p-2} u_{x_i}^N u_{x_i t}^N dx\, dt = \frac{1}{p} \int\limits_{D_\tau} \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{x_i}^N|^p dx -$$
$$- \frac{1}{p} \int\limits_{D_{t_0}} \sum_{i=1}^{n} b_i |u_{0x_i}^N|^p dx - \frac{1}{p} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^{n} b_{it} |u_{x_i}^N|^p dx\, dt;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f\, u_t^N dx\, dt \leqslant \frac{\delta_0}{2} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (u_t^N)^2 dx\, dt + \frac{1}{2\delta_0} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f^2 dx\, dt;$$

Отже, з рівності (8) матимемо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau}\Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u^N D^\alpha u^N + \frac{2}{p}\sum_{i=1}^n b_i |u_{x_i}^N|^p\Big) dx + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} u_{x_j t}^N u_{x_i t}^N dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \Big((u_1^N)^2 + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta} D^\beta u_0^N D^\alpha u_0^N + \frac{2}{p}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n b_i |u_{0x_i}^N|^p\Big) dx + \frac{1}{\delta_0} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f^2 dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big(\delta_0 (u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t} D^\beta u^N D^\alpha u^N + \frac{2}{p}\sum_{i=1}^n b_{it} |u_{x_i}^N|^p\Big) dx\, dt.$$

Враховуючи умови теореми, одержимо

$$A_0 \int\limits_{D_\tau} \Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big(D^\alpha u^N\big)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^p\Big) dx + 2c_0 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n \big(u_{x_i t}^N\big)^2 dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \Phi_0 + \frac{F_0}{\delta_0} + A_1 \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big(D^\alpha u^N\big) + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^p\Big) dx\, dt; \tag{9}$$

тут $A_0 = \min\{1;\ a_0;\ b_0/p\}$, $A_1 = \max\{\delta_0;\ a_3;\ 2b_3/p\}$, $F_0 = \int\limits_{Q_{t_0,T}} f^2 dx\, dt$,

$$\Phi_0 = \int\limits_\Omega \Big((u_1^N)^2 + a_1 \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} D^\beta u_0^N D^\alpha u_0^N + \frac{2b_1}{p} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^N|^p\Big) dx,$$

де a_3 і b_3 – сталі з таких нерівностей:

$$a_2 \int\limits_{D_t} \sum_{|\alpha|=2} \left(D^\alpha v\right)^2 dx \leqslant \int\limits_{D_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t}(x,t) D^\beta v D^\alpha v\, dx \leqslant a_3 \int\limits_{D_t} \sum_{|\alpha|=2} \left(D^\alpha v\right)^2 dx,$$
$$t \in [t_0;T];\quad b_2 \leqslant b_{it}(x,t) \leqslant b_3,\ i = 1, ..., n.$$

Застосовуючи лему Гронуолла - Белмана [12, с. 108] до нерівності (9), матимемо

$$\int\limits_{D_\tau} \Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big(D^\alpha u^N\big)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^p\Big) dx \leqslant \frac{\Phi_0 + \frac{F_0}{\delta_0}}{A_0} \exp\Big(\frac{A_1}{A_0}(T - t_0)\Big).$$

Тоді

$$\frac{A_1}{A_0} \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \Big((u_t^N)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \big(D^\alpha u^N\big)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^p\Big) dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A_1}{A_0^2}\Big(\Phi_0 + \frac{F_0}{\delta_0}\Big)(T - t_0) \exp\Big(\frac{A_1}{A_0}(T - t_0)\Big).$$

Враховуючи останню нерівність, з (9) випливає оцінка

$$\int\limits_{D_\tau}\left((u_t^N)^2+\sum_{|\alpha|=2}\left(D^\alpha u^N\right)^2+\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^p\right)dx+\frac{2c_0}{A_0}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n\left(u_{x_it}^N\right)^2dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\Phi_0}{A_0}+\frac{F_0}{A_0\delta_0}+\frac{A_1}{A_0^2}\left(\Phi_0+\frac{F_0}{\delta_0}\right)(T-t_0)\,e^{\frac{A_1}{A_0}(T-t_0)}=A_2. \tag{10}$$

Продиференціюємо систему (6) за t:

$$\int\limits_{D_t}\left(u_{ttt}^N\omega_k+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^ND^\alpha\omega_k+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta t}D^\beta u^ND^\alpha\omega_k+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^n b_{it}|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_i}^N\omega_{kx_i}+(p-1)\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_it}^N\omega_{kx_i}+ \tag{11}$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^n c_{ijt}u_{x_jt}^N\omega_{kx_i}+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}u_{x_jtt}^N\omega_{kx_i}\right)dx=\int\limits_{D_t}f_t\omega_k\,dx,\quad k=1,\dots,N.$$

Домножимо кожну рівність системи (11) відповідно на функцію $C_{ktt}^N\,e^{-\mu(t-t_0)}$, підсумуємо за k від 1 до N і зінтегруємо по проміжку $[t_0;\tau]$. Після виконання цих операцій одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left(u_{ttt}^Nu_{tt}^N+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^ND^\alpha u_{tt}^N+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta t}D^\beta u^ND^\alpha u_{tt}^N+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^n b_{it}|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_i}^Nu_{x_itt}^N+(p-1)\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_it}^N|^{p-2}u_{x_it}^Nu_{x_itt}^N+ \tag{12}$$

$$\left.+\sum_{i,j=1}^n c_{ijt}u_{x_jt}^Nu_{x_itt}^N+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}u_{x_jtt}^Nu_{x_itt}^N\right)e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}f_tu_{tt}^N\,e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt.$$

Використовуючи інтегрування частинами, перетворимо деякі доданки в рівності (12):

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}u_{ttt}^Nu_{tt}^Ne^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt=\frac12\int\limits_{D_\tau}\left(u_{tt}^N\right)^2e^{-\mu(\tau-t_0)}dx-\frac12\int\limits_{D_{t_0}}\left(u_{tt}^N\right)^2dx+$$

$$+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\left(u_{tt}^N\right)^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt;\quad\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^ND^\alpha u_{tt}^Ne^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt=$$

$$=\frac12\int\limits_{D_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^ND^\alpha u_t^Ne^{-\mu(t-t_0)}dx-\frac12\int\limits_{D_{t_0}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^ND^\alpha u_t^Ndx+$$

$$+\frac{\mu}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u_t^ND^\alpha u_t^Ne^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2} a_{\alpha\beta t}D^\beta u_t^N D^\alpha u_t^N e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt;$$

$$(p-1)\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_it}^N u_{x_itt}^N e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt=$$

$$=\frac{p-1}{2}\int\limits_{D_\tau}\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}\big(u_{x_it}^N\big)^2e^{-\mu(\tau-t_0)}dx-\frac{p-1}{2}\int\limits_{D_{t_0}}\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}\big(u_{x_it}^N\big)^2dx+$$

$$+\frac{\mu(p-1)}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}\big(u_{x_it}^N\big)^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt-$$

$$-\frac{(p-1)(p-2)}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-3}\big(u_{x_it}^N\big)^3\operatorname{sign}\big(u_{x_i}^N\big)e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt-$$

$$-\frac{p-1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n b_{it}|u_{x_i}^N|^{p-2}\big(u_{x_it}^N\big)^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt.$$

Використовуючи нерівність Коші [12, с. 24] і теорему вкладення [11, с. 44], зробимо оцінку

$$\int\limits_{D_t}\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-3}\big(u_{x_it}^N\big)^3\operatorname{sign}\big(u_{x_i}^N\big)dx\leqslant$$

$$\leqslant b_1\sum_{i=1}^n\left(\int\limits_{D_t}|u_{x_i}^N|^{(p-3)p_1}dx\right)^{\frac{1}{p_1(p-3)}(p-3)}\left(\int\limits_{D_t}|u_{x_it}^N|^{3p_2}dx\right)^{\frac{1}{3p_2}3}\leqslant$$

$$\leqslant b_1w_3\left(\int\limits_{D_t}\sum_{i,j=1}^n(u_{x_ix_j}^N)^2dx\right)^{(p-3)/2}\left(\int\limits_{D_t}\sum_{i,j=1}^n(u_{x_ix_jt}^N)^2dx\right)^{3/2}.$$

Тут $1/p_1+1/p_2=1$, причому $p_1(p-3)\leqslant\dfrac{2n}{n-2}$, $3p_2\leqslant\dfrac{2n}{n-2}$. Тоді згідно з теоремою вкладення, маємо

$$\left(\int\limits_{D_t}|u_{x_i}^N|^{(p-3)p_1}dx\right)^{1/(p_1(p-3))}\leqslant w_1\left(\int\limits_{D_t}\sum_{j=1}^n(u_{x_ix_j}^N)^2dx\right)^{1/2},$$

$$\left(\int\limits_{D_t}|u_{x_it}^N|^{3p_2}dx\right)^{1/(3p_2)}\leqslant w_2\left(\int\limits_{D_t}\sum_{j=1}^n(u_{x_ix_jt}^N)^2dx\right)^{1/2},$$

де $w_3=w_1^{p-3}w_2^3\,n$, $p_2=\dfrac{2n}{3(n-2)}$, $p_1=\dfrac{2n}{6-n}$. Також згідно з умовами теореми одержимо

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij}u_{x_itt}^N u_{x_jtt}^N\geqslant c_0\sum_{i=1}^n(u_{x_itt}^N)^2;$$

$$\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f_t u_{tt}^N e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt \leqslant \frac{\delta_1}{2}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} (u_{tt}^N)^2 e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt + \frac{1}{2\delta_1}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f_t^2 e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt.$$

Отже, з рівності (12) отримаємо оцінку

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D_\tau}\Bigg(\left(u_{tt}^N\right)^2 + a_2\sum_{|\alpha|=2}\left(D^\alpha u_t^N\right)^2 + (p-1)\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}(u_{x_it}^N)^2\Bigg)e^{-\mu(\tau-t_0)}dx+\\
&+2c_0\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n(u_{x_itt}^N)^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt\leqslant\\
&\leqslant\int\limits_{D_{t_0}}\Bigg(\left(u_{tt}^N\right)^2 + a_1\sum_{|\alpha|=2}\left(D^\alpha u_t^N\right)^2 + (p-1)\sum_{i=1}^n b_i|u_{x_i}^N|^{p-2}(u_{x_it}^N)^2\Bigg)dx+\\
&+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}} f_t^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Bigg((a_3-\mu a_0)\sum_{|\alpha|=2}\left(D^\alpha u_t^N\right)^2+\\
&+(b_3-\mu b_0)(p-1)\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^N|^{p-2}(u_{x_it}^N)^2\Bigg)e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt+\\
&+b_1w_3(p-1)(p-2)\int_{t_0}^{\tau}e^{-\mu(t-t_0)}\left(\int\limits_{D_t}\sum_{i,j=1}^n(u_{x_ix_j}^N)^2dx\right)^{(p-3)/2}\times\\
&\times\left(\int\limits_{D_t}\sum_{i,j=1}^n(u_{x_ix_jt}^N)^2dx\right)^{3/2}dt-\\
&-2\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta t}D^\beta u^N D^\alpha u_{tt}^N + \sum_{i=1}^n b_{it}|u_{x_i}^N|^{p-2}u_{x_i}^N u_{x_itt}^N+\\
&+\sum_{i,j=1}^n c_{ijt}u_{x_jt}^N u_{x_itt}^N\Bigg)e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt.
\end{aligned}\tag{13}$$

З рівняння (1) легко одержати

$$\begin{aligned}
\int\limits_{D_{t_0}}(u_{tt}^N)^2dx \leqslant 4\int\limits_{D_{t_0}}\Bigg(f^2 + \Bigg(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}D^\alpha(a_{\alpha\beta}D^\beta u_0^N)\Bigg)^2+\\
+\left(\sum_{i=1}^n\left(b_i\left|u_{0x_i}^N\right|^{p-2}u_{0x_i}^N\right)_{x_i}\right)^2 + \left(\sum_{i,j=1}^n\left(c_{ij}u_{1x_j}^N\right)_{x_i}\right)^2\Bigg)dx.
\end{aligned}\tag{14}$$

Використовуючи теорему вкладення, матимемо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D_{t_0}}\left(\left(\sum_{i=1}^n\left(b_i\left|u_{0x_i}^N\right|^{p-2}u_{0x_i}^N\right)_{x_i}\right)^2dx\leqslant\right.\\
&\leqslant 2n^2b_1^2\big((p-1)^2w_4^{2(p-2)}w_5^2\,\|u_0^N\|_{H^3(\Omega)}^{2(p-1)} + w_6^{2(p-1)}\|u_0^N\|_{H^4(\Omega)}^{2(p-1)}\big),
\end{aligned}$$

тому що

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left|u_{0x_i}^N\right|^{2(p-2)n}dx\right)^{1/(2(p-2)n)}\leqslant w_4\|u_0^N\|_{H^3(\Omega)},$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left|u_{0x_ix_j}^N\right|^{2n?(n-2)}dx\right)^{n-2/(2n)}\leqslant w_5\|u_0^N\|_{H^3(\Omega)},$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left|u_{0x_i}^N\right|^{2(p-1)}dx\right)^{1/(2(p-1))}\leqslant w_6\|u_0^N\|_{H^4(\Omega)}.$$

Аналогічно оцінимо решту доданків правої частини нерівності (14):

$$\int\limits_{D_{t_0}}\left(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}D^{\beta}u_0^N)\right)^2dx\leqslant 4na_4\|u_0^N\|^2_{H^1(\Omega)}+12n^2a_4\|u_0^N\|^2_{H^2(\Omega)}+$$
$$+32n^3a_4\|u_0^N\|^2_{H^3(\Omega)}+8n^4a_4\|u_0^N\|^2_{H^4(\Omega)};$$
$$\int\limits_{D_{t_0}}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left(c_{ij}u_{1x_j}^N\right)_{x_i}\right)^2dx\leqslant 2n^2c_1\left(\|u_1^N\|^2_{H^1(\Omega)}+\|u_1^N\|^2_{H^2(\Omega)}\right);$$

тут c_1, a_4 - такі додатні сталі, що

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{\alpha\beta x_ix_j}\right)^2\leqslant a_4,\ \left(\sum_{i=1}^{n}a_{\alpha\beta x_i}\right)^2\leqslant a_4,\ |\alpha|=|\beta|\leqslant 2,$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}^2\leqslant c_1,\ \sum_{i,j=1}^{n}c_{ijx_i}^2\leqslant c_1.$$

Отже, з нерівності (14) випливає оцінка

$$\int\limits_{D_{t_0}}(u_{tt}^N)^2dx\leqslant A_3, \tag{15}$$

де A_3 - додатна стала, яка залежить від норм початкових функцій та правої частини рівняння (1).

Використовуючи теорему вкладення, одержимо

$$(p-1)\int\limits_{D_{t_0}}\sum_{i=1}^{n}b_i\left|u_{0x_i}^N\right|^{p-2}\left(u_{1x_i}^N\right)^2dx\leqslant$$
$$\leqslant(p-1)b_1\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{\Omega}\left|u_{0x_i}^N\right|^{(p-2)n/2}dx\right)^{2/n}\left(\int\limits_{\Omega}\left|u_{1x_i}^N\right|^{2n/(n-2)}dx\right)^{(n-2)/n}\leqslant$$
$$\leqslant(p-1)b_1n\left(w_7^{p-2}\|u_0^N\|^{p-2}_{H^2(\Omega)}w_8^2\|u_1^N\|^2_{H^2(\Omega)}\right),$$
$$a_1\int\limits_{D_{t_0}}\sum_{|\alpha|=2}\left(D^{\alpha}u_t^N\right)^2dx=a_1\|u_1^N\|^2_{H^2(\Omega)},$$

де сталі w_7, w_8 – взяті з нерівностей

$$\Big(\int\limits_{\Omega}\big|u^N_{0x_i}\big|^{(p-2)n/2}\,dx\Big)^{n/(2(p-2))}\leqslant w_7\|u^N_0\|_{H^2(\Omega)},$$

$$\Big(\int\limits_{\Omega}\big|u^N_{1x_i}\big|^{2n/(n-2)}\,dx\Big)^{(n-2)/(2n)}\leqslant w_8\|u^N_1\|_{H^2(\Omega)}.$$

Отже, одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_{t_0}}\Big(\big(u^N_{tt}\big)^2+a_1\sum_{|\alpha|=2}\big(D^\alpha u^N_1\big)^2+(p-1)\sum_{i=1}^n b_i|u^N_{0x_i}|^{p-2}(u^N_{1x_i})^2\Big)dx\leqslant A_4,$$

де A_4 - додатна стала, яка залежить від норм початкових функцій та правої частини рівняння (1).

Отже, нерівність (13) матиме вигляд

$$\begin{gathered}\int\limits_{D_\tau}\Big(\big(u^N_{tt}\big)^2+a_2\sum_{|\alpha|=2}\big(D^\alpha u^N_t\big)^2+(p-1)\sum_{i=1}^n b_i|u^N_{x_i}|^{p-2}(u^N_{x_it})^2\Big)e^{-\mu(\tau-t_0)}dx+\\
+2c_0\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n(u^N_{x_itt})^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt\leqslant A_4+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}f_t^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt+\\
+2\int\limits_{D_{t_0}}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta t}D^\beta u^N_0D^\alpha u^N_1\,dx+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big((a_3-\mu a_0)\sum_{|\alpha|=2}\big(D^\alpha u^N_t\big)^2+\\
+(b_3-\mu b_0)(p-1)\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^{p-2}(u^N_{x_it})^2\Big)e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt+\\
+b_1w_3(p-1)(p-2)A_2^{(p-3)/2}\int_{t_0}^\tau e^{-\mu(t-t_0)}\Big(\int\limits_{D_t}\sum_{i,j=1}^n(u^N_{x_ix_jt})^2dx\Big)^{3/2}dt+\\
+2\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}\big(a_{\alpha\beta tt}-\mu a_{\alpha\beta t}\big)D^\beta u^N D^\alpha u^N_t+ \qquad (16)\\
+\sum_{i=1}^n\big(\frac{1}{\delta_3}b_{it}^2|u^N_{x_i}|^{2(p-1)}+\frac{nc_2}{\delta_2}(u^N_{x_it})^2\big)\Big)e^{-\mu(\tau-t_0)}dx\,dt-\\
-2\int\limits_{D_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta t}D^\beta u^N D^\alpha u^N_te^{-\mu(\tau-t_0)}dx+(\delta_2+\delta_3)\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^n\big(u^N_{x_itt}\big)^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt.\end{gathered}$$

Позначимо

$$A_5(\mu)=A_4+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_{Q_{t_0,T}}f_t^2e^{-\mu(t-t_0)}dx\,dt+a_3n^2(\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)}+\|u_1\|^2_{H^2(\Omega)})+$$

$$+\frac{a_3n^2A_2}{\delta_4}+\frac{b_4nA_2^{p-1}}{\mu\delta_3}+\frac{nc_2A_0A_2}{2\delta_2c_0}+\frac{n^2(a_5+\mu a_2)A_2}{\mu\delta_5},$$

$A_6=\min\{1;\ a_2-a_3n^2\delta_4;\ (p-1)b_0;\ 2c_0-\delta_2-\delta_3\},\ A_6>0,$

$$A_7 = b_1 w_3 (p-1)(p-2) A_2^{(p-3)/2},$$

де δ_2, δ_3, δ_4, a_5, b_4 - такі сталі, що $2c_0 - \delta_2 - \delta_3 > 0$, $a_2 - a_3 n^2 \delta_4 > 0$, $|a_{\alpha\beta tt}| \leqslant a_5$, $b_{it}^2 \leqslant b_4$, $|\alpha| = |\beta| \leqslant 2$, $i = 1, ..., n$, $(x,t) \in Q_{t_0,T}$.

З нерівності (16) одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau}\!\!\int \Bigl(\bigl(u_{tt}^N\bigr)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \bigl(D^\alpha u_t^N\bigr)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^{p-2} (u_{x_it}^N)^2 \Bigr) e^{-\mu(\tau - t_0)} dx + \\ + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_itt}^N)^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt \leqslant \\ \leqslant \frac{A_5(\mu)}{A_6} + \frac{A_7}{A_6} \int_{t_0}^{\tau} e^{-\mu(t-t_0)} \Bigl(\int\limits_{D_t} \sum_{|\alpha|=2} \bigl(D^\alpha u_t^N\bigr)^2 dx \Bigr)^{3/2} dt. \tag{17}$$

Зауважимо, що сталі μ, δ_5 підбираються так, щоб

$$\frac{b_3}{b_0} \leqslant \mu, \quad \frac{3a_3 + n^2 a_5 \delta_5 + \mu n^2 a_2 \delta_5}{a_0} \leqslant \mu. \tag{18}$$

Позначимо

$$z(\tau) = e^{-\mu(\tau - t_0)} \int\limits_{D_\tau} \sum_{|\alpha|=2} \bigl(D^\alpha u_t^N\bigr)^2 dx,$$

тоді згідно з нерівністю (17) одержимо

$$z(\tau) \leqslant \frac{A_5(\mu)}{A_6} + \frac{A_7}{A_6} \int_{t_0}^{\tau} e^{\mu(t-t_0)/2} z(t)^{3/2} dt.$$

Якщо виконується умова

$$e^{\mu(T-t_0)/2} < 1 + \frac{\mu A_6^{1/2}}{A_5^{1/2}(\mu)}, \tag{19}$$

тоді на підставі леми Біхарі [12, с. 110], одержимо

$$z(\tau) \leqslant \frac{A_5(\mu)}{A_6 \Bigl[1 - \frac{1}{2} \bigl(\frac{A_5(\mu)}{A_6} \bigr)^{1/2} \int_{t_0}^{\tau} e^{\mu(t-t_0)/2} dt \Bigr]^2} = A_8. \tag{20}$$

Отже, якщо існують додатні сталі μ, T, які задовольняють умову (19), то

$$\int\limits_{D_\tau}\!\!\int \Bigl(\bigl(u_{tt}^N\bigr)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \bigl(D^\alpha u_t^N\bigr)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^{p-2} (u_{x_it}^N)^2 \Bigr) e^{-\mu(\tau - t_0)} dx + \\ + \int\limits_{Q_{t_0,\tau}} \sum_{i=1}^n (u_{x_itt}^N)^2 e^{-\mu(t-t_0)} dx\, dt \leqslant \frac{A_5(\mu)}{A_6} + \frac{A_7}{A_6} \int_{t_0}^{T} e^{\mu(t-t_0)/2} \bigl(A_8\bigr)^{3/2} dt = A_9.$$

Звідси одержимо оцінку

$$\int\limits_{D_\tau}\!\!\int \Bigl(\bigl(u_{tt}^N\bigr)^2 + \sum_{|\alpha|=2} \bigl(D^\alpha u_t^N\bigr)^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^N|^{p-2} (u_{x_it}^N)^2 \Bigr) dx +$$

$$+\int\limits_{Q_{t_0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}(u^N_{x_itt})^2dx\,dt\leqslant A_{10},\quad t_0\leqslant\tau\leqslant T. \tag{21}$$

Врахувавши оцінки (10) і (21), матимемо

$$\int\limits_{D_\tau}\left(\left(u_t^N\right)^2+\left(u_{tt}^N\right)^2+\sum_{|\alpha|=2}\left(D^\alpha u^N\right)^2+\sum_{|\alpha|=2}\left(D^\alpha u_t^N\right)^2+\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^p\right)dx\leqslant A_{11},$$

$t_0\leqslant\tau\leqslant T$.

Отже, існує послідовність $\{u^j(x,t)\}$ така, що:

$$\begin{aligned} u^j &\to u \quad *-\text{слабко в } L^\infty((t_0;T);H_0^2(\Omega));\\ u_t^j &\to u_t \quad *-\text{слабко в } L^\infty((t_0;T);H_0^2(\Omega));\\ u_{tt}^j &\to u_{tt} \quad *-\text{слабко в } L^\infty((t_0;T);L^2(\Omega));\\ |u^j_{x_i}|^{p-2}u^j_{x_i} &\to |u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i} \quad \text{слабко в } L^q(Q_{t_0,T}). \end{aligned}$$

Звідси, врахувавши систему рівнянь (6), для $j\geqslant j_0$ матимемо

$$\int\limits_{D_t}\left(u^j_{tt}v^{j_0}+\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant 2}a_{\alpha\beta}D^\beta u^jD^\alpha v^{j_0}+\sum_{i=1}^{n}b_i|u^j_{x_i}|^{p-2}u^j_{x_i}v^{j_0}_{x_i}+\right.$$
$$\left.+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}u^j_{x_jt}v^{j_0}_{x_i}\right)dx=\int\limits_{D_t}f\,v^{j_0}dx, \tag{22}$$

де $v^{j_0}(x)=\sum_{k=1}^{j_0}v_k\omega_k(x)$. Сукупність функцій v^{j_0} всюди щільна в V_0. Зробивши граничний перехід в (22) при $j\to\infty$, одержимо рівність (1), яка розуміється в сенсі простору розподілів $D'((t_0;T);V_0^*)$. Оскільки, $u_t\in L^\infty((t_0;T);H_0^2(\Omega))$, $u_{tt}\in L^\infty((t_0;T);L^2(\Omega))$, то маємо, що функція u задовольняє початкові умови (3), (4). Отже, u є узагальненим розв'язком мішаної задачі (1) - (4).

Зауважимо, що значення сталої T береться як розв'язок нерівності (19).

Теорему доведено.

---

1. *Tsutsumi Masayoshi, Iino Riichi.* On the global solution of a certain nonlinear partial differential equations // Proc. Japan. Acad.– 1969.– Vol.45. –, N6.– P. 466-469.
2. *Хлуднев А.М.* О разрешимости начально-краевых задач для одной слабо нелинейной системы // Дифференциальные уравнения.– 1978.– Т.14. – N11.– С. 2026-2037.
3. *Medeiros Luiz Adauto.* On a new class of nonlinear wave equations // J. Math. Anal. and Appl.– 1979.– Vol.69. – N1.– P. 252-262.
4. *Menzala Gustavo Perla.* On global classial solutions of a nonlinear wave equation // Appl. Anal.– 1980.– Vol.10. – N3.– P. 179-195.
5. *Ramos Oswaldo Ch.* Reqularity property for the nonlinear beam opertor // Ann. Acad. bras. cicna.– 1989.– Vol.61. – N1.– P. 15-25.
6. *Narazaki Takashi.* Global classical solutons of semilinear evolution equation // Saitama Math. J.– 1986.– Vol.4. – P. 11-34.

7. *Похожаев С.И.* Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений //Мат. сб.– 1975.–Т.96. – N1.– С. 152-166.
8. *Маскудов Ф.Г., Алиев Ф.А.* Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении// Докл. АН СССР.– 1988.– Т.300. – N6.– С.1312-1315.
9. *Лавренюк С.П.* Про одну змішану задачу для рівняння типу коливання пластинки // Доп. АН УРСР. Сер.А.– 1991.– N7.– С. 23-25.
10. *Лавренюк С.П., Онишкевич Г.М.* Стійкість за Ляпуновим нульового розв'язку одного нелінійного параболічного рівняння // Доп. НАН України.– 1996.– N6.– С. 5-16.
11. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
12. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М., 1967.

Barabash G.

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SOME NONLINEAR PARABOLIC EQUATION

In paper the initial boundary value problem for nonlinear parabolic equation with second derivative in time is considered. Sufficient conditions of existence of generalized solution of this problem are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 25.04.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 27–37

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 27–37

УДК 517.95

Ірина Березницька, Андрій Дребот, Юрій Макар

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Ми розглянули обернені задачі знаходження залежного від часу коефіцієнта температуропровідності у випадку, коли крайові умови та умови перевизначення є лінійними комбінаціями зі змінними коефіцієнтами значень невідомої функції та її перших похідних на кінцях проміжка й інтеграла по всьому проміжку від невідомої функції. Випадки задання звичайних крайових умов та умови перевизначення, що складається з лінійної комбінації крайової та інтегральної умови, розглянуто в праці [1]. Випадки задання нелокальних крайових умов та умов перевизначення описані в праці [2].

В області $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглянемо задачу знаходження функцій $(a, u) \in C[0,T] \times C^{2,1}(\overline{\Omega}), a(t) > 0, t \in [0,T]$, які задовольняють рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t),\ (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in [0,h], \tag{2}$$

крайові умови та умови перевизначення вигляду

$$\sum_{j=1}^{5} K_{ij} u_j(t) = g_i(t),\ i = 1,2,3,\ t \in [0,T],$$

де через $u_j(t)$ позначено

$$u_1(t) = u(0,t),\ u_2(t) = u(h,t),\ u_3(t) = u_x(0,t),$$
$$u_4(t) = u_x(h,t),\ u_5(t) = \int_0^h u(x,t)dx.$$

Припустимо, що ранг матриці, складеної з коефіцієнтів $K_{ij}(t)$, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,5}$, дорівнює 3. Залежно від розташування відмінного від нуля мінора третього порядку дані умови приводять до шести випадків. Розглянемо один з них:

$$u_x(0,t) = \nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_1(t),\ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(h,t) = \nu_3(t)u(0,t) + \nu_4(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_2(t),\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$u_x(h,t) = \nu_5(t)u(0,t) + \nu_6(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

(A):

$$\varphi(x) \in C^2[0,h],\ f(x,t) \in C^{2,0}(\overline{\Omega}),\ \mu_i(t) \in C^1[0,T],\ i=1,2,3;$$
$$\nu_j(t) \in C^1[0,T],\ j=\overline{1,6};$$

(B):

$$\varphi'(0) = \nu_1(0)\varphi(0) + \nu_2(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_1(0),$$

$$\varphi(h) = \nu_3(0)\varphi(0) + \nu_4(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_2(0),$$

$$\varphi'(h) = \nu_5(0)\varphi(0) + \nu_6(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_3(0).$$

Задачу (1)–(5) зведемо до системи рівнянь. Для цього припустимо, що відомі значення

$$u(0,t) = p(t),\ t \in [0,T], \tag{6}$$

$$\int_0^h u(x,t)dx = q(t),\ t \in [0,T]. \tag{7}$$

Розв'язок u задачі (1)–(3), (5), як відомо [2], за допомогою функції Гріна $G(x,t,\xi,\tau)$ можна подати у вигляді

$$u(x,t) = \int_0^h \varphi(\xi)G(x,t,\xi,0)d\xi - \int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau) + \nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))G(x,t,0,\tau)d\tau +$$
$$+ \int_0^t a(\tau)(\mu_3(\tau) + \nu_5(\tau)p(\tau) + \nu_6(\tau)q(\tau))G(x,t,h,\tau)d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^h f(\xi,\tau)G(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{8}$$

де

$$G(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(r(t)-r(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)\right); \quad r(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau.$$

Підставивши цей розв'язок в умови (6), (7), одержимо рівняння стосовно функцій $p(t)$ і $q(t)$:

$$p(t) = \int_0^h G(0,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau) + \nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))G(0,t,0,\tau)d\tau +$$
$$+ \int_0^t a(\tau)(\mu_3(\tau) + \nu_5(\tau)p(\tau) +$$
$$+ \nu_6(\tau)q(\tau))G(0,t,h,\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^h f(\xi,\tau)G(0,t,\xi,\tau)d\xi d\tau,\ t \in [0,T], \tag{9}$$

$$q(t)=\int_0^h dx\int_0^h G(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi-\int_0^h dx\int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau)+\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))\times$$
$$\times G(x,t,0,\tau)d\tau+\int_0^h dx\int_0^t a(\tau)(\mu_3(\tau)+\nu_5(\tau)p(\tau)+\nu_6(\tau)q(\tau))G(x,t,h,\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^h dx\int_0^t\int_0^h f(\xi,\tau)G(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau,\ t\in[0,T].$$

Змінюючи порядок диференціювання і враховуючи, що $\int_0^h G(x,t,\xi,\tau)dx=1$, маємо:

$$q(t)=\int_0^h\varphi(\xi)d\xi-\int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau)-\mu_3(\tau)+(\nu_1(\tau)-\nu_5(\tau))p(\tau)+$$
$$+(\nu_2(\tau)-\nu_6(\tau))q(\tau))d\tau+\int_0^t\int_0^h f(\xi,\tau)d\xi d\tau,\ t\in[0,T]. \tag{10}$$

Знайдемо похідну $p'(t)$, використовуючи співвідношення

$$G_t(x,t,\xi,\tau)a(\tau)=-a(t)G_\tau(x,t,\xi,\tau),\ G_t(x,t,\xi,\tau)=a(t)G_{xx}(x,t,\xi.\tau).$$

Інтегруючи двічі частинами, і скориставшись рівностями

$$G_\xi(0,t,0,0)=0,\ G_\xi(0,t,h,0)=0,$$

одержимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^h\varphi(\xi)G(0,t,\xi,0)d\xi\right)=a(t)\int_0^h\varphi(\xi)G_{\xi\xi}(0,t,\xi,0)d\xi=$$
$$=a(t)\left[G(0,t,0,0)\varphi(0)-G(0,t,h,0)\varphi(h)+\int_0^h G(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi\right].$$

Обчислимо похідну наступного доданка формули (9), враховуючи, що $G(x,t,\xi,t)=0$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t a(\tau)(\mu_1(\tau)+\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))G(0,t,0,\tau)d\tau\right)=$$
$$=a(t)\Big[G(0,t,0,0)(\mu_1(0)+\nu_1(0)p(0)+\nu_2(0)q(0))+$$
$$+\int_0^t(\mu_1(\tau)+\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))'G(0,t,0,\tau)d\tau\Big].$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t a(\tau)(\mu_3(\tau)+\nu_5(\tau)p(\tau)+\nu_6(\tau)q(\tau))G(0,t,h,\tau)d\tau\right)=$$
$$=a(t)\Big[G(0,t,h,0)(\mu_3(0)+\nu_5(0)p(0)+\nu_6(0)q(0))+$$
$$+\int_0^t(\mu_3(\tau)+\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))'G(0,t,h,\tau)d\tau\Big],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t\int_0^h f(\xi,\tau)G(0,t,\xi,\tau)d\tau\right)=f(0,t)+a(t)\left[\int_0^t f_\xi(0,\tau)G(0,t,0,\tau)d\tau-\right.$$

$$\left.-\int_0^t f_\xi(h,\tau)G(0,t,h,\tau)d\tau+\int_0^t d\tau\int_0^h f_{\xi\xi}(\xi,\tau)G(0,t,\xi,\tau)d\xi\right].$$

Звідси, використовуючи умову узгодженості (B), одержуємо

$$p'(t)=f(0,t)+a(t)\left[\frac{1}{\sqrt{\pi r(t)}}\int_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4r(t)}\right)d\xi-\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))'+\mu_1'(\tau)-f_x(0,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{r(t)-r(\tau)}\right)d\tau$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_5(\tau)p(\tau)+\nu_6(\tau)q(\tau))'+\mu_3'(\tau)-f_x(h,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2h^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\tau$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^h\int_0^t\frac{f_{\xi\xi}(\xi,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\xi d\tau\right],\ t\in[0,T]. \quad (11)$$

Диференціюючи рівняння (10) за t, знайдемо похідну $q'(t)$:

$$q'(t)=a(t)((\nu_5(t)-\nu_1(t))p(t)+(\nu_6(t)-\nu_2(t))q(t)+\mu_3(t)-\mu_1(t))+$$

$$+\int_0^h f(x,t)dx,\quad t\in[0,T]. \quad (12)$$

Підставимо (8) в умову (4), врахувавши (6) і (7). Одержане рівняння диференціюємо за t. Врахувавши значення $p'(t)$, $q'(t)$, що визначені відповідно рівняннями (11), (12), зведемо його до рівняння, розв'язаного щодо $a(t)$:

$$a(t)=[\mu_2'(t)+\nu_3'(t)p(t)+\nu_4'(t)q(t)+\nu_4(t)\int_0^h f(x,t)dx+\nu_3(t)f(0,t)-f(h,t)]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{\pi r(t)}}\int_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+(2n-1)h)^2}{4r(t)}\right)d\xi-\right.$$

$$-\frac{\nu_3(t)}{\sqrt{\pi r(t)}}\int_0^h\varphi''(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4r(t)}\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))'+\mu_1'(\tau)-f_x(0,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2h^2}{4(r(t)-r(\tau)}\right)d\tau$$

$$+\frac{\nu_3(t)}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_1(\tau)p(\tau)+\nu_2(\tau)q(\tau))'+\mu_1'(\tau)-f_x(0,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{r(t)-r(\tau)}\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_5(\tau)p(\tau)+\nu_6(\tau)q(\tau))'+\mu_3'(\tau)-f_x(h,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{n^2h^2}{r(t)-r(\tau)}\right)d\tau-$$

$$-\frac{\nu_3(t)}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{(\nu_5(\tau)p(\tau)+\nu_6(\tau)q(\tau))'+\mu_3'(\tau)-f_x(h,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)^2h^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\tau$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^h \frac{f_{\xi\xi}(\xi,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+(2n-1)h)^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\xi d\tau-$$

$$-\frac{\nu_3(t)}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_0^h \frac{f_{\xi\xi}(\xi,\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(r(t)-r(\tau))}\right)d\xi d\tau+$$

$$+\nu_4(t)((\nu_1(t)-\nu_5(t))p(t)+(\nu_2(t)-\nu_6(t))q(t)+\mu_1(t)-\mu_3(t))\Bigg]^{-1},\ t\in[0,T]. \quad (13)$$

Отже, задача (1)-(5) звелась до системи рівнянь (9)-(13) стосовно $a(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $p'(t)$, $q'(t)$. Нехай виконуються умови

$$(C):\quad \nu_i(t)\leqslant 0,\ i=1,2,3,\ \nu_4(t)<0,\ \nu_i(t)\geqslant 0, i=5,6;$$
$$\nu_i'(t)\leqslant 0,\ i=1,2,\ \nu_i'(t)\geqslant 0,\ i=\overline{3,6};\ \mu_1(t)\leqslant 0,\ \mu_3(t)\geqslant 0,$$
$$\mu_3(t)-\mu_1(t)>0,\ \mu_1'(t)-f_x(0,t)\leqslant 0,\ \mu_3'(t)-f_x(h,t)\geqslant 0,$$
$$\mu_2'(t)+\nu_4(t)\int_0^h f(x,t)dx+\nu_3(t)f(0,t)-f(h,t)>0,\ t\in[0,T];$$
$$\varphi(x)\geqslant 0,\ \varphi''(x)\geqslant 0,\ x\in[0,h];\ f(x,t)\geqslant 0,\ f_{xx}(x,t)\geqslant 0,\ (x,t)\in\overline{\Omega}.$$

Розглядаючи систему рівнянь (9)-(13) як операторне рівняння

$$\alpha(t)=P\alpha(t),\ t\in[0,T], \quad (14)$$

де $\alpha(t)=(a(t),p(t),q(t),p'(t),q'(t))$, застосуємо для його дослідження теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [3]. Спочатку визначимо оцінки розв'язків цього рівняння. Умова (C) дає

$$p(t)\geqslant 0,\ q(t)\geqslant 0,\ p'(t)\geqslant 0,\ q'(t)\geqslant 0,\ a(t)>0,\ t\in[0,T].$$

З рівняння (13) одержуємо

$$a(t)\leqslant(\max_{[0,T]}(\mu_2'(t)+\nu_4(t)\int_0^h f(x,t)dx-f(h,t)+\nu_3(t)f(0,t)+$$
$$+p(t)\max_{[0,T]}\nu_3'(t)+q(t)\max_{[0,T]}\nu_4'(t))(\min_{[0,T]}(\nu_4(t)(\mu_1(t)-\mu_3(t)))^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C_2(p(t)+q(t)), \quad (15)$$

де константи C_1, C_2 залежать від максимумів модулів функцій $\nu_3(t)$, $\nu_4(t)$, $\nu_3'(t)$, $\nu_4'(t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_3(t)$, $\mu_2'(t)$, $f(x,t)$. З рівнянь (9), (10) одержуємо оцінки

$$p(t)\leqslant C_3+C_4\int_0^t a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))d\tau+C_5\int_0^t\frac{a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}d\tau+$$
$$+C_6r(t)+C_7\sqrt{r(t)}, \quad (16)$$

$$q(t)\leqslant C_8+C_9\int_0^t a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))d\tau+C_{10}r(t), \quad (17)$$

врахувавши, що для $z\geqslant 0$

$$\frac{2z}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n^2z^2)\leqslant 1,\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-(2n-1)^2z^2)\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n^2z^2).$$

Додавши (16) і (17), одержуємо

$$p(t)+q(t) \leqslant C_{11}+C_{12}\int_0^t a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))d\tau+$$

$$+C_5\int_0^t \frac{a(\tau)(p(\tau)+q(\tau))}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}d\tau+C_7\sqrt{r(t)}+C_{13}r(t). \tag{18}$$

До цієї нерівності застосуємо таку лему.

Лема. *Для довільних функцій $a(t), v(t) \in C[0,T], a(t)>0$ з нерівності*

$$v(t) \leqslant B_1+B_2\sqrt{r(t)}+B_3r(t)+B_4\int_0^t a(\tau)v(\tau)d\tau+B_5\int_0^t \frac{a(\tau)v(\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}d\tau,\ t\in[0,T],$$

де $B_i(i=\overline{1,5})-$ додатні константи, випливає оцінка

$$v(t) \leqslant (B_6+B_7\sqrt{r(t)}+B_8r(t)+B_9r(t)\sqrt{r(t)})\exp\left((B_4+\pi B_5^2)r(t)+\frac{4}{3}B_4B_5r^{3/2}(t)\right),$$

константи B_6, B_7, B_8, B_9 залежать від $B_i, i=\overline{1,5}$.

Доведення леми виконуємо аналогічно до леми 2.6 у [2].

Використовуючи лему та оцінку (18), з нерівності (15) одержуємо

$$a(t) \leqslant C_1+K(r(t)), \tag{19}$$

де

$$K(r(t))=C_2(C_{14}+C_{15}\sqrt{r(t)}+C_{16}r(t)+C_{17}r(t)\sqrt{r(t)})\exp\Bigg((C_{12}+\pi C_5^2)r(t)+$$

$$+\frac{4}{3}C_5C_{12}r(t)^{3/2}\Bigg), \tag{20}$$

Перепишемо (19) у вигляді

$$\frac{a(t)}{C_1+K(r(t))} \leqslant 1. \tag{21}$$

Замінивши в нерівності (21) змінну t на τ, проінтегрувавши за τ в межах від 0 до t, зробивши під знаком інтеграла заміну $\sigma=r(\tau)$, одержимо нерівність

$$\int_0^{r(t)} \frac{d\sigma}{C_1+K(\sigma)} \leqslant t. \tag{22}$$

Функція $\beta(s)=\displaystyle\int_0^s \frac{d\sigma}{C_1+K(\sigma)}$ є неперервною монотонно зростаючою, тому існує обернена до неї неперервна монотонно зростаюча функція $\beta^{-1}(s)$, визначена на деякому відрізку $[0,b]$. Оцінимо число b. Використовуючи (20), отримуємо

$$\beta(s) \leqslant \frac{1}{C_2}\int_0^s \frac{d\sigma}{C_{15}\sqrt{\sigma}+C_{17}\sigma\sqrt{\sigma}}=\frac{2}{C_2\sqrt{C_{15}C_{17}}}\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{C_{17}s}{C_{15}}}\right).$$

Оскільки $C_2>0, C_{15}>0, C_{17}>0$, то

$$b=\lim_{s\to\infty}\beta(s) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{C_{18}}.$$

Отже, з нерівності (22) маємо оцінку для $r(t)$:

$$r(t) \leqslant \beta^{-1}(t),\ t \in [0, t_0],$$

де $t_0 = \min(T, b)$, що разом з (19) дає

$$a(t) \leqslant A_1 < \infty,\ t \in [0, t_0], \tag{23}$$

число A_1 залежить тільки від вихідних даних задачі. За наявності оцінки (23) з (12) і (18), після застосування леми, одержуємо оцінки

$$0 \leqslant p(t) \leqslant p_0 < \infty,\ t \in [0, t_0], \tag{24}$$

$$0 \leqslant q(t) \leqslant q_0 < \infty,\ t \in [0, t_0], \tag{25}$$

$$0 \leqslant q'(t) \leqslant q_1 < \infty,\ t \in [0, t_0], \tag{26}$$

де числа p_0, q_0, q_1 залежать від A_1 і вихідних даних задачі. З рівняння (11) отримуємо

$$p'(t) \leqslant C_{15} + a(t)\left(C_{16}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}} + C_{17}\int_0^t \frac{p'(\tau)}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}}d\tau\right). \tag{27}$$

Приймемо в (27) $t = \sigma$, домножимо на $\dfrac{1}{\sqrt{r(t)-r(\sigma)}}$ і проінтегруємо за σ від 0 дс t. Використовуючи формулу

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{r(t)-r(\sigma)}}\int_0^\sigma \frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{r(\sigma)-r(\tau)}} = \pi\int_0^t \mu(\tau)d\tau,$$

з (27) маємо

$$\int_0^t \frac{p'(\tau)d\tau}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}} \leqslant C_{15}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}} + C_{16}\pi T + C_{17}\pi\int_0^t p'(\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{r(t)-r(\tau)}} + \pi(C_{16}T + C_{17}p_0).$$

Оцінимо (13) знизу, використовуючи останню нерівність і оцінки (24)-(26). Звідси маємо нерівність

$$\min_{[0,t_0]} a(t) \geqslant \frac{C_{20}}{C_{21} + C_{22}/\sqrt{\min\limits_{[0,t_0]} a(t)}},$$

C_{20}, C_{21}, C_{22} – додатні сталі, яка дає оцінку для $a(t)$ знизу:

$$0 < A_0 \leqslant a(t),\ t \in [0, t_0], \tag{28}$$

де

$$A_0 = \frac{1}{4C_{21}^2}\left(\sqrt{C_{22}^2 + 4C_{20}C_{21}} - C_{22}\right)^2.$$

Враховуючи це, з (27) одержимо

$$0 \leqslant p'(t) \leqslant p_1 < \infty, t \in [0, t_0]. \tag{29}$$

Як у праці [2], наявність оцінок (23)-(26), (28)-(30) та умов (B), (C) дає змогу застосувати до операторного рівняння (14) теорему Шаудера і довести існування розв'язку $(a(t), p(t), q(t), p'(t), q'(t))$ системи (9)- (13). Розв'язуючи при знайдених $a(t), p(t), q(t)$ задачу (1)-(5), знаходимо $u(x,t)$.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)-(4). Припустимо, що $(a_i(t), u_i(x,t)), i = 1, 2$ – два її розв'язки, для їхньої різниці $b(t) = a_1(t) - a_2(t), v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ одержимо

$$v_t = a_1(t)v_{xx} + b(t)u_{2xx}, \ (x,t) \in \Omega, \tag{30}$$

$$v(x,0) = 0, \ x \in [0,h] \tag{31}$$

$$v_x(0,t) = \nu_1(t)v(0,t) + \nu_2(t)\int_0^h v(x,t)dx, \tag{32}$$

$$v(h,t) = \nu_3(t)v(0,t) + \nu_4(t)\int_0^h v(x,t)dx, \tag{33}$$

$$v_x(h,t) = \nu_5(t)v(0,t) + \nu_6(t)\int_0^h v(x,t)dx. \tag{34}$$

Припустивши, що відомі значення

$$v(0,t) = p(t), \ t \in [0,T], \tag{35}$$

$$\int_0^h v(x,t)dx = q(t), \ t \in [0,T] \tag{36}$$

за допомогою функції Гріна знаходимо розв'язок задачі (30)-(32), (34):

$$v(x,t) = -\int_0^t G_1(x,t,0,\tau)a_1(\tau)(\nu_1(\tau)p(\tau) + \nu_2(\tau)q(\tau))d\tau +$$

$$+\int_0^t G_1(x,t,h,\tau)a_1(t)(\nu_5(\tau)p(\tau) + \nu_6(\tau)q(\tau))d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^h b(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)G_1(x,t,\xi,\tau)d\xi\, d\tau, \tag{37}$$

де

$$G_i(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(r_i(t) - r_i(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(r_i(t)-r_i(\tau))}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(r_i(t)-r_i(\tau))}\right)\right); \ \ r_i(t) = \int_0^t a_i(\tau)d\tau, \ i = 1, 2.$$

Підставивши (37) у (33), (35), (36), продиференціюємо одержані рівності за t і одержимо систему рівнянь стосовно $b(t), p(t), q(t), p'(t), q'(t)$ вигляду

$$A(t)b(t) = \int_0^t K_1(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_2(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_3(t,\tau)q(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t K_4(t,\tau)p'(\tau)d\tau + \int_0^t K_5(t,\tau)q'(\tau)d\tau,$$

$$p(t) = \int_0^t K_6(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_7(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_8(t,\tau)q(\tau)d\tau,$$

$$q(t) = \int_0^t K_9(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_{10}(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_{11}(t,\tau)q(\tau)d\tau,$$

$$p'(t) = \int_0^t K_{12}(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_{13}(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_{14}(t,\tau)q(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t K_{15}(t,\tau)p'(\tau)d\tau + \int_0^t K_{16}(t,\tau)q'(\tau)d\tau$$

$$q'(t) = \int_0^t K_{17}(t,\tau)b(\tau)d\tau + \int_0^t K_{18}(t,\tau)p(\tau)d\tau + \int_0^t K_{19}(t,\tau)q(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t K_{20}(t,\tau)p'(\tau)d\tau + \int_0^t K_{21}(t,\tau)q'(\tau)d\tau$$

з інтегровними ядрами $K_i(t,\tau)$, $i = \overline{1,21}$, у якій

$$A(t) = \int_0^h \varphi''(\xi)G_2(h,t,\xi,0)d\xi -$$

$$- \int_0^t ((\nu_1(\tau)p_2(\tau) + \nu_2(\tau)q_2(\tau))' + \mu_1'(\tau) - f_x(0,\tau))G_2(h,t,h,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t ((\nu_5(\tau)p_2(\tau) + \nu_6(\tau)q_2(\tau))' + \mu_3'(\tau) - f_x(h,\tau))G_2(h,t,0,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h f_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_2(h,t,\xi,\tau)d\xi d\tau - \nu_3(t)(\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(0,t,\xi,0)d\xi -$$

$$- \int_0^t ((\nu_1(\tau)p_2(\tau) + \nu_2(\tau)q_2(\tau))' + \mu_1'(\tau) - f_x(0,\tau))G_2(0,t,0,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t ((\nu_5(\tau)p_2(\tau) + \nu_6(\tau)q_2(\tau))' + \mu_3(\tau) - f_x(h,\tau))G_2(0,t,h,\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^h f_{\xi\xi}(\xi,\tau)G_2(0,t,\xi,\tau)d\xi d\tau) -$$

$$-\nu_4(t)((\nu_5(t) - \nu_1(t))p_2(t) + (\nu_6(t) - \nu_2(t))q_2(t) + \mu_3(t) - \mu_1(t)) > 0, \ t \in [0,t_0],$$

де

$$p_2(t) = u_2(0,t), \ q_2(t) = \int_0^h u_2(x,t)dx.$$

Застосування властивостей системи інтегральних рівнянь Вольтера другого роду дає, що $b(t) = p(t) = q(t) = p'(t) = q'(t) = 0$, $t \in [0,T]$, і тоді $v(x,t) \equiv 0$, $(x,t) \in \Omega$ як розв'язок однорідної задачі, яка відповідає (30)–(34). Отже, доведено таке твердження.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (A), (B), (C), то розв'язок задачі (1)-(5) існує при $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$, де число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$ визначене вихідними даними задачі, і він єдиний в області існування.*

За подібною схемою досліджують інші випадки. Розглянемо обернену задачу у випадку крайових умов та умов перевизначення вигляду

$$u(0,t) = \nu_1(t)u_x(0,t) + \nu_2(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_1(t), \ t \in [0,T], \tag{38}$$

$$u(h,t) = \nu_3(t)u_x(0,t) + \nu_4(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_2(t), \ t \in [0,T], \tag{39}$$

$$u_x(h,t) = \nu_5(t)u_x(h,t) + \nu_6(t)\int_0^h u(x,t)dx + \mu_3(t), \ t \in [0,T]. \tag{40}$$

Теорема 2. *Нехай, крім умови (A) теореми 1, виконуються такі умови:*

$$\varphi(0) = \nu_1(0)\varphi'(0) + \nu_2(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_1(0),$$

$$\varphi(h) = \nu_3(0)\varphi'(0) + \nu_4(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_2(0),$$

$$\varphi'(h) = \nu_5(0)\varphi'(0) + \nu_6(0)\int_0^h \varphi(x)dx + \mu_3(0),$$

$$\Delta(t) \equiv 0\nu_1(t)\nu_4(t) - \nu_2(t)\nu_3(t) \neq 0, \ \frac{\nu_1(t)}{\Delta(t)} < 0, \ \frac{\nu_2(t)}{\Delta(t)} \geqslant 0,$$

$$\frac{\nu_3(t)}{\Delta(t)} > 0, \ \frac{\nu_4(t)}{\Delta(t)} \leqslant 0, \ \nu_5(t) \leqslant 0, \ \nu_6(t) \geqslant 0, \ \left(\frac{\nu_i(t)}{\Delta(t)}\right)' \geqslant 0, \ i = 1,2$$

$$\left(\frac{\nu_i(t)}{\Delta(t)}\right)' \leqslant 0, \ i = 3,4, \ \nu_5'(t) \leqslant 0, \ \nu_6(t) \geqslant 0, \ \mu_3'(t) > 0, \ \mu_4(t) \leqslant 0,$$

$$\mu_3'(t) - f_x(h,t) \geqslant 0, \mu_4'(t) - f_x(0,t) \leqslant 0$$

$$\left(\frac{\nu_3(t)\mu_1(t) - \nu_1(t)\mu_2(t)}{\Delta(t)}\right)' + \frac{\nu_1(t)f(h,t) - \nu_3(t)f(0,t)}{\Delta(t)} - \int_0^h f(x,t)dx > 0, \ t \in [0,T];$$

$$\varphi(x) \geqslant 0, \varphi(x)''(x) \geqslant 0, x \in [0,h]; \ f(x,t) \geqslant 0, f_{xx}(x,t) \in \overline{\Omega};$$

$$\frac{-\nu_3(0)\varphi(0) + \nu_1(0)\varphi(h)}{\Delta(0)} > 0, \frac{-\nu_3(0)\varphi''(0) + \nu_1(0)\varphi''(h)}{\Delta(0)} > 0.$$

Тоді розв' язок задачі (1), (2), (38)-(40) існує при $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$, де число $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$, визначене вихідними даними задачі, і він єдиний в області існування.

Нехай задані крайові умови та умови перевизначення вигляду

$$u(h,t) = \nu_1(t)u(0,t) + \nu_2(t)u_x(0,t) + \mu_1(t), \ t \in [0,T], \tag{41}$$

$$u_x(h,t) = \nu_3(t)u(0,t) + \nu_4(t)u_x(0,t) + \mu_2(t), \ t \in [0,T], \tag{42}$$

$$\int_0^h u(x,t)dx = \nu_5(t)u(0,t) + \nu_6(t)u_x(0,t) + \mu_3(t), \ t \in [0,T]. \tag{43}$$

Умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі (1),(2),(41)-(43) визначають такою теоремою.

Теорема 3. *Нехай, крім умов (A) теореми 1, виконуються умови*

$$\varphi(h) = \nu_1(0)\varphi(0) + \nu_2(0)\varphi'(0) + \mu_1(0),$$
$$\varphi'(h) = \nu_3(0)\varphi(0) + \nu_4(0)\varphi'(0) + \mu_2(0),$$
$$\int_0^h \varphi(x)dx = \nu_5(0)\varphi(0) + \nu_6(0)\varphi'(0) + \mu_3(0);$$
$$\nu_i(t) \leqslant 0,\ i = 1,4,6,\ \nu_i(t) \geqslant 0,\ i = 3,5,\ \nu_2(t) < 0,$$
$$\nu_i'(t) \leqslant 0,\ i = 1,2,4,6,\ \nu_i(t) \geqslant 0,\ i = 3,5,\ \mu_1(t) \geqslant 0,\ \mu_2(t) > 0,$$
$$\mu_1'(t) \leqslant 0,\ \mu_2'(t) - f_x(h,t) \geqslant 0,\ \mu_3'(t) - \int_0^h f(x,t)dx > 0,\ t \in [0,T];$$
$$\varphi(x) \geqslant 0,\ \varphi''(x) \geqslant 0,\ x \in [o,h];\ f(x,t) \geqslant 0,\ f_x(0,t) \geqslant 0,\ f_{xx}(x,t) \geqslant 0,$$
$$\frac{\nu_5(t)}{\mu_2(t)}\varphi''(x) + \frac{\nu_6(t)}{\mu_2(t)\mu_3(t)}(\varphi''(h-x) - \nu_1(t)\varphi''(x)) < 1,\ (x,t) \in \overline{\Omega}$$

Тоді існує розв'язок задачі для $x \in [0,h], t \in [0,t_0]$, *де число* $t_0, 0 < t_0 \leqslant T$ *визначене вихідними даними задачі, і він єдиний в області існування.*

1. *Березницька І.Б., Дребот А.Й., Іванчов М.І., Макар Ю.П.* Обернена задача з інтегральним перевизначенням// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип.48. – С.71-79.
2. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами.- Препринт. – К., 1995.
3. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М., 1969.

Bereznitska I., Drebot A., Makar Yu.

INVERSE PROBLEMS FOR THE HEAT EQUATION WITH NONLOCAL AND INTEGRAL CONDITIONS

In the paper inverse problems for finding an unknown time-dependent major coefficient in the heat equation are considered. Overdetermination and boundary conditions are given as linear combinations of boundary values and integral of the solution.

Стаття надійшла до редколегії 26.03.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 38–41

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 38–41

УДК 512.553

VITALIJ BONDARENKO

INFINITELY REPRESENTED BUNDLES OF TWO SEMICHAINS HEREDITARY RINGS

In this paper we study representations of bundles of semichains. These representations were classified (in the invariant form) in [1]. A history of solving this classification problem and its applications was presented in [2].

We associate a bigraph with a bundle of two semichains and give (in its terms) a necessary and sufficient condition that a bundle is infinitely represented, i.e. that it has (up to isomorphism) infinitely many indecomposable representations.

Throughout the paper, k denotes an arbitrary field; all partially ordered sets (posets) are finite and all vector spaces are finite-dimensional and right. Considering linear maps, morphisms and so on, we use the right-side notation.

1. The category of representations of a bundle of two semichains. For a poset A with involution $*$ and a field k, $\mathrm{mod}_{(A,*)}k$ denotes (by analogy with the category of finite-dimensional vector k-spaces $\mathrm{mod}\, k$) the category of $(A,*)$-spaces over k [3], i.e. the category with objects the vector k-spaces $U = \oplus_{a\in A} U_a$, where $U_{a^*} = U_a$ (for all $a \in A$), and with morphisms $\delta : U \to U'$ the linear maps $\delta \in \mathrm{Hom}_k(U, U')$ for which $\delta_{a^*a^*} = \delta_{aa}$ and $\delta_{bc} = 0$ if $b \not\leq c$. Here δ_{xy} denotes (as usual in analogous situations) the linear map of U_x into U'_y induced by δ. We identify $(A,*)$ with A if the involution $*$ is trivial.

Recall that a semichain is a poset of the form $Y = \overset{s}{\underset{i=1}{\cup}} Y_i$, where each Y_i consists of either one point or two incomparable points, and $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_s$ (i.e. $y_1 < y_2 < \cdots < y_s$ for all $y_i \in Y_i$); the subsets Y_i are called the links of the semichain Y (if each link consists of one point, the set Y is called a chain).

Let A and B be disjoint semichains ($A \cup B \neq \varnothing$). A bundle of the semichains A and B is a triple $\overline{S} = (A, B, *)$, where $*$ is an involution of $A \cup B$ such that $x^* = x$ for each x belonging to a two-point link. The representations of the bundle $\overline{S} = (A, B, *)$ over k are the triples (U, V, φ), where $U \in \mathrm{mod}_A k$, $V \in \mathrm{mod}_B k$, $U \oplus V \in \mathrm{mod}_{(A\cup B,*)}k$ and φ is a linear map of U into V ($A \cup B$ is the poset with the smallest order relation containing the order relations of A and B). A morphism from (U, V, φ) to (U', V', φ') is determined by a pair (α, β) of linear maps $\alpha : U \to U'$ and $\beta : V \to V'$ such that $\alpha \in \mathrm{mod}_A k$, $\beta \in \mathrm{mod}_B k$, $\alpha \oplus \beta \in \mathrm{mod}_{(A\cup B,*)}k$ and $\varphi\beta = \alpha\varphi'$. The representations of the bundle $\overline{S} = (A, B, *)$ over k form a (Krull–Schmidt) category which we will denote by $\mathcal{B}_k(\overline{S})$ or $\mathcal{B}_k(A, B, *)$.

A bundle of two semichains $\overline{S} = (A, B, *)$ is called finitely represented (over k) if the category $\mathcal{B}_k(\overline{S})$ has only finitely many isomorphism classes of indecomposable objects; otherwise, $\overline{S}$ is called infinitely represented.

2. Formulation of the main result. Let $\overline{S}$ be a bundle of semichains A and B. Define two symmetric binary relations, $\sim$ and $-$, on $A \cup B$ by putting $x \sim y$ if and only if $x^* = y$, $x \neq y$, and $x - y$ if and only if either $x \in A$, $y \in B$ or $x \in B$, $y \in A$.

With a bundle $\overline{S} = (A, B, *)$ we associate the following (nonoriented) bigraph $G = G(\overline{S})$:

a) the vertices of G are the symbols e_x, $x \in A \cup B$;

b) G has edges of two type – "$\sim$" and "$-$"; the edge $e_x \sim e_y$ (respectively, $e_x - e_y$) exists if and only if $x \sim y$ (respectively, $x - y$) in $A \cup B$.

A subgraph of G is determined as usual: it is a bigraph with a set of vertices $E \subset \{e_x | x \in A \cup B\}$ and some edges from G (between vertices $e_x, e_y \in E$). If the bigraph $G(\overline{S})$ is geometrically given, we identify e_x with x.

In the sequel, we denote links of semichains by lower case letters, and identify the one-poits links with the points themselves; the points of a two-point link x is denoted by x^+ and x^-.

The main theorem. *A bundle $\overline{S}$ of two semichains is infinitely represented if and only if the bigraph $G(\overline{S})$ contains one of the following subgraphs:*

$$\mathit{1)}\ x \simeq y; \quad \mathit{2)}\ \begin{array}{ccc} x^+ & - & y^+ \\ | & & | \\ y^- & - & x^- \end{array}; \quad \mathit{3)}\ \begin{array}{ccc} x_1 & \sim & x_2 \\ | & & | \\ y_1 & \sim & y_2 \end{array}; \quad \mathit{4)}\ \begin{array}{ccccc} & & y^+ & & \\ & / & & \backslash & \\ x_1 & & \sim & & x_2 \\ & \backslash & & / & \\ & & y^- & & \end{array}.$$

3. Invariants of indecomposable representations of the bundle $\overline{S}$. Let $\overline{S} = (A, B, *)$ be a bundle of semichains A and B; let $L(A)$ or $L(B)$ be the set of links of the semichain A or B, respectively; denote by $L(S)$, or simply L, the union of the sets $L(A)$ and $L(B)$. We denote the number of points of a link x by $r(x)$.

Define two symmetric binary relations, α and β, on the set L by putting $x\alpha y$ if and only if either $x \neq y$, $r(x) = r(y) = 1$ and $x^* = y$, or $x = y$ and $r(x) = 2$; and $x\beta y$ if and only if either $x \in L(A)$ and $y \in L(B)$, or $x \in L(B)$ and $y \in L(A)$.

We call an L-chain (respectively, L-cycle) an expression g of the form $x_1\lambda_1x_2\lambda_2 \ldots x_{m-1}\lambda_{m-1}x_m$, $m \geqslant 1$ (respectively, $x_1\lambda_1x_2\lambda_2 \ldots x_{m-1}\lambda_{m-1}x_m\lambda_m$, $m \geqslant 2$), where $x_i \in L$, $\lambda_j \in \{\alpha, \beta\}$, $x_j\lambda_jx_{j+1}$ in L and $\lambda_j \neq \lambda_{j+1}$ for all $i = 1, \ldots, m$ and $j = 1, \ldots, m-1$ (respectively, $i, j = 1, \ldots, m$); notice that for cycles the subscripts $p > m$ and $p < 1$ are considered modulo m (in particular $x_{m+1} = x_1$ and $\lambda_{m+1} = \lambda_1$). The number m is called the length of an L-chain (respectively, L-cycle) and is denoted by $|g|$. Denote by g^*, where g is an L-chain (respectively, L-cycle), the L-chain $x_m\lambda_{m-1}x_{m-1} \ldots \lambda_2x_2\lambda_1x_1$ (respectively, the L-cycle $x_m\lambda_{m-1}x_{m-1} \ldots x_2\lambda_1x_1\lambda_m$); for an L-cycle g, $g(i)$ denotes the L-cycle $x_i\lambda_i \ldots x_{i+m-1}\lambda_{i+m-1} = x_i\lambda_i \ldots x_m\lambda_mx_1\lambda_1 \ldots x_{i-1}\lambda_{i-1}$.

L-chains (respectively, L-cycles) g and h are called isomorphic if either $g = h$ or $g = h^*$ (respectively, either $g = h(i)$ or $g = h^*(i)$ for some i). An L-chain (respectively, L-cycle) is called symmetric if $|g| > 1$ and $g = g^*$ (respectively, $g(i) = g^*$ for some i); an L-cycle g is called periodic if $g = g(i)$ for some i, $1 < i \leqslant m$.

L-subchains (or, simply, subchains) of an L-chain (respectively, L-cycle) g is called the L-chains h of the form $x_i\lambda_{i+1} \ldots \lambda_{i+s-1}x_{i+s}$, where $0 \leqslant s \leqslant m - i$ (respectively, $0 \leqslant s \leqslant m + i - 1$).

An L-chain g will be called admissible if $x_i\alpha y$ in L, $x_i \neq y$, imply either $\lambda_{i-1} = \alpha$ or $\lambda_i = \alpha$. The left end x_1 (respectively, the right end x_m) of an L-chain g of length $m > 1$ will be called double if $\lambda_1 = \beta$ and $x_1\alpha x_1$ in L (respectively, $\lambda_{m-1} = \beta$ and

$x_m \alpha x_m$ in L); for $m = 1$, the end x_1 will be called double if $x_1 \alpha x_1$ (in L). The number of double ends of g will be denoted by $d(g)$ (if $m = 1$ and $x_1 \alpha x_1$, then $d(g) = 1$).

In the case when h is an L-chain and $d(h) = 2$, we denote by $h^{[s]}$ the L-chain of the form $h^{(1)}\alpha h^{(2)}\alpha \dots \alpha h^{(s)}$, where $h^{(i)} = h$ for odd i and $h^{(i)} = h^*$ for even i; if only the right end of h is double, then $h^{[s]}$ can be constructed only for $s = 1, 2$ (in the remaining cases only for $s = 1$). An L-chain g will be called composite if it can be represented in the form $g = h^{[s]}$ for $s > 1$, and simple otherwise. An L-cycle is called simple if it is nonperiodic.

Denote by $G_1(L)$ the set of simple admissible L-chains, and by $G_2(L)$ the set of simple L-cycles; put $G(L) = G_1(L) \cup G_2(L)$. For an L-cycle $g \in G_2(L)$ denote by $\delta(g)$ the number of $i \in \{1, \dots, m\}$ such that $x_i \neq x_{i+1}$ and either $x_i, x_{i+1} \in L(A)$, or $x_i, x_{i+1} \in L(B)$ $(m = |g|)$; put $\delta_0(g) = \delta(g)/2$ for an symmetric L-cycle g, and $\delta_0(g) = \delta(g)$ otherwise.

Let k be an arbitrary field. In [2] (see § 1) we associate to the L-chains $g \in G_1(L)$ and L-cycles $g \in G_2(L)$ certain special representations (over k) of the bundle $\overline{S} = (A, B, *)$. Namely, to an L-chain $g \in G_1(L)$, we associate the representation $U_1(g)$ if $d(g) = 0$, the representations $U_s(g)$, $s = 1, 2$, if $d(g) = 1$, and the representations $U_s(g, p)$, $s = 1, 2, 3, 4$, if $d(g) = 2$, where p is any natural number. To an L-cycle $g \in G_2(L)$, we associate the representation $U(g, f)$, where $f = f(t)$ is a power of a monic polynomial f_0, irreducible over k, such that $f_0 \neq t$ if g is nonsymmetric, and $f_0 \neq t, t+1$ (respectively, $f_0 \neq t, t-1$) if g is symmetric for an even (respectively, odd) $\delta_0(g)$.

These representations (whose explicit form were indicated in [1, 2]) are all the indecomposable representations of the bundle $\overline{S} = (A, B, *)$. More precisely, the following statement holds.

Theorem. *Choose one representative in each isomorphism class of L-chains and L-cycles belonging to $G(L)$. Then the set of representations of the form $U_s(g)$, $U_s(g,p)$ and $U(g, f)$ associated to the chosen L-chains and L-cycles is a complete set of pairwise nonequivalent indecomposable representations of the bundle $\overline{S} = (A, B, *)$.*

The Theorem was proved in [1].

4. Proof of the main theorem. Prove first the following lemma.

Lemma. *The following conditions are equivalent:*

a) $G_2(L) = \varnothing$;

b) $G_1(L)$ contains only finitely many L-chains and does not contain L-chains with two double ends.

Proof. Obviously, conditions a) and b) are equivalent, respectively, to the following conditions:

a') the set $\overline{G}_2(L)$ of all (not necessarily simple) L-cycles is empty;

b') the set $\overline{G}_1(L)$ of all (not necessarily simple) admissible L-chains contains only finitely many elements.

a') $\Rightarrow$ b'). Let $\overline{G}_2(L) = \varnothing$. Then $\overline{G}_1(L)$ does not contain an L-chain $g = (x_1\lambda_1 x_2 \dots \lambda_{m-1} x_m)$ such that $x_i = x_{i+s}$ and $\lambda_i = \lambda_{i+s}$ for some $s > 0$ (otherwise, $(x_i\lambda_i x_{i+1} \dots x_{i+s-1}\lambda_{i+s-1}) \in \overline{G}_2(L)$). Hence $|\overline{G}_1(L)| < \infty$.

b') $\Rightarrow$ a'). Let $|\overline{G}_1(L)| < \infty$. Show that $\overline{G}_2(L) = \varnothing$. Assume the contrary and consider some L-cycle $g = (x_1\lambda_1 x_2 \dots x_m \lambda_m)$ in $\overline{G}_2(L)$; denote by g' the L-chain $x_1\lambda_1 x_2 \dots x_m$. Then $g^n g' \in \overline{G}_1(L)$ for any natural n, contradicting the assumption that $|\overline{G}_1(L)| < \infty$. The lemma is proved.

Proposition. *A bundle $\overline{S} = (A, B, *)$ is infinitely represented if and only if the set $G_2(L)$ contains an L-cycle of length 2 or 4.*

Proof. It follow from the Theorem and Lemma that $\overline{S}$ is infinitely represented if and only if $G_2(L) \neq \varnothing$. Show that if the set $G_2(L)$ is not empty, then it contains some L-cycle of length 2 or 4.

Let $(x_1\lambda_1 x_2 \dots x_m\lambda_m) \in G_2(L)$, where $m > 4$; obviously, we can assume that $\lambda_1 = \alpha$. If for some odd i either $x_i \in L(A)$ and $x_{i+1} \in L(B)$, or $x_i \in L(B)$ and $x_{i+1} \in L(A)$, then $x_i\alpha x_{i+1}\beta$ is a simple L-cycle (of length 2). Otherwise, $x_1\alpha x_2\beta x_3\alpha x_4\beta$ is a simple L-cycle (of length 4).

The proposition is proved.

The Main theorem follows from the proposition: if $(x\alpha y\beta) \in G_2(L)$, then the bigraph $G(\overline{S})$ contains a subgraph of the form 1); if $(x\alpha x\beta y\alpha y\beta) \in G_2(L)$, then $G(\overline{S})$ contains a subgraph of the form 2); if $(x_1\alpha x_2\beta y_1\alpha y_2\beta) \in G_2(L)$, where $x_1 \neq x_2$ and $y_1 \neq y_2$, then $G(\overline{S})$ contains a subgraph of the form 3); if, finally, $(x_1\alpha x_2\beta y\alpha y\beta) \in G_2(L)$, where $x_1 \neq x_2$, then $G(\overline{S})$ contains a subgraph of the form 4).

---

1. *Bondarenko V.M.* Bundles of semichained sets and their representations // Kiev: Inst. Math. Acad. Sci. Ukrainian SSR, 1988 (Preprint 88.60). – 32 p. (in Russian).
2. *Bondarenko V.M.* Representations of bundles of semichained sets, and their applications // Algebra and Analysis. – 1991. – Vol.3. – N 5. – P. 973–996 (in Russian).
3. *Bondarenko V.M.* On classifications of linear operators up to S-similarity // Dokl. Acad. Sci. of Ukraine. – 1997. – N 10. – P. 16–20 (in Russian).

Бондаренко В.

В'ЯЗКИ ДВОХ НАПІВЛАНЦЮГІВ НЕСКІНЧЕННОГО ТИПУ

У статті кожній в'язці двох напівланцюгів поставлено у відповідність деякий біграф і в його термінах сформульовано необхідні і достатні умови того, щоб в'язка мала нескінченне число нерозкладних зображень.

Institute of Mathematics, National Academy of Science of Ukraine, Kiev.

Стаття надійшла до редколегії 17.04.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 42–47 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 42–47*

УДК 512.553

Омелян Горбачук, Юрій Матурін

РОЗЩЕПЛЕННЯ НАПЕРЕДРАДИКАЛІВ

Розглядаються асоціативні кільця з одиницею, модулі вважаються лівими унітарними. З фактами теорії скрутів можна ознайомитись у [5], [6], [4].

Говоритимемо, що в категорії ${}_R\mathcal{M}$ визначено напередрадикал r, якщо кожному модулю $M \in {}_R\mathcal{M}$ поставлено у відповідність його підмодуль $r(M)$ так, що для довільного R-гомоморфізму $f : M \longrightarrow N$ має місце співвідношення $f(r(M)) \subset r(N)$.

Напередрадикал r називається радикалом, якщо $r(M/r(M)) = 0$ для всякого $M \in {}_R\mathcal{M}$.

Напередрадикал r називається ідемпотентним, якщо $r(r(M)) = r(M)$ для всякого $M \in {}_R\mathcal{M}$.

Напередрадикал r називається напередскрутом, якщо $r(N) = N \cap r(M)$ для всякого $M \in {}_R\mathcal{M}$ і $N \subset M$.

Напередскрут називається скрутом, якщо він є радикалом.

Напередскрут пов'язаний з системою $\mathcal{F}$ лівих ідеалів кільця Λ, які мають такі властивості:

$G1. A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset \Lambda \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$;

$G2. A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$;

$G3. A \in \mathcal{F}, x \in \Lambda \Longrightarrow (A : x) = \{y \in \Lambda | yx \in A\} \in \mathcal{F}$.

У випадку скруту додатково має місце властивість

$G4. A \subset B, B \in \mathcal{F}$ і для всякого $x \in B$ $(A : x) \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \in \mathcal{F}$.

Наведемо добре відому теорему Габріеля (див. [5], [6]).

Теорема. *Для всякого скруту (напередскруту) r система $\mathcal{E}$ лівих ідеалів кільця Λ, фактор-модулі за якими r-періодичні, має властивості $G1-G4$ $(G1-G3)$. Навпаки, для кожної системи $\mathcal{E}$ лівих ідеалів кільця Λ, яка має властивості $G1-G4$ $(G1-G3)$, існує один і тільки один скрут (напередскрут) r, при якому $I \in \mathcal{E}$ рівносильно $r(\Lambda/I) = \Lambda/I$. При цьому $r(A) = \{a | a \in A, (0 : a) \in \mathcal{E}\}$, де $(0 : a) = \{\lambda | \lambda \in \Lambda, \lambda a = 0\}$.*

Ядром напередскруту r називається ідеал $K_r = \cap_{B \in \mathcal{E}_r} B$, де $\mathcal{E}_r$ – відповідний напередрадикальний фільтр.

Напередрадикал r називається тривіальним, якщо виконується одна з таких умов:

1. $r(M) = M$ для всякого $M \in {}_R\mathcal{M}$.
2. $r(M) = 0$ для всякого $M \in {}_R\mathcal{M}$.

Напередрадикал r розщеплюється, якщо $r(M)$ виділяється прямим доданком в M для всякого $M \in {}_R\mathcal{M}$. Очевидно, що тривіальний напередрадикал розщеплюється.

Скрут (напередскрут) називається ядерним (без'ядерним), якщо його ядро відмінне від 0 (дорівнює 0). Цей термін було введено проф. Л.А.Скорняковим.

Напередскрут r називається джансовим, якщо $K_r \in \mathcal{E}_r$. В праці [1] було доведено таке.

Твердження. *Всякий ядерний нетривіальний напередскрут над кільцем без дільників нуля не розщеплюється.*

Кільце Λ називається нерозкладним, якщо воно не містить жодного центрального ідемпотента, який відмінний від 0 і 1.

Кільце Λ називається лівим дуо-кільцем, якщо кожний лівий ідеал у ньому є ідеалом.

Теорема 1. *Якщо в категорії $_\Lambda\mathcal{M}$ над нерозкладним лівим дуо-кільцем Λ всі джансові напередскрути розщеплюються, то Λ – тіло.*

Доведення. Нехай $u \in \Lambda \setminus \{0\}$, тоді $\mathcal{E}_u = \{I | I \supset \Lambda u\}$ – напередрадикальний фільтр. Нехай r_u – відповідний напередскрут. Λ – нерозкладне, r_u – розщеплюваний, оскільки він джансовий, тому $r_u(\Lambda) = 0$ або $r_u(\Lambda) = \Lambda$. $r_u(\Lambda) \neq \Lambda$, бо інакше б $1 \cdot u = 0$. Тому $r_u(\Lambda) = 0$. Тоді для довільного $\lambda \neq 0$ $\lambda u \neq 0$. Тому Λ – кільце без дільників нуля. Якщо $u \neq 0$, то r_u ядерний, бо інакше б $\Lambda u = 0$, що не є можливим. Тому (відповідно до твердження) r_u не розщеплюється, якщо він відмінний від тривіального. Звідси маємо, що r_u – тривіальний, оскільки розщеплюється. З того, що $r_u(\Lambda) = 0$, одержимо, що $r_u(\Lambda/\Lambda u) = 0$, враховуючи, що r_u – тривіальний. Тому з $\Lambda u \in \mathcal{E}_u$ маємо, що $\Lambda/\Lambda u = 0$. Таким чином, для кожного $u \neq 0$ маємо, що $\Lambda = \Lambda u$. А це свідчить, що Λ – тіло. Теорема доведена.

Нехай $\varphi : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ – накладання кілець, а r – напередскрут над Λ_1. У праці [2] було доведено, що система $\mathcal{E}$ лівих ідеалів кільця Λ_1, яка є напередрадикальним фільтром, індукує напередрадикальний фільтр $\varphi(\mathcal{E}) = \{\varphi(I) | I \in \mathcal{E}\}$ в кільці Λ_2. За теоремою Габріеля маємо відповідний до цього фільтру напередскрут $\varphi(r)$ у категорії лівих Λ_2-модулів. У праці [2] також було доведено, що з розщеплюваності напередскруту r випливає розщеплюваність $\varphi(r)$. Зрозуміло, що з джансовості напередскруту r випливає джансовість $\varphi(r)$.

Лема 1. *Нехай $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_n$ – пряма сума кілець. Всі джансові напередскрути над Λ розщеплюються тоді і тільки тоді, коли для довільного $i \in \{1, \ldots, n\}$ всі джансові напередскрути розщеплюються над Λ_i.*

Доведення. Нехай в категорії лівих Λ-модулів розщеплюються всі джансові напередскрути. Розглянемо джансовий напередскрут r_i над Λ_i, ядро якого – ідеал I_i кільця Λ_i. Очевидно, що I_i є ідеалом і кільця Λ.

Нехай r – джансовий напередскрут над Λ, ядро якого I_i. Розглянемо природне накладання кілець $\varphi_i : \Lambda \longrightarrow \Lambda_i$. Для напередскруту $\varphi_i(r)$ напередрадикальним фільтром буде система лівих ідеалів кільця Λ_i, яка має вигляд $\{\varphi_i(I) | I \in \mathcal{E}_r\}$, де $\mathcal{E}_r$ – напередрадикальний фільтр, який відповідає r. Але для довільного $I \in \mathcal{E}_r$ маємо, що $I_i \subset I$, тому $I_i = \varphi_i(I_i) \subset \varphi_i(I)$. Це свідчить про те, що напередрадикальні фільтри для r_i і $\varphi_i(r)$ збігаються. За теоремою Габріеля одержимо, що $r_i = \varphi_i(r)$. Але r – джансовий напередскрут, тому він розщеплюється. Тоді розщеплюється і $r_i = \varphi_i(r)$. Але напередскрут r_i над Λ_i, ядро якого належить відповідному фільтру, вибирався довільно, тому для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$ всі джансові напередскрути над Λ_i розщеплюються.

Нехай тепер для довільного $i \in \{1, \ldots, n\}$ всі джансові напередскрути над Λ_i розщеплюються. Розглянемо тоді джансовий напередскрут r над Λ і всі природні накладання кілець $\varphi_i : \Lambda \longrightarrow \Lambda_i$, де $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тоді $\varphi_i(r)$ – джансові напередскрути, де $i \in \{1, \ldots, n\}$. За умовою маємо, що $\varphi_i(r)$ – розщеплюється над Λ_i, де $i \in \{1, \ldots, n\}$. За лемою 1 [3] (у зміненому формулюванні для випадку напередскрутів) маємо, що r – розщеплюється. Лема доведена.

Теорема 2. *Якщо Λ – ліве дуо-кільце, що є прямою сумою нерозкладних кілець, то умови I, II, III рівносильні, де*

I. Всі джансові напередскрути розщеплюються.

II. Λ – класично напівпросте кільце.

III. Λ – пряма сума тіл.

Доведення. $(I \Leftrightarrow III)$ Це випливає з теореми 1 і леми 1. $(II \Leftrightarrow III)$ Очевидно. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Якщо над лівим дуо-кільцем Λ всі напередскрути розщеплюються, то воно є прямою сумою тіл.*

Доведення. Це випливає з теореми 2 і леми 3 [3] (див.також [7]).

Розглянемо тепер питання про розщеплюваність ідемпотентних радикалів у категорії модулів над прямою сумою кілець. Одержана тут теорема буде узагальненням леми 1 [3] на випадок ідемпотентних радикалів.

При доведенні результату будуть використовуватися властивості радикальних класів. Нагадаємо означення радикального класу.

Клас модулів називається радикальним, якщо він замкнений стосовно гомоморфних образів, прямих сум і розширень.

Між радикальними класами і ідемпотентними радикалами існує взаємно однозначна відповідність (див. [5]). Її задають зіставлення

$$r \mapsto \mathcal{R}(r) = \{M \in {}_{\Lambda}\mathcal{M} | r(M) = M\};$$

$$\mathcal{R} \mapsto r^{\mathcal{R}} : r^{\mathcal{R}}(M) = \sum_{\alpha} \{M_\alpha \subset M | M_\alpha \in \mathcal{R}\}.$$

Нехай маємо накладання кілець $\varphi : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$. Кожний лівий модуль над Λ_2 може природно розглядатися як лівий модуль над Λ_1, а кожний Λ_2-гомоморфізм як Λ_1-гомоморфізм. Тоді можна говорити про функтор включення: $F : {}_{\Lambda_2}\mathcal{M} \to {}_{\Lambda_1}\mathcal{M}$.

Лема 2. *Якщо $\mathcal{R}_1$ – радикальний клас в ${}_{\Lambda_1}\mathcal{M}$, $\varphi : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ – накладання кілець, то $\mathcal{R}_2 = \{M \in {}_{\Lambda_2}\mathcal{M} | F(M) \in \mathcal{R}_1\}$ – радикальний клас в ${}_{\Lambda_1}\mathcal{M}$.*

Доведення.

1) Нехай $\alpha : A \to B$ – епіморфізм в ${}_{\Lambda_2}\mathcal{M}$, де $A \in \mathcal{R}_2$. Тоді за означенням функтора F маємо, що $F(\alpha) : F(A) \to F(B)$ – епіморфізм в ${}_{\Lambda_1}\mathcal{M}$, а $F(A) \in \mathcal{R}_1$, бо $A \in \mathcal{R}_2$. За означенням радикального класу маємо, що $F(B) \in \mathcal{R}_1$, тому $B \in \mathcal{R}_2$.

2) Нехай $\oplus_A M_\alpha$ – зовнішня пряма сума в ${}_{\Lambda_2}\mathcal{M}$, де $M_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha (\alpha \in A)$. Очевидно, що $F(\oplus_A M_\alpha)$ і $\oplus_A F(M_\alpha)$ – ізоморфні в ${}_{\Lambda_1}\mathcal{M}$. Оскільки $F(M_\alpha) \in \mathcal{R}_1$, тоді $\oplus_A F(M_\alpha) \in \mathcal{R}_1$ за означенням радикального класу, тому $F(\oplus_A M_\alpha) \in \mathcal{R}_1$. Це означає, що $\oplus_A M_\alpha \in \mathcal{R}_2$.

3) Нехай $A/B \in \mathcal{R}_2$, $B \in \mathcal{R}_2$, де $A, B \in {}_{\Lambda_2}\mathcal{M}$. Очевидно, що $F(A/B)$ і $F(A)/F(B)$ ізоморфні в ${}_{\Lambda_1}\mathcal{M}$. Тому $F(A)/F(B) \in \mathcal{R}_1$, але $F(B) \in \mathcal{R}_1$. За означенням радикального класу одержимо, що $F(A) \in \mathcal{R}_1$. Тому $A \in \mathcal{R}_2$. Лема доведена.

Якщо $\varphi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ – накладання кілець, $\mathcal{R}$ – радикальний клас в ${}_{\Lambda_1}\mathcal{M}$, то $\{M \in {}_{\Lambda_2}\mathcal{M} | F(M) \in \mathcal{R}\}$ будемо позначати через $\varphi(\mathcal{R})$.

Якщо r – ідемпотентний радикал в ${}_{\Lambda_1}\mathcal{M}$, а $\mathcal{R}$ – відповідний радикальний клас, то через $\varphi(r)$ будемо позначати ідемпотентний радикал в ${}_{\Lambda_2}\mathcal{M}$, який відповідає радикальному класу $\varphi(\mathcal{R})$.

Лема 3. *Нехай $\varphi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ – накладання кілець. Якщо r – розщеплюваний ідемпотентний радикал в ${}_{\Lambda_1}\mathcal{M}$, то $\varphi(r)$ – розщеплюється і $r({}_{\Lambda_1}M) = \varphi(r)({}_{\Lambda_2}M)$ для кожного $M \in {}_{\Lambda_2}\mathcal{M}$.*

Доведення. Доведемо другу частину леми. Очевидно, що для довільного $N \subset M$ правильне твердження: ${}_{\Lambda_1}N \in \mathcal{R} \Leftrightarrow {}_{\Lambda_2}N \in \varphi(\mathcal{R})$, де $\mathcal{R}$ – радикальний клас, який відповідає r. Тому з означення $r^{\mathcal{R}}$ маємо, що $r({}_{\Lambda_1}M) = \varphi(r)({}_{\Lambda_2}M)$.

Якщо r – розщеплюється, то для кожного Λ_1-модуля M існує такий підмодуль $N \subset M$, що $M = r(M) \oplus N$. Нехай M – Λ_2-модуль, тоді

$${}_{\Lambda_1}M = r({}_{\Lambda_1}M) \oplus {}_{\Lambda_1}N, \text{ де } {}_{\Lambda_1}N \subset {}_{\Lambda_1}M.$$

Оскільки множення елементів з ${}_{\Lambda_1}M$ на елементи з Λ_1 збігається з множенням елементів з ${}_{\Lambda_2}M$ на відповідні φ-образи елементів з Λ_1, то $r({}_{\Lambda_1}M)$ і ${}_{\Lambda_1}N$ можна розглядати як Λ_2-модулі, але $r({}_{\Lambda_1}M) = \varphi(r)({}_{\Lambda_2}M)$, тому ${}_{\Lambda_2}M = \varphi(r)({}_{\Lambda_2}M) \oplus {}_{\Lambda_2}N$. Лема доведена.

Теорема 3. *Нехай $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_n$ – пряма сума кілець. Ідемпотентний радикал r в категорії ${}_{\Lambda}M$ розщеплюваний тоді і тільки тоді, коли розщеплювані всі проекції $r_i = \varphi_i(r)$. Якщо задано ідемпотентні радикали r_i в ${}_{\Lambda_i}\mathcal{M}$ $(i = 1, \ldots, n)$, то існує єдиний ідемпотентний радикал r такий, що r_i – його проекції.*

Доведення. За лемою 3 маємо, що в одну сторону імплікація доведена.

Нехай всі ідемпотентні радикали r_i розщеплюються і $M \in {}_{\Lambda}M$. Позначимо через $e_i = (0, \ldots, 1_i, \ldots, 0)$ – центральні ідемпотенти кільця Λ, де 1_i – одиниця кільця Λ_i. Приймемо $M_i = e_i M$. Оскільки e_i попарно ортогональні, то M_i – підмодулі модуля M і є розклад в пряму суму

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Модуль M_i $(i = 1, \ldots, n)$ можна природно розглядати як Λ_i-модуль. Оскільки ідемпотентні радикали r_i розщеплюються, то

$$M_i = r_i(M_i) \oplus K_i.$$

Враховуючи пропозицію 1.2 [5] і лему 3, одержимо

$$r({}_{\Lambda}M) = r({}_{\Lambda}M_1) \oplus \cdots \oplus r({}_{\Lambda}M_n) = r_1({}_{\Lambda_1}M_1) \oplus \cdots \oplus r_n(\Lambda_n M_n).$$

Тому $M = r(M) \oplus (K_1 + \cdots + K_n)$. Доведемо останнє твердження теореми. Нехай r_i – ідемпотентні радикали в ${}_{\Lambda_i}M$, а $\mathcal{R}_i$ – відповідні радикальні класи. Приймемо

$$T = \{M \in {}_{\Lambda}\mathcal{M} | e_i M \in \mathcal{R}_i \text{ для всіх } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

(M_i розглядаються як Λ_i-модулі). Покажемо, що T – радикальний клас в ${}_{\Lambda}\mathcal{M}$.

Нехай $\alpha : A \to B$ – епіморфізм в ${}_\Lambda\mathcal{M}$, де $A \in T$. Розглянемо
$\alpha_i : e_iA \to e_iB$, де $\alpha_i(e_ia) = \alpha(e_ia) \qquad (a \in A)$.

Очевидно, що тоді α_i – епіморфізм в ${}_\Lambda\mathcal{M}$, бо $\alpha(e_iA) = e_i\alpha(A) = e_iB$, оскільки α – епіморфізм. Тоді α_i можна розглядати як Λ_i-епіморфізм, але $e_iA \in \mathcal{R}_i$, тому $e_iB \in \mathcal{R}_i$ за означенням радикального класу. Тому $B \in T$.

Нехай $N \subset M$ – модулі з ${}_\Lambda\mathcal{M}$ і $N \in T$, $M/N \in T$, тоді $e_iN \in \mathcal{R}_i$ і $(e_iM+N)/N \in \mathcal{R}_i$. Але за теоремою про ізоморфізм маємо, що $(e_iM + N)/N \cong e_iM/(e_iM \cap N) = e_iM/e_iN$ як Λ-модулі. Але тоді e_iM/e_iN є Λ_i-модулем, бо добуток будь-якого його елемента на e_i дорівнює тому ж елементу, це випливає з доведеного ізоморфізму. Цей Λ-ізоморфізм очевидно можна розглядати як Λ_i-ізоморфізм. Тому $e_iM/e_iN \in \mathcal{R}_i$. Тоді за означенням радикального класу $e_iM \in \mathcal{R}_i$. Це свідчить, що $M \in T$.

Аналогічно доводиться замкненість класу T стосовно прямих сум. Отже, T – радикальний клас. Нехай t – відповідний ідемпотентний радикал. Тоді зрозуміло, що $\varphi_i(t) = r_i$, де $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Нехай r – ідемпотентний радикал, для якого $\varphi_i(r) = r_i$, де $i \in \{1, \ldots, n\}$. Доведемо, що $r = t$. Нехай $\mathcal{R}$ – відповідний для r радикальний клас. Нехай $M \in T$, тоді $e_iM \in \mathcal{R}_i$ за означенням T. За визначенням r маємо, що $e_iM \in \mathcal{R}$. Тому $M = e_1M \oplus \cdots \oplus e_nM \in \mathcal{R}$ за означенням радикального класу. Нехай тепер $M \in \mathcal{R}$. Тоді за властивістю напередрадикалів маємо, що $M = r(M) = r(e_1M) \oplus \cdots \oplus r(e_nM)$. З цього випливає, що $e_iM \in \mathcal{R} \qquad (i = 1, \ldots, n)$. Тоді за означенням $\mathcal{R}_i$ маємо, що $e_iM \in \mathcal{R}_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$. А це свідчить про те, що $M \in T$. Отже, $T = \mathcal{R}$. Теорема доведена.

Введемо позначення
$\mathcal{R}(r) = \{M \in {}_\Lambda\mathcal{M} | r(M) = M\}$,
$\mathcal{P}(r) = \{M \in {}_\Lambda\mathcal{M} | r(M) = 0\}$.
Правильна така теорема.

Теорема 4. *Нехай A – локальне досконале зліва і справа кільце і $B = A_n$. Тоді над B для всіх напередрадикалів r виконується $\mathcal{R}(r) = \{0\}$ або $\mathcal{P}(r) = \{0\}$.*

Доведення. Оскільки над A всі прості модулі ізоморфні і B Моріта-еквівалентне A, то над B також всі прості модулі ізоморфні. Нехай K – простий B-модуль. Тоді $K \in \mathcal{R}(r)$ або $K \in \mathcal{P}(r)$.

Нехай $K \in \mathcal{R}(r)$, N – довільний модуль з $\mathcal{P}(r)$, тоді за пропозицією 1.3 [5] $\mathrm{Hom}_B(K, N) = 0$. Тому $\mathrm{Soc}N = 0$, оскільки над B всі прості модулі ізоморфні. Оскільки B досконале справа, то воно напівартінове зліва (див. [6]). Тому $N = 0$. Це означає, що $\mathcal{P}(r) = \{0\}$.

Якщо $K \in \mathcal{P}(r)$, то, взявши довільний $N \in \mathcal{R}(r)$, одержимо $\mathrm{Hom}_B(N, K) = 0$ (пропозиція 1.3 [5]), тобто $\mathrm{Rad}N = N$.

Проте над досконалим зліва кільцем ненульові модулі мають максимальні підмодулі, тому $N = 0$. Це означає, що $\mathcal{R}(r) = \{0\}$.

Наслідок 2. *Якщо A – локальне досконале зліва і справа кільце, то над A_n всі ідемпотентні радикали тривіальні.*

Наслідок 3. *Такі умови еквівалентні, а саме:*
1) в категорії ${}_\Lambda\mathcal{M}$ всі скрути тривіальні і в категорії $\mathcal{M}_\Lambda$ всі скрути тривіальні;
2) в категоріях ${}_\Lambda\mathcal{M}$ і $\mathcal{M}_\Lambda$ всі ідемпотентні радикали тривіальні;

3) $\Lambda \cong A_n$, *де* $A (n \in \mathbb{N})$ – *локальне досконале зліва і справа кільце;*

4) *в категоріях* ${}_\Lambda\mathcal{M}$ *і* $\mathcal{M}_\Lambda$ *для кожного напередрадикалу* r *правильне* $\mathcal{P}(r) = \{0\}$ *або* $\mathcal{R}(r) = \{0\}$.

Доведення. Цей результат випливає з теореми 4 і з праці [8] (теорема 1).

---

1. *Горбачук Е.Л.* Расщепляемость кручения и предкручения в категории правых Λ-модулей// Мат. заметки. – 1967. – Т.2.– N 6. – С.681–688.
2. *Горбачук Е.Л.* Радикалы в модулях над разными кольцами // Мат. исследов. – 1972. – VII: I(23). – С.44–59.
3. *Горбачук Е.Л.* Коммутативные кольца, над которыми все кручения расщепляемы // Мат. исследов. – 1972. – VII: 2(24). – С.81–90.
4. *Мишина А.П., Скорняков Л.А.* Абелевы группы и модули. – М., 1969.
5. *Кашу А.И.* Радикалы и кручения в модулях. – Кишинев, 1983.
6. *Stenstrom B.* Rings of quotients. – Berlin, Springer-Verlag, 1975.
7. *Viola-Prioli Io.E.* When is every kernel functor idemtotent? // Can. J. Math. – 1975.– Vol 27. – N 3. – P.545–554.
8. *Dlab V.* On a class of perfect rings // Can. J. Math. – 1970. – Vol. XXII. – N 4. – P.822–826.

Gorbachuk O., Maturin Yu.

SPLITTING PRERADICALS

The rings over which the certain preradicals split is considered. The direct sum of the rings over which every torsion theory splits is investigated.

Стаття надійшла до редколегії 23.04.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 48–50 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 48–50*

УДК 517.98

Юрій Джала

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОДНОГО УНІТАРНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай $\mathbb{S}^{n-1}$ – одинична сфера в $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}, n > 2)$, μ – міра Лебега на $\mathbb{S}^{n-1}$ і $G \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{S}^{n-1}, \mu)$. Позначимо через U оператор, який діє з простору $H \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{R}^n)$ в простір $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{R}_+, G)$ $(\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} (0, \infty))$ згідно з формулою

$$(Uf(t)) \stackrel{\text{def}}{=} t^{(n-1)/2} f(t\omega), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{1}$$

Оскільки $dx = t^{n-1} dt d\omega$, де $dx, d\omega, dt$ – відповідні елементи об'єму, то

$$||Uf||^2_{\mathcal{H}} = \int\limits_{\mathbb{R}_+} ||Uf(t)||^2_G dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} t^{n-1} |f(t\omega)|^2 d\mu dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = ||f||^2_H.$$

Очевидно також, що $\operatorname{Im} U = \mathcal{H}$. Отже, U – унітарний. Оператор U виникає під час вивчення спектральних властивостей диференціальних операторів, які є збуреннями самоспряженого оператора Лапласа в просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$. Зокрема, важливо знати як оператор U діє на гладкі функції. В праці [1] була доведена така теорема.

Теорема 1. *Нехай $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$, $s > 0$. Тоді оператор U неперервно відображає простір Соболєва $H^s(\mathbb{R}^n)$ в простір Соболєва $H^s(\mathbb{R}_+, G)$.*

Ми доводимо, що справджується теорема 2.

Теорема 2. *Нехай $n = 2m > 2, m \in \mathbb{N}, 0 < r < s \leqslant 1$. Тоді оператор U неперервно відображає $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^r(\mathbb{R}_+, G)$.*

Для доведення теореми 2 нам треба такий результат, який є частковим випадком теореми вкладення для просторів Соболєва [2, с.188].

Теорема S. *Нехай $n \geqslant 3$, $1 < s < n/2$ і $q = 2n/(n - 2s)$. Тоді простір $H^s(\mathbb{R}^n)$ неперервно вкладений у простір $L_q(\mathbb{R}^n)$, тобто існує стала A_s така, що для всіх $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$*

$$||f||_{L_q} \leqslant A_s ||f||_{H^s}. \tag{2}$$

Використовуючи теорему S, доведемо, що правильна лема 1.

Лема 1. *Нехай $n \geqslant 3$ і $s > 1$. Тоді існує стала C_s така, що для всіх $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2} |f(x)|^2 dx \leqslant C_s^2 ||f||^2_{H^s}, \tag{3}$$

де $|\cdot|$ *– евклідова норма в* $\mathbb{R}^n$.

Доведення. Очевидно, що лему досить довести для $s \in (1, n/2)$. Приймемо $q = 2n/(n-2s), p = q/2$ і $p' = n/2s$. Нехай $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Тоді

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2}|f(x)|^2 dx \leqslant ||f||_H^2 + \int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-2}|f(x)|^2 dx. \tag{4}$$

Оцінимо інтеграл у лівій частині (3) за допомогою нерівності Юнга, враховуючи, що $1/p + 1/p' = 1$. Маємо

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-2}|f(x)|^2 dx \leqslant \left(\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-2p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2p} dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-n/s} dx\right)^{1/p'} ||f||_{L_q}^2. \tag{5}$$

Звідси, беручи до уваги (2) і те, що

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-n/s} dx = \mu(\mathbb{S}^{n-1}) \int\limits_0^1 t^{(n-1-n/s)} dt = \mu(\mathbb{S}^{n-1}) s/n(s-1),$$

одержуємо нерівність

$$\int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^{-2}|f(x)|^2 dx \leqslant A_s^2 \left(\frac{s}{n(s-1)}\right)^{1/p'} ||f||_{H^s}^2,$$

з якої, враховуючи (4), одержуємо правильність твердження леми. Лему доведено.

Доведення теореми 2. Нехай $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, що $Uf \in C^\infty(\mathbb{R}_+, G)$. За допомогою безпосередніх обчислень визначаємо, що правильна рівність

$$(Uf)' = U\varphi + U\psi, \tag{6}$$

де $\varphi, \psi \in H$ і

$$\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n-1}{2} \frac{f(x)}{|x|}, \qquad \psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\nabla f(x) | \frac{x}{|x|}\right)_{\mathbb{R}^n}, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Тут ∇f – градієнт функції f, $(\cdot \mid \cdot)$ – скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$. З леми 1 випливає, що

$$||\varphi||_H \leqslant \frac{n-1}{2} C_l ||f||_{H^l}, \qquad l > 1. \tag{7}$$

Крім того,

$$||\psi||_H \leqslant ||\nabla f||_{L_2} \leqslant ||f||_{H^1} \leqslant ||f||_{H^l}, \qquad l > 1. \tag{8}$$

Зі співвідношень (6)–(8), враховуючи унітарність оператора U, маємо, що для довільних $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ і $l > 1$

$$||(Uf)'|| \leqslant \left(1 + \frac{n-1}{2} C_l\right) ||f||_{H^l}. \tag{9}$$

Оскільки множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ є всюди щільна в $H^s(\mathbb{R}^n)$, то з (9) випливає, що оператор U неперервно відображає $H^1(\mathbb{R}^n)$ в $H^l(\mathbb{R}_+, G)$. Тоді згідно з інтерполяційною теоремою [3,с.41] оператор U неперервно відображає інтерполяційний простір $(H^l(\mathbb{R}^n), H)_\theta$ в інтерполяційний простір $(H^1(\mathbb{R}_+, G), \mathcal{H})_\theta$. Приймаючи $\theta = r, l = s/r$, де $0 < r < s \leqslant 1$, одержуємо твердження теореми.

---

1. *Микитюк Я.В.* Про властивості одного унітарного оператора// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1986. – Вип. 25. – С.41-42.
2. *Трибель X.* Теория функциональных пространств. – М., 1986.
3 *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М., 1971.

Djala Yu.

ON PROPERTIES OF SOME UNITARY OPERATOR

Let $\mathbb{S}^{n-1}$ be the unit sphere in $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N}, n > 2)$, μ the Lebesque measure on $\mathbb{S}^{n-1}$ and $G \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{S}^{n-1}, \mu)$. Properties of the operator U acting from the space $H \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{R}^n)$ into the space $\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} L_2(\mathbb{R}_+, G)$ $\quad (\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} (0, \infty))$ by the formula

$$(Uf(t)) \stackrel{\text{def}}{=} t^{(n-1)/2} f(t\omega), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \omega \in \mathbb{S}^{n-1},$$

are investigated. It is shown that the operator U continuously maps the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^n)$ into $H^r(\mathbb{R}_+, G)$, $0 < r < s \leqslant 1$.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 51–63*
VISNYK LVIV UNIV. *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 51–63*

УДК 539.3

Петро Доманський

РІВНЯННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ІЗ МАТЕРІАЛУ МУРНАГАНА

1. Вихідні співвідношення. Розглянемо ізотропне пружне тіло K. Розрізняємо три конфігурації цього тіла: γ_0, γ_τ і γ_τ^*. Першу з них називаємо відліковою, а дві інші – актуальними. Відлікову γ_0-конфігурацію вважають природною (недеформованою), коли в тілі нема напружень та деформацій. Актуальну γ_τ-конфігурацію назвемо базовою (незбуреною). Вона виникла внаслідок дії на тіло K з моменту часу $\tau = \tau_0$ масових і поверхневих сил. Другу актуальну γ_τ^*-конфігурацію, яка відповідає збуренню початкових умов у γ_τ-конфігурації, будемо називати збуреною. Місце точки $k \in K$ в γ_0, γ_τ, γ_τ^*-конфігураціях визначаємо радіус-векторами $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $\vec{r} = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0$, $\vec{r}_* = \vec{r}_*(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tau) = \vec{r}_0 + \vec{u}_*$ відповідно, де $\vec{u}_0$, $\vec{u}_*$ – вектори переміщень із γ_0 в γ_τ і γ_τ^*-конфігурації; $\{\xi^i\}$ – лагранжеві координати, за які приймаємо координати місця точки $k \in K$ у відліковій конфігурації в єдиній для всіх конфігурацій нерухомій у просторі прямокутній декартовій системі координат, $\vec{r}_0 = \xi^1 \vec{\ni}_1^{\,0} + \xi^2 \vec{\ni}_2^{\,0} + \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0} \equiv \xi^k \vec{\ni}_k^{\,0}$. Напружений стан γ_τ і γ_τ^*-конфігурацій визначаємо тензорами напружень Піоли-Кірхгофа $\hat{P}_0 = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r})$ і $\hat{P}_* = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*)$, де $\hat{P}_0$ – тензорна функція, яка характеризує зв'язок між тензором напружень і градієнтом місця; $\vec{\nabla}_0 = \vec{\ni}_0^{\,i} \frac{\partial}{\partial \xi^i}$ – набла-оператор Гамільтона в γ_0-конфігурації; $\{\vec{\ni}_0^{\,i}\}$ – база, біортогональна до бази $\{\vec{\ni}_i^{\,0}\}$; "$\otimes$" – операція тензорного (зовнішнього) добутку. Приймаємо, що $\vec{u}_* = \vec{u}_0 + \vec{u}$, $\hat{P}_* = \hat{P}_0 + \hat{P}$. Величини $\hat{P}$ і $\vec{u}$ назвемо збуренням (варіацією) тензора напружень Піоли-Кірхгофа і вектора переміщення в γ_τ-конфігурації відповідно.

Надалі приймемо, що у формулах, де відбувається підсумовування за індексами, які повторюються зверху і знизу, індекси α, β, γ змінюються від 1 до 2, а всі інші – від 1 до 3.

Нехай у γ_0 - конфігурації тіло K є циліндричним сталого поперечного перерізу D, два характерні розміри якого є значно менші від висоти. Положення точок осі тіла будемо характеризувати радіусом-вектором $\vec{r}_{30} = \xi^3 \vec{\ni}_3^{\,0}$, де ξ^3 - осьова координата $(0 \leqslant \xi^3 \leqslant b)$, $\vec{\ni}_3^{\,0}$ - базисний орт у напрямі цієї осі. Положення довільної точки визначаємо радіусом-вектором

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \qquad \vec{R}_0 = \vec{R}_0(\xi^1, \xi^2) = \xi^\alpha \vec{\ni}_\alpha^{\,0}, \qquad (\xi^1, \xi^2) \in D.$$

Збурення вектора переміщення $\vec{u} = \vec{u}(\vec{R}_0 + \vec{r}_{30}, \tau)$ подамо у вигляді розвинення за заданою базою тензорних функцій $\{\hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0)\}$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\Phi}^{(i-1)}(\vec{R}_0) \overset{i-1}{\cdot} \hat{u}^{(i)}(\vec{r}_{30};\tau). \tag{1}$$

Тут індекси "$(i-1)$" та "(i) свідчать про ранг тензорних функцій, "$\overset{i}{\cdot}$" означає i-кратний внутрішній добуток тензорів. Як випливає з формули Тейлора для відображення одного нормованого простору в інший, за базу можна вибрати, зокрема, систему тензорних функцій $\{\vec{R}_0^n\}$, де $\vec{R}_0^n$ – n-кратний зовнішній добуток вектора $\vec{R}_0$ на себе.

У праці [1] показано, що за наближеного одновимірного формулювання задачі рівняння стійкості руху циліндричного тіла можна записати у вигляді

$$\int\limits_D \left(\vec{\ni}_3^0 \cdot \frac{\partial \hat{P}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} - \delta^{\alpha\beta} \vec{\ni}_\beta^0 \cdot \hat{P} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} - \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \right) d\Sigma_0 + \hat{F}^{(i)} = 0, \tag{2}$$

де

$$\hat{F}^{(i)} = \int\limits_D \rho_0 \left(\vec{f}_* - \vec{f} \right) \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} d\Sigma_0 + \int\limits_{\Gamma_0} \vec{n}_{12} \cdot \hat{P} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} dl_0;$$

$\vec{f}$ – вектор масових сил; $\vec{f}_*$ – його значення в γ_τ^*-конфігурації; Γ_0 – межа області D; $\vec{n}_{12}$ – вектор зовнішньої нормалі до бічної поверхні циліндричного тіла в γ_0-конфігурації; $\delta^{\alpha\beta}$ – символи Кронекера.

Мета запропонованої праці – побудувати в локальній формі і проаналізувати рівняння стійкості руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана.

2. Рівняння стійкості руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана. Густину потенціальної енергії деформації для матеріалу Мурнагана задає функція інваріантів міри деформації Коші-Гріна $\hat{G} = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}^T$ [2]:

$$U_0 = \frac{1}{4} \left[\left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2} l + \frac{n}{2} \right) I_1(\hat{G}) + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu - 3l - 2m) I_1^2(\hat{G}) + \right.$$
$$\left. + \left(-2\mu + 3m - \frac{n}{2} \right) I_2(\hat{G}) - m I_1(\hat{G}) I_2(\hat{G}) + \frac{1}{6}(l + 2m) I_1^3(\hat{G}) + \frac{n}{2} \left(I_3(\hat{G}) - 1 \right) \right].$$

Тут λ, μ - сталі Ляме; l, m, n - сталі Мурнагана; індексом "T" позначено операцію транспонування.

Якщо взяти похідну від функції U_0 за градієнтом місця $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}$, то одержимо тензор напружень Піоли-Кірхгофа для матеріалу Мурнагана

$$\hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = \frac{1}{4} \left\{ \left[-n + 2(2\lambda - n) I_1(\hat{C}) - 8m I_2(\hat{C}) + 4l I_1^2(\hat{C}) \right] \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} + 2 \left[4\mu + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \, n + 4m I_1(\hat{C}) \right] \hat{C} \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r} + n \left[1 + 2I_1(\hat{C}) + 4I_2(\hat{C}) + 8I_3(\hat{C}) \right] \vec{\nabla} \otimes \vec{r}_0^T \right\}, \tag{3}$$

де $\hat{C} = \left(\hat{G} - \hat{I} \right)/2$ – тензор деформації Коші-Гріна; $\hat{I}$ – одиничний тензор; $\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона в γ_τ-конфігурації.

Обмежимося випадком, коли у формулі (3) зберігаються члени до другого порядку включно стосовно $\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0$, тобто приймаємо, що

$$\hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = \left(\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \right) \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \frac{1}{2} \left[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T + \right.$$

$$+ (n-2m+2l)(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0)^2 + (2m-n)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\Big] \hat{I} + \tag{4}$$
$$+(2m-n)\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) + n\varepsilon^2(\vec{u}_0) + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0,$$

де $\hat{T}(\vec{u}_0) = \lambda \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{I} + 2\mu\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)$, $\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = (\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T)/2$ – тензор напружень Коші і тензор деформації лінійної теорії пружності.

Знайдемо збурення тензора напружень Піоли-Кірхгофа, яке визначається формулою (4):

$$\hat{P}(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}, \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0) = \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}_*) - \hat{P}_0(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{r}) = \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot \hat{T}(\vec{u}) +$$
$$+ \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot \hat{T}(\vec{u}_0) + \Big[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T + (n-2m)\Big(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} -$$
$$- \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u})\Big) + 2l \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}\Big] \hat{I} + (2m-n)\Big[\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\Big] +$$
$$+ \mu\Big(\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0\Big) + \tag{5}$$
$$+ n\left(\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) \cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u}) + \hat{\varepsilon}(\vec{u}) \cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0)\right) + \Big(\hat{I} + \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}\Big) \cdot \hat{T}(\vec{u}) + \frac{1}{2}\Big[\lambda \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T +$$
$$+ (n-2m+2l)(\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u})^2 + (2m-n)\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u} \cdot\cdot \hat{\varepsilon}(\vec{u})\Big] \hat{I} + (2m-n)\vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u} \hat{\varepsilon}(\vec{u}) +$$
$$+ n\varepsilon^2(\vec{u}) + \mu \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}^T \cdot \vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}.$$

Введемо позначення

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 = a^{ij} \vec{\ni}_i^0 \otimes \vec{\ni}_j^0,\ \hat{T}(\vec{u}_0) = \sigma^{ij} \vec{\ni}_i^0 \otimes \vec{\ni}_j^0,\ \hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = \varepsilon^{ij} \vec{\ni}_i^0 \otimes \vec{\ni}_j^0,\ \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 = a. \tag{6}$$

Якщо підставити (1), (6) у вираз (5) для збурення тензора напружень $\hat{P}$ і домножити одержаний результат зліва на вектор $\vec{\ni}_j^0$, то після перетворень одержимо вектори $\vec{P}_j = \vec{\ni}_j^0 \cdot \hat{P}$:

$$\vec{P}_j = \sum_{r=1}^{N}\left(\hat{A}_{j1}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \hat{u}^{(r)} + \hat{A}_{j2}^{(r+1)} \overset{r}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3}\right) + \sum_{r,k=1}^{N}\left(\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)} +\right.$$
$$+ \hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{B}_{j3}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} +$$
$$\left.+ \hat{B}_{j4}^{(k+r+1)} \overset{r+k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3}\right). \tag{7}$$

Тут

$$\hat{A}_{j1}^{(r+1)} = \hat{C}_j^\alpha \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha},\ \ \hat{A}_{j2}^{(r+1)} = \hat{C}_j^3 \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)};\ \ \hat{C}_j^i = (\lambda + a(n-2m+$$
$$+2l))\vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_0^i + \left(\delta_j^i\left(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\right) + \delta_{sj}\left(2\mu + \frac{n}{2}\right)\varepsilon^{si}\right)\hat{I} +$$
$$+\left(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\right)\vec{\ni}_0^i \otimes \vec{\ni}_j^0 + \delta_{sj}(\lambda + 2m - n)a^{sk}\vec{\ni}_k^0 \otimes \vec{\ni}_0^i +$$
$$+\delta_{sj}\left(\mu a^{sk} + \frac{n}{2}\varepsilon^{sk}\right)\vec{\ni}_0^i \otimes \vec{\ni}_k^0 + \delta_j^i\left(\sigma^{ks} + \frac{n}{2}\varepsilon^{ks}\right)\vec{\ni}_s^0 \otimes \vec{\ni}_k^0 +$$
$$+\left(\lambda a^{is} + (2m-n)\varepsilon^{is}\right)\vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_s^0 + \left(\mu a^{is} + \frac{n}{2}\varepsilon^{is}\right)\vec{\ni}_s^0 \otimes \vec{\ni}_j^0,$$

$$\hat{B}_{j1}^{(k+r+1)} = \left\{ \left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \hat{I} + \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_0^\alpha + \frac{n}{4}\vec{\ni}_0^\alpha \otimes \vec{\ni}_j^0 \right] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \right.$$
$$+ \left[\left(\frac{n}{2} - m + l\right)\vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right)\delta_j^\beta \hat{I} + \left(m - \frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^\beta \otimes \vec{\ni}_j^0 \right] \otimes$$
$$\otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha + \left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \vec{\ni}_0^\beta + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\beta}\vec{\ni}_j^0 \right] \otimes \vec{\ni}_0^s \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes$$
$$\left. \otimes \vec{\ni}_s^0 + \left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\beta}\hat{I} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_j^0 \right\} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha},$$

$$\hat{B}_{j2}^{(k+r+1)} = \left\{ \left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \hat{I} + \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_0^\alpha + \frac{n}{4}\vec{\ni}_0^\alpha \otimes \vec{\ni}_j^0 \right] \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^3 + \right.$$
$$+ \left[\left(\frac{n}{2} - m + l\right)\vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right)\delta_j^3 \hat{I} + \left(m - \frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_j^0 \right] \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes$$
$$\left. \otimes \vec{\ni}_0^\alpha + \left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^\alpha \vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_0^s \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_s^0 \right\} \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha},$$

$$\hat{B}_{j3}^{(k+r+1)} = \left\{ \left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^3 \hat{I} + \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \frac{n}{4}\vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_j^0 \right] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \right.$$
$$+ \left[\left(\frac{n}{2} - m + l\right)\vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \left(\lambda + m - \frac{n}{2}\right)\delta_j^\beta \hat{I} + \left(m - \frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_0^\beta \otimes \vec{\ni}_j^0 \right] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes$$
$$\left. \otimes \vec{\ni}_0^3 + \left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^3 \vec{\ni}_0^\beta \otimes \vec{\ni}_0^s \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^0 \right\} \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)},$$

$$\hat{B}_{j4}^{(k+r+1)} = \left\{ \left[\left(\lambda + \mu + m - \frac{n}{4}\right)\delta_j^3 \hat{I} + \left(l - \frac{m}{2} + \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0 \otimes \vec{\ni}_0^3 + \left(m - \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_0^3 \otimes \vec{\ni}_j^0 \right] \otimes \right.$$
$$\otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_0^3 + \left[\left(\mu + \frac{n}{4}\right)\delta_j^3 \vec{\ni}_0^3 + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_j^0 \right] \otimes \vec{\ni}_0^s \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_s^0 +$$
$$\left. + \left(\mu + \frac{n}{4}\right)\hat{I} \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} \otimes \vec{\ni}_j^0 \right\} \otimes \hat{\Phi}^{(r-1)}.$$

Якщо внести вирази (7) для векторів $\vec{P}_j$ у систему рівнянь стійкості руху (2), згрупувати подібні члени та виконати інтегрування по області D, то одержимо систему диференціальних рівнянь стійкості руху циліндричного тіла з матеріалу Мурнагана в локальній формі:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\hat{A}_1^{(i+k)} \overset{k}{\cdot} \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial \xi^3)^2} + \hat{A}_2^{(i+k)} \overset{k}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \hat{A}_3^{(i+k)} \overset{k}{\cdot} \hat{u}^{(k)} \right) + \sum_{k,r=1}^{N} \left[\hat{B}_1^{(i+k+r)} \overset{k+r}{\cdot} \times \right.$$
$$\times \left(\frac{\partial^2 \hat{u}^{(r)}}{(\partial \xi^3)^2} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial \xi^3)^2} \right) + \hat{B}_2^{(i+k+r)} \overset{k+r}{\cdot} \frac{\partial^2 \hat{u}^{(r)}}{(\partial \xi^3)^2} \otimes \hat{u}^{(k)} +$$
$$+ \hat{B}_3^{(i+k+r)} \overset{k+r}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial \xi^3)^2} + \hat{B}_4^{(i+k+r)} \overset{k+r}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} +$$
$$+ \hat{B}_5^{(i+k+r)} \overset{k+r}{\cdot} \frac{\partial \hat{u}^{(r)}}{\partial \xi^3} \otimes \hat{u}^{(k)} + \hat{B}_6^{(i+k+r)} \overset{k+r}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \frac{\partial \hat{u}^{(k)}}{\partial \xi^3} + \qquad (8)$$

$$+\hat{B}_7^{(i+k+r)} \overset{k+r}{\cdot} \hat{u}^{(r)} \otimes \hat{u}^{(k)}\Big] + \hat{F}^{(i)} = \rho_0 \sum_{k=1}^{N} \hat{M}^{(i+k)} \overset{k}{\cdot} \frac{\partial^2 \hat{u}^{(k)}}{(\partial\tau)^2}, \quad (i = \overline{1,N}),$$

де

$$\hat{A}_1^{(i+k)} = \int_D \vec{\ni}_0^{\,t} \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Bigg\{ \Bigg[\delta_t^3 \left(\lambda + \mu + a\left(\frac{n}{2} - m + 2l\right)\right) + \delta_{tj}\left(\frac{n}{2}\varepsilon^{3j} + \Big(\lambda +$$

$$+\mu + 2m - n\Big)a^{3j}\right)\Bigg] \vec{\ni}_3^{\,0} + \left[\delta_t^3\left((\lambda+\mu)a^{3j} + \left(2m - \frac{n}{2}\right)\varepsilon^{3j}\right) + \delta_{ts}\left(\sigma^{js} + \frac{n}{2}\varepsilon^{js}\right)\right] \times$$

$$\times \vec{\ni}_j^{\,0} + \left[\mu + \frac{a(2m-n)}{2} + \left(2\mu + \frac{n}{2}\right)\varepsilon^{33}\right]\vec{\ni}_t^{\,0}\Bigg\} \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0, \quad \hat{A}_2^{(i+k)} =$$

$$= \int_D \vec{\ni}_0^{\,t} \otimes \Bigg\{ \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Bigg[\Bigg(\delta_t^3 \left(\frac{n}{2} - m + 2l\right)\frac{\partial a}{\partial \xi^3} + \delta_{ts}\left(\frac{n}{2}\frac{\partial \varepsilon^{3s}}{\partial \xi^3} + \Big(\lambda +$$

$$+\mu + 2m - n\Big)\frac{\partial a^{3s}}{\partial \xi^3}\right)\Bigg)\vec{\ni}_3^{\,0} + \left(\delta_t^3\left((\lambda+\mu)\frac{\partial a^{3s}}{\partial \xi^3} + \left(2m - \frac{n}{2}\right)\frac{\partial \varepsilon^{3s}}{\partial \xi^3}\right) + \delta_{tj}\left(\frac{\partial \sigma^{sj}}{\partial \xi^3} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n}{2}\frac{\partial \varepsilon^{sj}}{\partial \xi^3}\right)\right)\vec{\ni}_s^{\,0} + \left(\frac{2m-n}{2}\frac{\partial a}{\partial \xi^3} + \left(2\mu + \frac{n}{2}\right)\frac{\partial \varepsilon^{33}}{\partial \xi^3}\right)\vec{\ni}_t^{\,0}\Bigg] \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} + \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes$$

$$\otimes \Bigg[\left(\delta_t^3\Big(\lambda + a(n - 2m + 2l)\Big) + \delta_{ts}(\lambda + 2m - n)a^{3s}\right)\vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \Bigg(\delta_t^\alpha\left(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\right) +$$

$$+\delta_{ts}\left(\mu a^{\alpha s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{\alpha s}\right)\Bigg)\vec{\ni}_3^{\,0} + \left(2\mu + \frac{n}{2}\right)\varepsilon^{3\alpha}\vec{\ni}_t^{\,0} + \Bigg(\delta_t^\alpha\left(\mu a^{3s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{3s}\right) + \delta_t^3\Big(\lambda a^{\alpha s} +$$

$$+(2m-n)\varepsilon^{\alpha s}\Big)\Bigg)\vec{\ni}_s^{\,0}\Bigg] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \Bigg[\Big(\delta_t^\alpha(\lambda + a(n - 2m + 2l)) +$$

$$+\delta_{ts}\Big(\lambda + 2m - n\Big)a^{\alpha s}\Big)\vec{\ni}_3^{\,0} + \left(2\mu + \frac{n}{2}\right)\varepsilon^{\alpha 3}\vec{\ni}_t^{\,0} + \Bigg(\delta_t^3\left(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\right) +$$

$$+\delta_{ts}\left(\mu a^{3s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{3s}\right)\Bigg)\vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \left(\delta_t^3\left(\mu a^{\alpha s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{\alpha s}\right) + \delta_t^\alpha\Big(\lambda a^{3s} + (2m-n)\varepsilon^{3s}\Big)\right)\vec{\ni}_s^{\,0}\Bigg] \otimes$$

$$\otimes \hat{\Phi}^{(k-1)}\Bigg\} d\Sigma_0, \tag{9}$$

$$\hat{A}_3^{(i+k)} = \int_D \vec{\ni}_0^{\,t} \otimes \Bigg\{ \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \Bigg[\left(\delta_t^3(n - 2m + 2l)\frac{\partial a}{\partial \xi^3} + \delta_{ts}(\lambda + 2m - n)\frac{\partial a^{3s}}{\partial \xi^3}\right)\vec{\ni}_0^{\,\alpha} +$$

$$+\left(\delta_t^\alpha \frac{2m-n}{2}\frac{\partial a}{\partial \xi^3} + \delta_{ts}\left(\mu\frac{\partial a^{\alpha s}}{\partial \xi^3} + \frac{n}{2}\frac{\partial \varepsilon^{\alpha s}}{\partial \xi^3}\right)\right)\vec{\ni}_3^{\,0} + \left(2\mu + \frac{n}{2}\right)\frac{\partial \varepsilon^{3\alpha}}{\partial \xi^3}\vec{\ni}_t^{\,0} +$$

$$+\left(\delta_t^\alpha\left(\mu\frac{\partial a^{3s}}{\partial \xi^3} + \frac{n}{2}\frac{\partial \varepsilon^{3s}}{\partial \xi^3}\right) + \delta_t^3\left(\lambda\frac{\partial a^{\alpha s}}{\partial \xi^3} + (2m-n)\frac{\partial \varepsilon^{\alpha s}}{\partial \xi^3}\right)\right)\vec{\ni}_s^{\,0}\Bigg] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\alpha} -$$

$$-\frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\alpha} \otimes \Bigg[\left(\delta_t^\alpha\Big(\lambda + a(n - 2m + 2l)\Big) + \delta_{st}(\lambda + 2m - n)a^{\alpha s}\right)\vec{\ni}_0^{\,\beta} +$$

$$+\left(\delta_t^\beta\left(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\right) + \delta_{st}\left(\mu a^{\beta s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{\beta s}\right)\right)\vec{\ni}_0^{\,\alpha} + \Bigg(\delta^{\alpha\beta}\left(\mu + \frac{a(2m-n)}{2}\right) +$$

$$+\left(2\mu + \frac{n}{2}\right)\varepsilon^{\alpha\beta}\Bigg)\vec{\ni}_t^{\,0} + \left(\delta_t^\beta\left(\mu a^{\alpha s} + \frac{n}{2}\varepsilon^{\alpha s}\right) + \delta_t^\alpha\Big(\lambda a^{\beta s} + (2m-n)\varepsilon^{\beta s}\Big)\right)\vec{\ni}_s^{\,0} +$$

$$+\delta^{\alpha\beta}\delta_{ts}\left(\sigma^{js}+\frac{n}{2}\varepsilon^{js}\right)\vec{\ni}_j^0\Bigg]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\Bigg\}d\Sigma_0;$$

$$\hat{B}_1^{(i+k+r)}=\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\Bigg[\left((\lambda+2\mu+m)\vec{\ni}_t^0+\left(l+\frac{m}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^3\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3+$$
$$+\left(\frac{\lambda}{2}+\mu+\frac{m}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0\Bigg]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_2^{(i+k+r)}=\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\Bigg[\left(\frac{m}{2}\delta_t^3\vec{\ni}_0^3+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_t^0\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\vec{\ni}_0^\alpha+$$
$$+\left(\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha+\left(m-\frac{n}{2}\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3\right)\otimes$$
$$\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\vec{\ni}_0^3+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^s\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\vec{\ni}_s^0\Bigg]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_3^{(i+k+r)}=\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\hat{\Phi}^{(i-1)}\otimes\Bigg[\left(l\delta_t^3\vec{\ni}_0^3+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\vec{\ni}_t^0\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^\alpha+$$
$$+\left(\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha+\frac{n}{4}\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3\Bigg]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}d\Sigma_0,\quad\hat{B}_4^{(i+k+r)}=$$
$$=\hat{B}_2^{(i+k+r)}+\hat{B}_3^{(i+k+r)}-\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\Bigg[\left(\left(\left(\frac{n}{4}-\frac{m}{2}+l\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3+\right.\right.$$
$$\left.+\left(m-\frac{n}{4}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3+\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0+$$
$$+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\vec{\ni}_t^0\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^\alpha\Bigg]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,\quad\hat{B}_5^{(i+k+r)}=\hat{B}_8^{(i+k+r)}-$$
$$-\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\alpha}\otimes\Bigg[\left(\left(\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^\beta+\left(\lambda+m-\frac{n}{2}\right)\delta^{\alpha\beta}\vec{\ni}_t^0+\right.\right.$$
$$\left.+\left(m-\frac{n}{2}\right)\delta_t^\beta\vec{\ni}_0^\alpha\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_0^3+\tag{10}$$
$$+\left(\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^3+\frac{n}{4}\delta_t^3\vec{\ni}_0^\alpha\right)\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial\xi^\beta}\otimes\vec{\ni}_0^\beta\Bigg]\otimes\hat{\Phi}^{(r-1)}d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_6^{(i+k+r)}=\hat{B}_8^{(i+k+r)}-\int\limits_D\vec{\ni}_0^t\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial\xi^\gamma}\otimes\Bigg[\left(\left(\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\gamma}\vec{\ni}_t^0+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{4}\right)\delta_t^\gamma\vec{\ni}_0^\alpha+\frac{n}{4}\delta_t^\alpha\vec{\ni}_0^\gamma\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^3+$$
$$+\left(\left(\frac{n}{2}-m+l\right)\delta_t^\gamma\vec{\ni}_0^3+\left(m-\frac{n}{2}\right)\delta_t^3\vec{\ni}_0^\gamma\right)\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_0^\alpha+$$
$$+\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\delta^{\alpha\gamma}\delta_t^3\vec{\ni}_0^s\otimes\hat{\Phi}^{(k-1)}\otimes\vec{\ni}_s^0\Bigg]\otimes\frac{\partial\hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial\xi^\alpha}d\Sigma_0,$$

$$\hat{B}_7^{(i+k+r)} = -\int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(i-1)}}{\partial \xi^\gamma} \otimes \left[\vec{\ni}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \left(\left(\mu + \frac{n}{4} \right) \times \right.\right.$$

$$\times \left(\delta^{\alpha\gamma} \vec{\ni}_0^\beta + \delta^{\alpha\beta} \vec{\ni}_0^\gamma \right) + \left(\lambda + m - \frac{n}{2} \right) \delta^{\beta\gamma} \vec{\ni}_0^\alpha \Big) + \left(\left(\frac{n}{2} - m + l \right) \delta_t^\gamma \vec{\ni}_0^\beta + \right.$$

$$+ \left(m - \frac{n}{2} \right) \delta_t^\beta \vec{\ni}_0^\gamma \Big) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha + \left(\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta_t^\gamma \vec{\ni}_0^\alpha + \right.$$

$$+ \frac{n}{4} \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^\gamma \Big) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \left(\left(\mu + \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\gamma} \delta_t^\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\beta} \delta_t^\gamma \right) \vec{\ni}_0^s \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^0 \Big] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0, \quad \hat{B}_8^{(i+k+r)} =$$

$$= \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \left[\left(\left(\frac{n}{2} - m + l \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\beta + \left(m - \frac{n}{2} \right) \delta_t^\beta \vec{\ni}_0^3 \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\alpha + \right.$$

$$+ \left(\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta_t^3 \vec{\ni}_0^\alpha + \frac{n}{4} \delta_t^\alpha \vec{\ni}_0^3 \right) \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^\beta + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{m}{2} - \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\beta} \delta_t^3 \vec{\ni}_0^s \otimes$$

$$\left. \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_s^0 + \left(\mu + \frac{n}{4} \right) \delta^{\alpha\beta} \vec{\ni}_t^0 \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(k-1)}}{\partial \xi^\beta} \otimes \vec{\ni}_0^3 \right] \otimes \frac{\partial \hat{\Phi}^{(r-1)}}{\partial \xi^\alpha} d\Sigma_0,$$

$$\hat{M}^{(i+k)} = \int_D \vec{\ni}_0^t \otimes \hat{\Phi}^{(i-1)} \otimes \vec{\ni}_t^0 \otimes \hat{\Phi}^{(k-1)} d\Sigma_0.$$

Із системи рівнянь (8), як частковий випадок, можна одержати систему рівнянь стійкості руху циліндричного тіла зі стандартного матеріалу другого порядку [3]. Для цього достатньо у формулах (9), (10) прийняти $l = m = n = 0$. Лінеаризована система рівнянь стійкості руху випливає з (8) при $B_j^{(i+k+r)} = 0 \quad (j = \overline{1,8})$.

3. Рівняння стійкості руху циліндричного тіла зі стандартного матеріалу другого порядку при складному навантаженні. Нехай циліндричне тіло перебуває під дією стаціонарних поверхневих сил, які характеризуються вектором поверхневих зусиль

$$\vec{P}_{03} = \begin{cases} \left(\mu N_1 \xi^1 - \dfrac{N_0}{S} \right) \vec{\ni}_3^0 - \mu N_2 \left(\xi^2 \vec{\ni}_1^0 - \xi^1 \vec{\ni}_2^0 \right) & \text{при} \quad \xi^3 = b, \\ \left(\dfrac{N_0}{S} - \mu N_1 \xi^1 \right) \vec{\ni}_3^0 + \mu N_2 \left(\xi^2 \vec{\ni}_1^0 - \xi^1 \vec{\ni}_2^0 \right) & \text{при} \quad \xi^3 = 0, \end{cases}$$

де N_0 - інтенсивність рівномірно розподілених по поперечних перерізах $\xi^3 = 0, b$ осьових стискальних зусиль; N_1, N_2 - кути згину та закручування, віднесені до одиниці довжини; S - площа області D. За базовий приймаємо розв'язок відповідної задачі, сформульованої в рамках статичної лінійної теорії пружності [2,4]

$$u_0 = \left[\nu Q \xi^1 - M \left(\nu \left(\left(\xi^1\right)^2 - \left(\xi^2\right)^2 \right) + \left(\xi^3\right)^2 \right) - N_2 \xi^2 \xi^3 \right] \vec{\ni}_1^0 +$$

$$+ \left(\nu Q \xi^2 - 2\nu M \xi^1 \xi^2 + N_2 \xi^1 \xi^2 \right) \vec{\ni}_2^0 + \left(2M \xi^1 \xi^3 - Q \xi^3 \right) \vec{\ni}_3^0. \tag{11}$$

Тут $Q = N_0/ES$, $M = N_1/4(1+\nu)$, $\nu = \lambda/\big(2(\lambda+\mu)\big)$ - коефіцієнт Пуассона, $E = 2\mu(1+\nu)$ - модуль пружності.

Із (11) знаходимо

$$\vec{\nabla}_0 \otimes \vec{u}_0 = \nu(Q-2M\xi^1)\vec{\ni}^{\,0}_\alpha \otimes \vec{\ni}^{\,\alpha}_0 + (2\nu M\xi^2 - N_2\xi^3)(\vec{\ni}^{\,0}_2 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_1 - \vec{\ni}^{\,0}_1 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_2) +$$
$$+ 2M\xi^3(\vec{\ni}^{\,0}_1 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_3 - \vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_1) + N_2(\xi^1\vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_2 - \xi^2\vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_1) + (2M\xi^1 - Q)\vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_3,$$
$$\hat{\varepsilon}(\vec{u}_0) = \nu(Q-2M\xi^1)\vec{\ni}^{\,0}_\alpha \otimes \vec{\ni}^{\,\alpha}_0 - \frac{N_2\xi^2}{2}(\vec{\ni}^{\,0}_1 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_3 + \vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_1) + \frac{N_2\xi^1}{2}\Big(\vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_2 + \tag{12}$$
$$+ \vec{\ni}^{\,0}_2 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_3\Big) + (2M\xi^1 - Q)\vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_3, \quad \vec{\nabla}_0 \cdot \vec{u}_0 = (1-2\nu)(2M\xi^1 - Q), \quad \hat{T}(u_0) =$$
$$= -\mu N_2\Big[\xi^2(\vec{\ni}^{\,0}_1 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_3 + \vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_1) - \xi^1(\vec{\ni}^{\,0}_2 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_3 + \vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_2)\Big] + E(2M\xi^1 - Q)\vec{\ni}^{\,0}_3 \otimes \vec{\ni}^{\,0}_3.$$

Запишемо систему рівнянь стійкості руху (8) для базових параметрів (12) у випадку, коли у розвиненні збурення вектора переміщення (1) зберігається лише два доданки. За базу розвинення вибираємо $\{\vec{R}^n_0\}$, тобто приймаємо, що $\vec{u} = \hat{u}^{(1)} + \vec{R}_0 \cdot \hat{u}^{(2)}$. Нехай $\hat{u}^{(1)} = u_k\vec{\ni}^{\,k}_0$, $\hat{u}^{(2)} = u_{\alpha k}\vec{\ni}^{\,\alpha}_0 \otimes \vec{\ni}^{\,k}_0$. Система (8) складається тепер з векторного ($i=1$) і тензорного ($i=2$) диференціальних рівнянь. Запишемо їх у координатній формі, якщо за осі координат вибрати головні центральні осі. Якщо обчислити коефіцієнти (9), (10) для базових параметрів (12), прийнявши $l = m = n = 0$, підставити їх у (8) і виконати відповідні згортки, то одержимо

$$\mu\left[(1-2Q)\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} + \big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3} - N_2\xi^3\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3}\right] - \frac{J^{22}N_2(\lambda+2\mu)}{S}\frac{\partial^2 u_{23}}{(\partial\xi^3)^2} -$$
$$-2M(\lambda+\mu)\left(\xi^3\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} - \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right) + \frac{4\mu M J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{11}}{(\partial\xi^3)^2} - 2M\xi^3\left[\lambda\frac{\partial u^\alpha_\alpha}{\partial\xi^3} + \mu\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi^3}\right] + \Pi_1 =$$
$$= \rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}, \; \mu\left[(1-2Q)\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^3)^2} + \big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3} + N_2\xi^3\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3} - 2M\xi^3\frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3}\right] +$$
$$+ \frac{J^{11}N_2(\lambda+2\mu)}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{4\mu M J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{12}}{(\partial\xi^3)^2} + \Pi_2 = \rho_0\frac{\partial^2 u_2}{\partial\tau^2},$$
$$\Big[(\lambda+2\mu)(1-2Q) - EQ\Big]\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{N_2(\lambda+2\mu)}{S}\left(J^{11}\frac{\partial^2 u_{12}}{(\partial\xi^3)^2} - J^{22}\frac{\partial^2 u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}\right) -$$
$$-2M(\lambda+\mu)\xi^3\left(\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} - \frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}\right) + \frac{2MJ^{11}(E+2(\lambda+2\mu))}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2} +$$
$$+\lambda\left[\big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u^\alpha_\alpha}{\partial\xi^3} + N_2\xi^3\left(\frac{\partial u_{12}}{\partial\xi^3} - \frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3}\right)\right] + \Pi_3 = \rho_0\frac{\partial^2 u_3}{\partial\tau^2},$$
$$\frac{\mu(1-2Q)J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{11}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{4\mu M J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} - \frac{2M(\lambda+\mu)J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2} -$$
$$-\lambda\Big(1+(\nu-1)Q\Big)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} + 2M(\lambda+\mu)\xi^3\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3} -$$
$$-\frac{2MJ^{11}}{S}\big(\mu+(2-\nu)\lambda\big)\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3} + \frac{N_2}{S}\Big(\mu J^{11} + (\lambda+2\mu)J^{22}\Big)\frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3} +$$

$$+\frac{N_2 J^{11}}{S}(\mu-\lambda)\frac{\partial u_{12}}{\partial\xi^3}-(1+2\nu Q)(\lambda u^\alpha_\alpha+2\mu u_{11})+(\lambda+\mu)\xi^3\big(N_2(u_{21}-u_{12})-$$

$$-2Mu_{13}\big)+\Pi^{11}=\rho_0\frac{J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\mu(1-2Q)J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{22}}{(\partial\xi^3)^2}-\lambda\Big(1+(\nu-1)Q\Big)\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+2M\lambda\xi^3\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}-\frac{2M}{S}\Big(\mu\nu J^{22}+$$

$$+\lambda(1-\nu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}-\frac{N_2}{S}\Big(\mu J^{22}+(\lambda+2\mu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{12}}{\partial\xi^3}+\frac{N_2 J^{22}}{S}(\lambda-\mu)\frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3}-\Big(1+$$

$$+2\nu Q\Big)(\lambda u^\alpha_\alpha+2\mu u_{22})+(\lambda+\mu)N_2\xi^3(u_{21}-u_{12})-2\lambda M\xi^3 u_{13}+\Pi^{22}=\rho_0\frac{J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{22}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\mu(1-2Q)J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{(\lambda+2\mu)N_2 J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{2M(\lambda+\mu)J^{22}\xi^3}{S}\frac{\partial^2 u_{23}}{(\partial\xi^3)^2}+\quad(13)$$

$$+\lambda N_2\xi^3\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+2\mu M\xi^3\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}-\frac{N_2}{S}\Big(\mu J^{11}+(\lambda+2\mu)J^{22}\Big)\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi^3}+\frac{N_2 J^{22}(\mu-\lambda)}{S}\frac{\partial u_{22}}{\partial\xi^3}+$$

$$+\mu N_2\xi^3 u_{21}+N_2\xi^3(\lambda u^\alpha_\alpha+\mu u_{11})-\mu(1+2\nu Q)(u_{12}+u_{21})+\Pi^{21}=\rho_0\frac{J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{21}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\mu(1-2Q)J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{12}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{(\lambda+2\mu)N_2 J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{4\mu MJ^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^3)^2}-\lambda N_2\xi^3\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+$$

$$+\frac{N_2}{S}\Big(\mu J^{22}+(\lambda+2\mu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{22}}{\partial\xi^3}+\frac{N_2 J^{11}(\lambda-\mu)}{S}\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi^3}+\frac{2M}{S}\Big(\lambda\nu J^{22}+$$

$$+\mu(1-\nu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3}-2\mu M\xi^3 u_{23}-N_2\xi^3(\lambda+\mu)u^\alpha_\alpha-\mu(1+2\nu Q)(u_{12}+u_{21})+$$

$$+\Pi^{12}=\rho_0\frac{J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{12}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{J^{11}}{S}\big((\lambda+2\mu)(1-2Q)-EQ\big)\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{2MJ^{11}}{S}\big(E+2(\lambda+2\mu)\big)\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}+$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)N_2 J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_2}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{2M(\lambda+\mu)J^{11}\xi^3}{S}\frac{\partial^2 u_{11}}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}-$$

$$-2M\xi^3\Big((\lambda+\mu)\Big(u_{11}+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\Big)+\lambda u_{22}\Big)-\mu N_2\xi^3\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}-\frac{2MJ^{11}}{S}(\nu\lambda+(2-\nu)\mu)\times$$

$$\times\frac{\partial u_{11}}{\partial\xi^3}+\frac{2M}{S}\Big(\nu\mu J^{22}+\lambda(1-\nu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{22}}{\partial\xi^3}+\frac{\mu N_2}{S}\Big(J^{11}+J^{22}\Big)\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3}-$$

$$-\mu(1-2Q)u_{13}+\Pi^{13}=\rho_0\frac{J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{J^{22}}{S}\big((\lambda+2\mu)(1-2Q)-EQ\big)\frac{\partial^2 u_{23}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{(\lambda+2\mu)N_2 J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{2M(\lambda+\mu)J^{22}\xi^3}{S}\times$$

$$\times\frac{\partial^2 u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\big(1+(\nu-1)Q\big)\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}+\mu N_2\xi^3\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}+\frac{2MJ^{22}}{S}\big(\lambda(\nu-1)-\mu(1+\nu)\big)\frac{\partial u_{21}}{\partial\xi^3}-$$

$$-\frac{\mu N_2}{S}\Big(J^{11}+J^{22}\Big)\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}-\frac{2M}{S}\Big(\nu\lambda J^{22}+\mu(1-\nu)J^{11}\Big)\frac{\partial u_{12}}{\partial\xi^3}-$$

$$-2\mu M\xi^3 u_{12} - \mu(1-2Q)u_{23} + \Pi^{23} = \rho_0 \frac{J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{23}}{\partial\tau^2}.$$

Тут

$$\Pi_\alpha = (\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{S}\left(\frac{\partial^2 u_{\beta 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^2 u_{\beta\alpha}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3}\right)\right] + \mu\left[u_{\alpha 3}\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial\xi^3)^2}\left(u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}}{\partial\xi^3}\right) + u_{\beta\alpha}\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}}{\partial\xi^3} + u_{\beta 3}\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}}{\partial\xi^3}\right] +$$
$$+ \lambda\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi^3}\right) + \frac{F_\alpha}{S} \quad (\alpha = 1,2),$$

$$\Pi_3 = (\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial^2 u_\alpha}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3} + u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}\frac{\partial u_{\beta 3}}{\partial\xi^3} + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\frac{\partial^2 u_{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3} + \right.$$
$$\left. + 3\left(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3} + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\frac{\partial^2 u_{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u_{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\right)\right] + \mu\left(u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}\frac{\partial^2 u_\beta}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\beta\cdot}_{\cdot 3}}{\partial\xi^3}\right) +$$
$$+ \lambda\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2} + u^{\beta\alpha}\frac{\partial u_{\beta\alpha}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\right) + \frac{F_3}{S},$$

$$\Pi^{\alpha\alpha} = \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^\alpha}{(\partial\xi^3)^2}\right) + \mu\left(u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2} + u^{\alpha s}\frac{\partial^2 u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha s}}{\partial\xi^3}\right) +$$
$$\left. + \lambda\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u^{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha\alpha}}{\partial\xi^3}\right)\right] - \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{S}\left(\frac{\lambda}{2}\frac{\partial u_{\beta s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot s}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} + \right.$$
$$\left. + \mu\left(\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\right)^2\right) - \mu\left(u^{\alpha 3}\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3} + u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}\left(u^{\alpha\beta} + u^{\beta\alpha}\right) + u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}u^{\alpha s} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}\right)^2\right) - \frac{\lambda}{2}\left(u_{\gamma s}u^{\gamma s} + \frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^s}{\partial\xi^3} + 2u^{\alpha\alpha}\left(u^\gamma_\gamma + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)\right) + \frac{F_{\alpha\alpha}}{S},$$

$$\Pi^{\alpha\gamma} = \frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial^2 u^{\alpha 3}}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{\partial u^{\alpha 3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2 u^\gamma}{(\partial\xi^3)^2}\right) + \mu\left(u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}\frac{\partial^2 u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2} + u^{\gamma s}\frac{\partial^2 u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3} + \frac{\partial u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\gamma s}}{\partial\xi^3}\right) +$$
$$\left. + \lambda\left(u^\beta_\beta\frac{\partial^2 u^{\alpha\gamma}}{(\partial\xi^3)^2} + \frac{\partial u^\beta_\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha\gamma}}{\partial\xi^3}\right)\right] -$$
$$-\mu\left(u^{\alpha 3}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3} + u^{\alpha\beta}u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot} + u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}u^{\beta\gamma} + u^{\alpha\cdot}_{\cdot s}u^{\gamma s} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^\gamma}{\partial\xi^3} + \sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{S}\frac{\partial u^{\cdot\alpha}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial\xi^3}\right) -$$

$$-\lambda\left(u_\beta^\beta+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)u^{\alpha\gamma}+\frac{F_{\gamma\alpha}}{S}\quad(\alpha\neq\gamma),$$

$$\Pi^{\alpha3}=\frac{J^{\alpha\alpha}}{S}\Bigg[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2u_s}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha s}}{\partial\xi^3}+\frac{\partial u_s}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2u^{\alpha s}}{(\partial\xi^3)^2}+2\left(\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}\frac{\partial u^{\alpha3}}{\partial\xi^3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\frac{\partial^2u^{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}\right)\right)+\mu\left(u_{\beta3}\frac{\partial^2u^{\alpha\beta}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u^{\alpha\beta}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_{\beta3}}{\partial\xi^3}\right)+\lambda\left(u_\beta^\beta\frac{\partial^2u^{\alpha3}}{(\partial\xi^3)^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial u_\beta^\beta}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\alpha3}}{\partial\xi^3}\right)\right]-\mu\Bigg[u_{\cdot s}^{\alpha\cdot}\frac{\partial u^s}{\partial\xi^3}+u_{\beta3}\left(u^{\alpha\beta}+u^{\beta\alpha}\right)+\frac{\partial u^\alpha}{\partial\xi^3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{2}\frac{J^{\beta\beta}}{S}\frac{\partial u^{\beta3}}{\partial\xi^3}\frac{\partial u^{\beta\alpha}}{\partial\xi^3}\Bigg]-\lambda\left(u^{\alpha3}\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}+u_\beta^\beta u^{\alpha3}\right)+F_{3\alpha},$$

$$F_{kn}=\vec{\ni}_n^{\,0}\otimes\vec{\ni}_k^{\,0}\cdot\cdot\hat{F}^{(2)},\quad F_k=\vec{\ni}_k^{\,0}\cdot\hat{F}^{(1)},\quad u_{\alpha k}=u_{\alpha\cdot}^{\cdot k}=u_{\cdot k}^{\alpha\cdot}=u^{\alpha k},$$

$$J^{\alpha\alpha}=\int\limits_D\left(\xi^\alpha\right)^2d\Sigma_0\quad-$$

моменти інерції області D стосовно осей координат.

Якщо в системі рівнянь (13) знехтувати нелінійними членами, то одержимо лінеаризовані рівняння стійкості руху циліндричного тіла при великих (скінченних) початкових деформаціях.

4. Лінеаризовані рівняння стійкості руху при малих початкових деформаціях. Розглянемо в прийнятому наближенні лінеаризовану систему рівнянь стійкості руху при малих початкових деформаціях у випадку "мертвих" масових сил і "мертвого" поверхневого навантаження бічної поверхні. Такі рівняння одержимо з рівнянь (8), якщо в останніх знехтуємо нелінійними членами, приймемо $F_k=0$, $F_{k\alpha}=0(k=\overline{1,3};\alpha=\overline{1,2})$, а у формулах (9) – $\varepsilon^{ij}=0$, $a^{ij}=0$, $a=0$. У результаті після підрахунків

$$\mu\left(\frac{\partial^2u_1}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}\right)-\frac{\mu N_2J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_{23}}{(\partial\xi^3)^2}=\rho_0\frac{\partial^2u_1}{\partial\tau^2},$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2u_2}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{23}}{\partial\xi^3}\right)+\frac{\mu N_2J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}=\rho_0\frac{\partial^2u_2}{\partial\tau^2},$$

$$(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\mu N_2}{S}\left(J^{11}\frac{\partial^2u_{12}}{(\partial\xi^3)^2}-J^{22}\frac{\partial^2u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}\right)+$$

$$+\frac{2MEJ^{11}}{S}\frac{\partial^2u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}+\lambda\frac{\partial u_\alpha^\alpha}{\partial\xi^3}=\rho_0\frac{\partial^2u_3}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{\mu J^{\alpha\alpha}}{S}\frac{\partial^2u_{\alpha\alpha}}{(\partial\xi^3)^2}-\lambda\left(u_\beta^\beta+\frac{\partial u_3}{\partial\xi^3}\right)-2\mu u_{\alpha\alpha}=\frac{\rho_0J^{\alpha\alpha}}{S}\frac{\partial^2u_{\alpha\alpha}}{\partial\tau^2},\quad(\alpha=\overline{1,2})$$

$$\frac{\mu J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_{21}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{\mu N_2J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\left(u_{12}+u_{21}\right)=\frac{\rho_0J^{22}}{S}\frac{\partial^2u_{21}}{\partial\tau^2},\tag{14}$$

$$\frac{\mu J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_{12}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\mu N_2J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\left(u_{12}+u_{21}\right)=\frac{\rho_0J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_{12}}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{J^{11}}{S}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^2u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\mu N_2J^{11}}{S}\frac{\partial^2u_2}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{2MEJ^{11}}{S}\frac{\partial^2u_3}{(\partial\xi^3)^2}-$$

$$-\mu\left(u_{13}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\right)+EQu_{13}=\frac{\rho_0 J^{11}}{S}\frac{\partial^2 u_{13}}{\partial\tau^2},$$
$$\frac{J^{22}}{S}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^2 u_{23}}{(\partial\xi^3)^2}-\frac{\mu N_2 J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}-$$
$$-\mu\left(u_{23}+\frac{\partial u_2}{\partial\xi^3}\right)+EQu_{23}=\frac{\rho_0 J^{22}}{S}\frac{\partial^2 u_{23}}{\partial\tau^2}.$$

Проведемо короткий аналіз системи рівнянь (14) у випадку, коли $N_2=0$ і $M=0$, тобто циліндричне тіло перебуває тільки під дією осьового стискання. Два перші і два останні рівняння цієї системи описують поперечні коливання у двох головних площинах. Розглянемо такі коливання в площині, яка характеризується індексом 1. Знехтуємо інерцією обертання, тобто проаналізуємо систему

$$\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}\right)=\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2},$$
$$\frac{J^{11}}{S}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^2 u_{13}}{(\partial\xi^3)^2}-\mu\left(u_{13}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}\right)+EQu_{13}=0.$$

З цих двох рівнянь одержуємо

$$\frac{J^{11}}{S}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^3 u_{13}}{(\partial\xi^3)^3}-\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}+EQ\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}=0.$$

Приймемо $u_{13}=-\frac{\partial u_1}{\partial\xi^3}$, тобто знехтуємо і деформацією зсуву. В результаті одержуємо

$$J^{11}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+EQS\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+S\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}=0. \tag{15}$$

Якщо прийняти $\nu=0$ і знехтувати малим доданком у коефіцієнті при старшій похідній, то одержимо добре відоме рівняння [5,6]

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+S\rho_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}=0,$$

яке зазвичай використовуємо під час дослідження стійкості руху циліндричних тіл.

Враховуючи деформацію зсуву, замість (15) одержимо рівняння

$$J^{11}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+\rho_0 S\left(1-\frac{EQ}{\mu}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-$$
$$-\frac{\rho_0 J^{11}(\lambda+2\mu-EQ)}{\mu}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \tag{16}$$

У випадку, коли беруть до уваги інерцію обертання, але нехтують деформацією зсуву,одержуємо рівняння

$$J^{11}(\lambda+2\mu-EQ)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4}+N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2}+\rho_0 S\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2}-\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2}=0. \tag{17}$$

Якщо прийняти $\nu = 0$ і знехтувати малими доданками в коефіцієнтах, то рівняння (16) і (17) набудуть відповідно вигляду

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4} + N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} + \rho_0 S\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2} - 2\rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2} = 0,$$

$$EJ^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4} + N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} + \rho_0 S\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2} - \rho_0 J^{11}\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2} = 0.$$

Друге з цих рівнянь одержано в працях В. З. Власова (див. напр.[5]).

Якщо з першого рівняння системи (14) визначити $\frac{\partial u_{13}}{\partial\xi^3}$ і результат підставити в передостаннє рівняння цієї системи, то одержимо рівняння стійкості руху

$$J^{11}(\lambda + 2\mu - EQ)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^4} + N_0\frac{\partial^2 u_1}{(\partial\xi^3)^2} + \rho_0 S\left(1 - \frac{EQ}{\mu}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial\tau^2} +$$

$$+\frac{\rho_0^2 J^{11}}{\mu}\frac{\partial^4 u_1}{\partial\tau^4} - \rho_0 J^{11}\left(1 + \frac{(\lambda + 2\mu - EQ)}{\mu}\right)\frac{\partial^4 u_1}{(\partial\xi^3)^2\partial\tau^2} = 0,$$

яке враховує і деформацію зсуву, й інерцію обертання. З нього рівняння (15), (16), (17) можна одержати як часткові випадки.

---

1. *Доманський П. П.* Метод розкладу за тензорними функціями в побудові рівнянь стійкості руху пружних циліндричних тіл // Доп. НАН України. - 1997. - N6. - С. 53-59.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости.- М., 1980.
3. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах.- Л.,1986.
4. *Банах І. Я.* Побудова розв'язку задачі про напружено-деформівний стан циліндра при складному навантаженні методом розкладу за тензорними функціями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С. 114-123.
5. *Власов В. З.* Тонкостенные упругие стержни. – М., 1959.
6. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – М., 1967.

Domans'kyj P.

EQUATIONS OF STABILITY MOVEMENT OF CYLINDRICAL SOLIDS OF MURNAGAN MATERIAL

Equations of stability movement of cylindrical solids of Murnaghan material are obtained by using of decomposition of variation of trasference vector by tensor basis. Special cases of these equations under compound load are considered. Comparative analysis is done for the results obtained.

Стаття надійшла до редколегії 24.11.98

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.1999.Вип.54.С.64–74

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.1999.Vol.54.P.64–74

УДК 517.927

Юрій Жерновий

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ДВОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛІНІЙНИМ ВХОДЖЕННЯМ СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

1. Вступ. Теореми єдиності розв'язку крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, розв'язаних стосовно старшої похідної, розглянуті в працях [1, с.95-114; 2, 3]. У цій статті ми довели теореми єдиності розв'язку двоточкових крайових задач для системи двох рівнянь першого порядку

$$h(t,x,y,x') = 0, \quad f(t,x,y,y') = 0,$$

для рівнянь другого порядку $F(t,x'') = 0$, $F(t,x,x',x'') = 0$ та для системи рівнянь другого порядку $f(t,x,x',x'') = 0$, характерною особливістю яких є нелінійне входження старшої похідної. Для рівнянь другого порядку побіжно розглянуто питання про апріорні оцінки розв'язку крайових задач.

Нехай $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, $I = [a,b]$. Якщо $x(t)$, $t \in I$, є неперервна функція, яка має k неперервних похідних, то писатимемо $x \in C^k(I)$, і, аналогічно, $x \in AC^k(I)$, коли k-а похідна абсолютно неперервна. Якщо функція $f(t, x_1, \ldots, x_p)$: $I \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ задовольняє умову Каратеодорі [1, с.15], то писатимемо, що $f(t, x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{Car}(I \times \mathbb{R}^p)$. Якщо матимемо справу з векторфункціями $x(t)$: $I \to \mathbb{R}^n$ або $f(t,x)$: $I \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, то для позначення введених вище класів функцій використовуватимемо відповідно символи $C_n^k(I)$, $AC_n^k(I)$ і $\mathrm{Car}_n(I \times \mathbb{R}^p)$. Там, де трапляються сумовані функції, маємо на увазі, що відповідне співвідношення виконується майже всюди. Під зростанням (спаданням) функції за яким-небудь аргументом розуміємо монотонне зростання (спадання) в строгому сенсі.

2. Апріорні оцінки і єдиність розв'язку (рівняння другого порядку). Розглянемо нелінійну крайову задачу

$$N[x] \equiv F(t,x'') = 0, \quad (t,x'') \in I \times \mathbb{R}; \tag{1}$$

$$\lambda_1[x] \equiv \varphi\big(x(a), x'(a)\big) = 0, \quad \lambda_2[x] \equiv \psi\big(x(b), x'(b)\big) = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Нехай функція $F(t,x'')$ має неперервну частинну похідну за x'' і*

$$\frac{\partial F}{\partial x''} > 0, \quad (t,x'') \in I \times \mathbb{R}, \tag{3}$$

а функції $\varphi(s_1, s_2)$, $\psi(\tau_1, \tau_2)$ мають неперервні частинні похідні за кожною змінною для всіх $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$, причому

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\right| > 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} \leqslant 0, \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2; \\ &\left|\frac{\partial\psi}{\partial \tau_1}\right| + \left|\frac{\partial\psi}{\partial \tau_2}\right| > 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial \tau_1}\frac{\partial\psi}{\partial \tau_2} \geqslant 0, \quad (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Нехай $x(t)$ – розв'язок задачі (1), (2), $z_1(t)$, $z_2(t)$ – двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють крайові умови (2). Тоді якщо $N[z_1] = \psi_1(t) \geqslant 0$, $N[z_2] = \psi_2(t) \leqslant 0$, для всіх $t \in I$, то справедливі оцінки $z_1(t) \leqslant x(t) \leqslant z_2(t)$, для всіх $t \in I$.

Доведення. Віднімаючи почленно рівності $N[z_1] = \psi_1(t)$, $\lambda_1[z_1] = 0$, $\lambda_2[z_1] = 0$ відповідно від рівностей $N[x] = 0$, $\lambda_1[x] = 0$, $\lambda_2[x] = 0$, одержимо

$$\begin{gathered} F(t, x'') - F(t, z_1'') = -\psi_1(t); \\ \varphi\big(x(a), x'(a)\big) - \varphi\big(z_1(a), z_1'(a)\big) = 0, \quad \psi\big(x(b), x'(b)\big) - \psi\big(z_1(b), z_1'(b)\big) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Оскільки функції $F(t, x'')$, $\varphi(s_1, s_2)$, $\psi(\tau_1, \tau_2)$ задовольняють умови леми Адамара [4, с.81], то знайдеться така неперервна для $t \in I$ функція $r(t)$ і сталі α_0, α_1, β_0, β_1, що

$$\begin{gathered} F(t, x'') - F(t, z_1'') = r(t)u''(t), \quad \psi\big(x(b), x'(b)\big) - \psi\big(z_1(b), z_1'(b)\big) = \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b), \\ \varphi\big(x(a), x'(a)\big) - \varphi\big(z_1(a), z_1'(a)\big) = \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a), \end{gathered} \tag{6}$$

де $u(t) = x(t) - z_1(t)$. Тоді з (5) отримаємо

$$u'' = -\frac{\psi_1(t)}{r(t)}, \quad l_1[u] \equiv \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0, \quad l_2[u] \equiv \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = 0. \tag{7}$$

З (3) випливає, що $r(t) > 0$ для всіх $t \in I$, а з (4) маємо, що

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| > 0, \quad \alpha_0\alpha_1 \leqslant 0, \quad \beta_0\beta_1 \geqslant 0. \tag{8}$$

При виконанні умов (8) функція Гріна задачі (7)

$$G(t, s) = \begin{cases} \big[\alpha_0(s-a) - \alpha_1\big]\big[\beta_0(b-t) + \beta_1\big]/P, & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b; \\ \big[\beta_0(b-s) + \beta_1\big]\big[\alpha_0(t-a) - \alpha_1\big]/P, & a \leqslant t \leqslant s \leqslant b, \end{cases}$$

де $P = \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 - \alpha_0\beta_0(b-a)$, задовольняє умову $G(t, s) \leqslant 0$ для $(t, s) \in I \times I$. Записавши розв'язок задачі (7) у вигляді

$$u(t) = -\int_a^b G(t, s)\frac{\psi_1(s)}{r(s)}ds,$$

одержимо, що $u(t) = x(t) - z_1(t) \geqslant 0$ для всіх $t \in I$. Теорема доведена.

Зауваження 1.1. Умову (3) можна замінити умовою

$$\frac{\partial F}{\partial x''} < 0, \quad (t, x'') \in I \times \mathbb{R}. \tag{9}$$

Тоді для розв'язку задачі (1), (2) одержимо оцінки $z_2(t) \leqslant x(t) \leqslant z_1(t)$.

Зауваження 1.2. У випадку лінійних крайових умов $l_1[x] = A$, $l_2[x] = B$ умови (4) мають вигляд (8).

Наслідком теореми 1 є теорема про єдиність розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 2. *Якщо виконуються умови (3) (або (9)) і (4), то крайова задача (1), (2) не може мати двох розв'язків.*

Доведення. Припустимо, що $x_1(t) \neq x_2(t)$ - два розв'язки задачі (1), (2). Приймемо $x_1(t) = z_1(t)$, з теореми 1 одержимо, що $x_1(t) \leqslant x_2(t)$. З іншого боку, прийнявши $x_2(t) = z_1(t)$, матимемо, що $x_2(t) \leqslant x_1(t)$. Отже, $x_1(t) = x_2(t)$.

Зауваження 2.1. Умова (3) (або (9)) для функції F є суттєвою. Справді, розглянемо крайову задачу

$$x'' - \alpha(t)\sin x'' = 0, \qquad l_1[x] = A, \quad l_2[x] = B, \tag{10}$$

припускаючи, що умови (8) виконуються. Якщо $\alpha(t) > 1$ для всіх $t \in I$, то умова (3) не виконується і задача (10) має не менше трьох розв'язків (вони відповідають загальним розв'язкам рівнянь)

$$x''(t) = c_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad k \geqslant 3,$$

де $c_i(t)$ - абсциси точок перетину графіків функцій $y = x$, $y = \alpha(t)\sin x$, $t \in I$). Якщо ж $0 < \alpha(t) < 1$ для всіх $t \in I$, то умова (3) виконується і задача (10) має єдиний розв'язок, який відповідає загальному розв'язку рівняння $x'' = 0$. Умова (3) виконується також, наприклад, для задачі

$$x'' + (x'')^3 = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,$$

яка має єдиний розв'язок.

Тепер розглянемо крайову задачу

$$M[x] \equiv F(t, x, x', x'') = 0, \quad (t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3; \tag{11}$$

$$\lambda_1[x] \equiv \varphi\big(x(a), x'(a)\big) = 0, \quad \nu_2[x] \equiv \psi\big(x(b)\big) = 0. \tag{12}$$

Теорема 3. *Нехай функція $F(t, x, x', x'')$ має неперервні похідні за x, x', x'', функція $\varphi(s_1, s_2)$ має неперервні похідні за s_1, s_2 для всіх $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, а функція $\psi(s)$ неперервна і має похідну для всіх $s \in \mathbb{R}$, причому*

$$\frac{\partial F}{\partial x} \leqslant M_1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x'}\right| \leqslant M_2, \quad \frac{\partial F}{\partial x''} \geqslant M_3 > 0, \quad (t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3, \tag{13}$$

і виконуються нерівності

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\right| > 0, \ \frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} \leqslant 0, \ (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2; \ \psi'(s) \neq 0, \ s \in \mathbb{R}; \\ \frac{p^2 A_0^2(s_1, s_2) M_1}{8M_3} + \frac{pA_0(s_1, s_2) M_2}{2M_3} - 1 \leqslant 0, \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2,\end{gathered} \tag{14}$$

де

$$p = b - a, \quad A_0(s_1, s_2) = \left(p\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} - 2\,\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\right) \Big/ \left(p\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\right)$$

і треба прийняти $M_1 = 0$, якщо $\partial F/\partial x < 0$ для $(t, x, x', x'') \in I \times \mathbb{R}^3$. Нехай $x(t)$ - розв'язок задачі (11), (12), $z_1(t)$, $z_2(t)$ - двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють крайові умови (12). Тоді якщо $M[z_1] = \psi_1(t) \geqslant 0$,

$M[z_2] = \psi_2(t) \leqslant 0$ для всіх $t \in I$, то справедливі оцінки $z_1(t) \leqslant x(t) \leqslant z_2(t)$, для всіх $t \in I$.

Доведення. Віднімаючи почленно рівності $M[z_1] = \psi_1(t)$, $\lambda_1[z_1] = 0$, $\nu_2[z_1] = 0$ відповідно від рівностей $M[x] = 0$, $\lambda_1[x] = 0$, $\nu_2[x] = 0$, одержимо

$$\begin{gathered} F(t, x, x', x'') - F(t, z_1, z_1', z_1'') = -\psi_1(t); \\ \varphi\big(x(a), x'(a)\big) - \varphi\big(z_1(a), z_1'(a)\big) = 0, \quad \psi\big(x(b)\big) - \psi\big(z_1(b)\big) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Прийнявши $u(t) = x(t) - z_1(t)$ і застосувавши лему Адамара та теорему про середнє, отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} &F(t, x, x', x'') - F(t, z_1, z_1', z_1'') = q(t)u + p(t)u' + r(t)u'', \\ &\psi\big(x(b)\big) - \psi\big(z_1(b)\big) = \beta_0 u(b) = 0, \end{aligned}$$

де $\beta \neq 0$, і рівність (6). Тому з (15) матимемо

$$u'' + \tilde{p}(t)u' + \tilde{q}(t)u = -\tilde{\psi}_1(t), \quad \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = u(b) = 0, \tag{16}$$

де

$$\tilde{p}(t) = p(t)/r(t), \quad \tilde{q}(t) = q(t)/r(t), \quad \tilde{\psi}_1(t) = \psi_1(t)/r(t).$$

З (13) випливає, що

$$q(t) \leqslant M_1, \quad |p(t)| \leqslant M_2, \quad r(t) \geqslant M_3 > 0, \quad t \in I,$$

а з (14) одержимо нерівності

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \;\; \alpha_0\alpha_1 \leqslant 0; \quad \frac{p^2 a_0^2 M_1}{8M_3} + \frac{p a_0 M_2}{2M_3} - 1 \leqslant 0, \tag{17}$$

де $a_0 = (p\alpha_0 - 2\alpha_1)/(p\alpha_0 - \alpha_1)$. Тому правильні оцінки

$$\tilde{q}(t) \leqslant M_1/M_3, \quad |\tilde{p}(t)| \leqslant M_2/M_3,$$

які разом з умовами (17) гарантують існування функції Гріна $G(t, s)$ задачі (16), причому $G(t, s) \leqslant 0$ для $(t, s) \in I \times I$ (див. наслідок теореми 4 і теорему 7 праці [3]). Записавши розв'язок задачі (16) у вигляді

$$u(t) = -\int_a^b G(t, s)\tilde{\psi}_1(s)\, ds,$$

одержимо, що $u(t) = x(t) - z_1(t) \geqslant 0$ для всіх $t \in I$. Теорема доведена.

Зауваження 3.1. Аналогічна теорема правильна для рівняння (11) з крайовими умовами

$$\nu_1[x] \equiv \varphi\big(x(a)\big) = 0, \quad \lambda_2[x] \equiv \psi\big(x(b), x'(b)\big) = 0.$$

З теореми 3, так само, як і з теореми 1, випливає теорема єдиності для розв'язку задачі (11), (12).

Теорема 4. *Якщо виконуються умови (13), (14), то крайова задача (11), (12) не може мати двох розв'язків.*

3. Система двох рівнянь першого порядку. Розглянемо крайову задачу

$$h(t, x, y, x') = 0, \qquad f(t, x, y, y') = 0, \tag{18}$$

$$x(a) = A, \qquad x(b) = B, \tag{19}$$

де $h,\ f \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, $A,\ B \in \mathbb{R}$. Нехай $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2 \in C^1(I)$. Введемо позначення:

$$H_x(t) = \big[h\big(t, x_1(t), y_1(t), x_1'(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_1(t), x_1'(t)\big)\big] / \big(x_1(t) - x_2(t)\big),$$
$$H_{x'}(t) = \big[h\big(t, x_2(t), y_2(t), x_1'(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_2(t), x_2'(t)\big)\big] / \big(x_1'(t) - x_2'(t)\big),$$
$$F_y(t) = \big[f\big(t, x_2(t), y_1(t), y_1'(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_2(t), y_1'(t)\big)\big] / \big(y_1(t) - y_2(t)\big),$$
$$F_{y'}(t) = \big[f\big(t, x_2(t), y_2(t), y_1'(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_2(t), y_2'(t)\big)\big] / \big(y_1'(t) - y_2'(t)\big).$$

Ці позначення мають сенс лише для тих $t \in I$, для яких $x_1(t) \neq x_2(t)$, $x_1'(t) \neq x_2'(t)$, $y_1(t) \neq y_2(t)$, $y_1'(t) \neq y_2'(t)$ відповідно і лише для таких значень t вони використовуватимуться в доведеннях.

Теорема 5. *Нехай $h(t, x, y, x')$ зростає за x і за y і спадає за x', $f(t, x, y, y')$ зростає за x, не зростає за y і спадає за y'. Тоді крайова задача (18), (19) не може мати двох розв'язків.*

Доведення. Припустимо, що задача (18), (19) має два розв'язки $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$ і $\big(x_2(t), y_2(t)\big)$, так що

$$\max_{t\in I}\big(|x_1(t) - x_2(t)| + |y_1(t) - y_2(t)|\big) > 0.$$

Тоді не може бути, що $x_1(t) = x_2(t)$ для всіх $t \in I$, оскільки завдяки зростанню функції h за y з рівнянь

$$h(t, x_1, y_1, x_1') = 0, \quad h(t, x_1, y_2, x_1') = 0$$

випливає, що $y_1(t) = y_2(t)$ для всіх $t \in I$. Розглянемо $u(t) = x_1(t) - x_2(t) \not\equiv 0$, $t \in I$. Можемо вважати, що існує точка $\tau \in I$, в якій $u(\tau) > 0$. Нехай (t_1, t_2), $t_1 < t_2$ – найбільший інтервал, що містить точку τ, в якому $u(t) > 0$. Враховуючи крайові умови (19), маємо $u(t_1) = u(t_2) = 0$.

Покажемо, що для будь-якого $t \in [t_1, t_2]$ $\quad v(t) = y_1(t) - y_2(t) \geqslant 0$. Якщо це не так, то знайдеться точка $t_0 \in (t_1, t_2)$, в якій $v(t_0) < 0$. Тоді припустимо, що існує точка $t_* \in (t_1, t_0)$ така, що $v(t_*) = 0$, $v(t) < 0$ для всіх $t \in (t_*, t_0]$. Отже, $v'(t_*) \leqslant 0$. Використовуючи друге рівняння (18), одержимо

$$0 = f\big(t_*, x_1(t_*), y_1(t_*), y_1'(t_*)\big) - f\big(t_*, x_2(t_*), y_1(t_*), y_2'(t_*)\big) > 0,$$

з врахуванням того, що f зростає за x і спадає за y'. Одержана суперечність доводить, що $v(t) < 0$ для всіх $t \in (t_1, t_0]$.

В околі точки t_0, крім тих точок, де $v'(t) = 0$, функція $v(t)$ задовольняє диференціальне рівняння першого порядку

$$v' = \tilde{a}(t) + F_{yy'}(t)\, v, \tag{20}$$

де

$$\tilde{a}(t) = a(t)\alpha_{y'}(t), \quad F_{yy'}(t) = F_y(t)\alpha_{y'}(t) \leqslant 0, \quad \alpha_{y'}(t) = -1/F_{y'}(t) > 0,$$
$$a(t) = f\big(t, x_1(t), y_1(t), y_1'(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_1(t), y_1'(t)\big) > 0.$$

Доведемо, що $v'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (t_1, t_0]$. Нехай існує точка $\tau_* \in (t_1, t_0]$ така, що $v'(\tau_*) = 0$. Оскільки $u(\tau_*) > 0$, $v(\tau_*) < 0$, то, враховуючи зростання $f(t, x, y, y')$ за x і не зростання за y, з другого рівняння (18) одержимо суперечність

$$0 = f\big(\tau_*, x_1(\tau_*), y_1(\tau_*), y_1'(\tau_*)\big) - f\big(\tau_*, x_2(\tau_*), y_2(\tau_*), y_1'(\tau_*)\big) > 0,$$

яка доводить, що $v'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (t_1, t_0]$. Інтегруючи рівняння (20), одержуємо

$$v(t) = \Big(v(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{a}(\tau)\exp\big(-B(\tau)\big)d\tau\Big)\exp\big(B(t)\big), \tag{21}$$

де

$$B(t) = \int\limits_{t_0}^{t} F_{yy'}(\tau)\,d\tau \geqslant 0, \quad t \in [t_1, t_0], \quad v(t_0) < 0, \quad \tilde{a}(\tau) > 0, \quad \tau \in (t_1, t_0].$$

З (21) при $t \to t_1$ випливає, що

$$v(t_1) \leqslant v(t_0)\exp\big(B(t_1)\big) \leqslant v(t_0) < 0.$$

Тому $v(t) < 0$ для всіх $t \in [t_1, t_0]$.

Отже, в точці $t = t_1$ маємо: $u(t_1) = 0$, $u'(t_1) \geqslant 0$ і $v(t_1) < 0$. Враховуючи монотонність h за y і x' з першого рівняння (18) отримаємо

$$0 = h\big(t_1, x_1(t_1), y_1(t_1), x_1'(t_1)\big) - h\big(t_1, x_1(t_1), y_2(t_1), x_2'(t_1)\big) < 0.$$

Одержана суперечність свідчить про помилковість припущення, що знайдеться точка $t_0 \in (t_1, t_2)$, де $v(t_0) < 0$, тому $v(t) \geqslant 0$ для всіх $t \in [t_1, t_2]$.

Далі, використовуючи перше рівняння системи (18), знаходимо, що $u(t)$ для $t \in (t_1, t_2)$, крім тих точок, де $u'(t) = 0$, задовольняє рівняння

$$u' = \tilde{a}_0(t) + H_{xx'}(t)\,u, \tag{22}$$

де

$$\tilde{a}_0(t) = a_0(t)\beta_{x'}(t), \quad H_{xx'}(t) = H_x(t)\beta_{x'}(t) > 0, \quad \beta_{x'}(t) = -1/H_{x'}(t) > 0,$$
$$a_0(t) = h\big(t, x_2(t), y_1(t), x_1'(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_2(t), x_1'(t)\big) \geqslant 0.$$

Покажемо, що $u'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$. Нехай існує точка $\tau_0 \in (t_1, t_2)$ така, що $u'(\tau_0) = 0$. Оскільки $u(\tau_0) > 0$, $v(\tau_0) \geqslant 0$, то, враховуючи зростання $h(t, x, y, x')$ за x і y, з першого рівняння (18) одержимо суперечність

$$0 = h\big(\tau_0, x_1(\tau_0), y_1(\tau_0), x_1'(\tau_0)\big) - h\big(\tau_0, x_2(\tau_0), y_2(\tau_0), x_1'(\tau_0)\big) > 0,$$

яка доводить, що $u'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$.

Інтегруючи рівняння (22) від $t = \tau_1 \in (t_1, t_2)$ до $t \in [\tau_1, t_2)$, одержимо

$$u(t) = \Big(u(\tau_1) + \int\limits_{\tau_1}^{t} \tilde{a}_0(\tau)\exp\big(-B_0(\tau)\big)d\tau\Big)\exp\big(B_0(t)\big), \quad t \in [\tau_1, t_2), \tag{23}$$

де

$$B_0(t) = \int\limits_{\tau_1}^{t} H_{xx'}(\tau)\,d\tau > 0, \quad t \in (\tau_1, t_2], \quad u(\tau_1) > 0, \quad \tilde{a}_0(\tau) \geqslant 0, \quad \tau \in [\tau_1, t_2].$$

З (23) при $t \to t_2$ матимемо

$$u(t_2) \geqslant u(\tau_1)\exp\big(B_0(t_2)\big) > u(\tau_1) > 0,$$

що суперечить умові $u(t_2) = 0$. Одержана суперечність доводить теорему 5.

Розглянемо систему

$$x' = h(t,x,y), \quad f(t,x,y,y') = 0 \tag{24}$$

з крайовими умовами (19), де $h \in \mathrm{Car}(I \times \mathbb{R}^2)$, $f \in C(I \times \mathbb{R}^3)$. Для x_1, $x_2 \in AC(I)$, y_1, $y_2 \in C^1(I)$ введемо позначення

$$H_x(t) = \big[h\big(t, x_1(t), y_1(t)\big) - h\big(t, x_2(t), y_1(t)\big)\big] / \big(x_1(t) - x_2(t)\big).$$

Теорема 6. *Нехай $h(t,x,y)$ зростає за y, $f(t,x,y,y')$ задовольняє умови теореми 5 і для будь-якого $M > 0$ існує сумовна на I функція $k(t) \geqslant 0$ така, що*

$$|H_x(t)| \leqslant k(t) \tag{25}$$

для будь-яких x_1, $x_2 \in AC(I)$, y_1, $y_2 \in C^1(I)$, $|x_i(t)| \leqslant M$, $|y_i(t)| \leqslant M$ для всіх $t \in I$
$(i = 1,2)$, причому нерівність (25) виконується майже для всіх t у кожному інтервалі з відрізка I, де $x_1(t) \not\equiv x_2(t)$. Тоді крайова задача (24), (19) не може мати двох розв'язків.

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$ і $\big(x_2(t), y_2(t)\big)$. Так само, як і в доведенні теореми 5, легко показати, що не може бути випадку, коли $x_1(t) = x_2(t)$ для всіх $t \in I$. Тому $u(t) = x_1(t) - x_2(t) \not\equiv 0$. Нехай (t_1, t_2) – найбільший інтервал, в якому $u(t) > 0$. Очевидно, що $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$ і $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Як і в доведенні теореми 5, з припущення, що $v(t_0) < 0$, де $t_0 \in (t_1, t_2)$, одержимо, що $v(t) < 0$ для всіх $t \in [t_1, t_0]$. Після цього доведення закінчується як в теоремі 1 праці [1, с.96-97].

Розглянемо систему

$$h(t,x,y,x') = 0, \quad y' = f(t,x,y) \tag{26}$$

з крайовими умовами (19), де $h \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, $f \in \mathrm{Car}(I \times \mathbb{R}^2)$. Для x_1, $x_2 \in C^1(I)$, y_1, $y_2 \in AC(I)$ введемо позначення

$$F_y(t) = \big[f\big(t, x_2(t), y_1(t)\big) - f\big(t, x_2(t), y_2(t)\big)\big] / \big(y_1(t) - y_2(t)\big).$$

Теорема 7. *Нехай $h(t,x,y,x')$ задовольняє умови теореми 5, $f(t,x,y)$ не спадає за x і для будь-якого $M > 0$ існує сумовна на I функція $k_1(t)$ така, що*

$$F_y(t) \leqslant k_1(t) \tag{27}$$

для будь-яких x_1, $x_2 \in C^1(I)$, y_1, $y_2 \in AC(I)$, $|x_i(t)| \leqslant M$, $|y_i(t)| \leqslant M$ для всіх $t \in I$ $(i = 1,2)$, причому нерівність (27) виконується в кожному інтервалі з відрізка I, де $y_1(t) \not\equiv y_2(t)$. Тоді крайова задача (26), (19) не може мати двох розв'язків.

Доведення. Починаючи доведення, як і в теоремі 5, одержимо, що (t_1, t_2) – найбільший інтервал, в якому $u(t) > 0$. Використовуючи умову (27), покажемо, як в доведенні теореми 1 праці [1, с.96-97], що $v(t) < 0$ для всіх $t \in [t_1, t_0]$. Доведення закінчується як в теоремі 5.

Зауваження 7.1. Теореми 5, 6 і 7 залишаються правильними, якщо крайові умови (19) замінити умовами

$$L_1\big(x(a), y(a)\big) = 0, \qquad L_2\big(x(a), x(b), y(a), y(b)\big) = 0,$$

де $L_1 \in C(\mathbb{R}^2)$, $L_2 \in C(\mathbb{R}^4)$, $L_1(s_1, -s_2)$ зростає за s_1 і не спадає за s_2, а $L_2(z_1, z_2, z_3, z_4)$ зростає за z_2 і не спадає за z_1, z_3, z_4. Доведення проводиться як в теоремі 3 праці [1, с.102].

4. Рівняння другого порядку як частковий випадок системи двох рівнянь першого порядку. Розглянемо крайову задачу

$$F(t, x, x', x'') = 0, \tag{28}$$

$$x(a) = \varphi\big(x'(a)\big), \quad x(b) = -\psi\big(x'(b)\big), \tag{29}$$

де $F \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, φ, $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Теорема 8. *Нехай $\varphi(s)$, $\psi(s)$ не спадають за s (зокрема, сталі), а $F(t, x, x', x'')$ зростає за x, не зростає за x' і спадає за x''. Тоді задача (28), (29) не може мати двох розв'язків.*

Ця теорема є наслідком теореми 6 і зауваження 7.1.

Зауваження 8.1. Умови монотонності для функції F при виконанні всіх інших умов теореми 8 є достатніми, але не є необхідними для єдиності розв'язку крайової задачі (28), (29). Наприклад, крайова задача (10) при $0 < \alpha(t) < 1$, $t \in I$, має єдиний розв'язок, хоча умови теореми 8 для функції $F = x'' - \alpha(t) \sin x''$ не виконуються. Те саме можна сказати і про просту лінійну задачу

$$x'' + x = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = b,$$

для якої F зростає за x і x''. Разом з тим можна навести приклади, коли при не виконанні умов теореми 8 єдиність розв'язку крайової задачі порушується. Наприклад, задача

$$x'' = (x'')^3, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B \tag{30}$$

має 3 розв'язки. Зауважимо, що для задачі (30) не виконуються також умови (3) і (9) теореми 2.

Зауваження 8.2. Інколи за допомогою теореми 8 можна дійти висновку про розв'язність нелінійної крайової задачі. Крайова задача

$$x^3 - (x'')^3 = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B,$$

для якої виконуються умови теореми 8, може мати лише єдиний розв'язок. Оскільки

$$x^3 - (x'')^3 = (x - x'')\big((x'')^2 + xx'' + x^2\big),$$

а задача

$$x - x'' = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$$

має єдиний розв'язок, то розв'язок задачі

$$(x'')^2 + xx'' + x^2 = 0, \quad x(a) = A, \quad x(b) = B$$

не існує, якщо $|A| + |B| > 0$.

Для рівняння (28) розглянемо задачу

$$x'(a) = \varphi\big(x(a)\big), \quad x'(b) = -\psi\big(x(b)\big), \tag{31}$$

де $F \in C(I \times \mathbb{R}^3)$, φ, $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Теорема 9. *Нехай функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ задовольняють умови теореми 8, а $F(t,x,x',x'')$ зростає за x і за x' і спадає за x''. Тоді задача (28), (31) не може мати двох розв'язків.*

Ця теорема є наслідком твердження, яке одержуємо з теореми 5 і зауваження 7.1, якщо в них замінити x на y і y на x.

5. Система рівнянь другого порядку. Для системи диференціальних рівнянь

$$f(t,x,x',x'')=0, \qquad t\in I, \tag{32}$$

розглянемо два випадки задання крайових умов:

$$x(a)=Ax'(a)+c, \qquad x(b)=-Bx'(b)+d; \tag{33}$$

$$x(a)=c, \qquad x(b)=d. \tag{34}$$

Тут $f\in \mathrm{Car}_n(I\times\mathbb{R}^{3n})$, $c,\,d\in\mathbb{R}^n$, A і B – додатно визначені $n\times n$ матриці.

Введемо позначення: $x_{12}(t,s)=(1-s)x_1(t)+sx_2(t)$, $x'_{12}(t,s)=(1-s)x'_1(t)+$ $+sx'_2(t)$, $x''_{12}(t,s)=(1-s)x''_1(t)+sx''_2(t)$, G^* – транспонована матриця до матриці G, G^{-1} – обернена матриця до G. Символом (x,y) будемо позначати скалярний добуток векторів $x=(x_1,\dots,x_n)$ і $y=(y_1,\dots,y_n)$: $(x,y)=x_1y_1+\dots+x_ny_n$, тоді норма вектора x дорівнює $|x|=\sqrt{(x,x)}$.

Теорема 10. *Нехай вектор-функція $f(t,x,x',x'')$ така, що елементи якобіанів*

$$F(t,x,x',x'')=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad G(t,x,x',x'')=\frac{\partial f}{\partial x'}, \quad H(t,x,x',x'')=\frac{\partial f}{\partial x''}$$

задовольняють умову Каратеодорі на $I\times\mathbb{R}^{3n}$. Нехай

$$H_2(t)=\left(-\int_0^1 H\big(t,x_{12}(t,s),x'_{12}(t,s),x''_{12}(t,s)\big)\,ds\right)^{-1}.$$

Припустимо, що матриця $H_2(t)\big(4F-GG^*H_2^*(t)\big)$, де аргументами функцій F, G і G^* є t, $x_{12}(t,s)$, $x'_{12}(t,s)$, $x''_{12}(t,s)\big)$, – невід'ємно визначена майже для всіх $t\in I$ і будь-яких $x_1(t)$, $x_2(t)\in AC^1_n(I)$. Тоді задача (32), (33), так само, як і задача (32), (34), може мати не більше одного розв'язку.

Доведення. Припустимо, що існують два різних розв'язки x_1 і x_2 якої-небудь із задач (32), (33) або (32), (34). Згідно з лемою Адамара, їхня різниця $u(t)=x_2(t)-x_1(t)$ задовольняє на I рівняння

$$F_1(t)u+G_1(t)u'+H_1(t)u''=0, \tag{35}$$

де

$$F_1(t)=\int_0^1 F\,ds, \quad G_1(t)=\int_0^1 G\,ds, \quad H_1(t)=\int_0^1 H\,ds,$$

а аргумент в F, G і H дорівнює $\big(t,x_{12}(t,s),x'_{12}(t,s),x''_{12}(t,s)\big)$.

Рівняння (35) запишемо у вигляді

$$u''=F_2(t)u+G_2(t)u',$$

де

$$F_2(t)=\big(-H_1(t)\big)^{-1}F_1(t), \quad G_2(t)=\big(-H_1(t)\big)^{-1}G_1(t).$$

Оскільки
$$G_2^* = \big(H_2(t)G_1(t)\big)^* = G_1^*(t)H_2^*(t) = \int_0^1 G^*\, dsH_2^*(t),$$
то на підставі нерівності Коші-Буняковського для будь-якого сталого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ і майже для всіх $t \in I$ одержуємо
$$\big|G_2^*(t)v\big|^2 = \Big|\int_0^1 G^*\, dsH_2^*(t)v\Big|^2 \leqslant \int_0^1 \big|G^*H_2^*(t)v\big|^2\, ds.$$

Доведемо, що
$$\big(u(t), \big(4F_2(t) - G_2(t)G_2^*(t)\big)u(t)\big) \geqslant 0. \tag{36}$$

Справді,
$$\big(u(t), \big(4F_2(t) - G_2(t)G_2^*(t)\big)u(t)\big) = \big(u(t), 4F_2(t)u(t)\big) - \big|G_2^*(t)u(t)\big|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \big(u(t), 4F_2(t)u(t)\big) - \int_0^1 \big|G^*H_2^*(t)u(t)\big|^2\, ds = \big(u(t), 4H_2(t)\int_0^1 F\, dsu(t)\big) -$$
$$- \int_0^1 \big(H_2^*(t)u(t), GG^*H_2^*(t)u(t)\big)\, ds = \int_0^1 \big(u(t), H_2(t)\big(4F - GG^*H_2^*(t)\big)u(t)\big)\, ds \geqslant 0.$$

Розглянемо функцію $r(t) = \dfrac{1}{2}\big(u(t), u(t)\big)$. Тоді $\quad r'(t) = \big(u(t), u'(t)\big)$,
$$r''(t) = \big(u(t), u''(t)\big) + \big|u'(t)\big|^2 = \big(F_2(t)u, u\big) + \big(G_2(t)u', u\big) + |u'|^2 =$$
$$= \Big|u' + \frac{1}{2}G_2^*(t)u\Big|^2 + \Big(u, \big(F_2(t) - \frac{1}{4}G_2(t)G_2^*(t)\big)u\Big) \geqslant$$
$$\geqslant \Big(u, \big(F_2(t) - \frac{1}{4}G_2(t)G_2^*(t)\big)u\Big) \geqslant 0.$$
Остання нерівність виконується на підставі (36). Оскільки $r''(t) \geqslant 0$, $t \in I$, то функція $r(t)$ не може мати максимуму всередині $[a, b]$ і для завершення доведення достатньо повторити міркування, викладені в [1, с.113], використовуючи крайові умови $u(a) = Au'(a)$, $u(b) = -Bu'(b)$, які задовольняє функція $u(t)$ у випадку задачі (32), (33), і крайові умови $u(a) = u(b) = 0$ у випадку задачі (32), (34).

Зауваження 10.1. Нехай у крайових умовах (33) A і B – невід'ємно визначені матриці, а матриця $H_2(t)\big(4F - GG^*H_2^*(t)\big)$ – додатно визначена майже для всіх $t \in I$ і будь-яких $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t) \in AC_n^1(I)$. Тоді задача (32), (33) не може мати двох розв'язків. Доведення цього факту цілком аналогічне доведенню теореми 10.

Зауваження 10.2. Якщо $H(t, x, x', x'') = -E$, де E – одинична матриця, то з теореми 10 випливає, як частковий випадок, теорема 11 праці [1, с.112].

1. *Васильев Н.И., Клоков Ю.А.* Основы теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига, 1978.

2. *Клоков Ю.А.* Единственность решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка// Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т.8.– N 8. – С.1377-1385.

3. *Пак С.А.* Об априорной оценке решений краевых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т.3.– N 6. – С.890-897.

4. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.,1970.

Zhernovyi Yu.

ABOUT UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE TWO-POINT BOUNDARY PROBLEMS FOR THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A NONLINEAR OCCURENCE OF THE HIGHER DERIVATIVE

Conditions of uniqueness of the solution of the two-point boundary problems for the system $h(t,x,y,x')=0$, $f(t,x,y,y')=0$, the equations $F(t,x'')=0$, $F(t,x,x',x'')=0$ and the system $f(t,x,x',x'')=0$ are obtained. The question about a priori estimates of the solutions of the boundary problems is examined for the equations of the second order.

Стаття надійшла до редколегії 23.03.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 75–83

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 75–83

УДК 517.95

LECH ZARĘBA

INITIAL–BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DEGENERATED LINEAR HYPERBOLIC SYSTEM OF THE FIRST ORDER

In this paper we consider the linear degenerated hyperbolic system of the first order. For such system we assume that initial data are unbounded on the area $\Omega = (0,a)\times(0,b)$. Some conditions are obtained for the uniqueness and existence of the solution of the initial-boundary value problem. The initial and initial-boundary value problems for the first order linear hyperbolic systems were investigated by different authors [1–5].

Let $Q_T = \Omega\times(0,T)$. We shall consider in this domain the hyperbolic system of the form

$$u_{it}(x,y,t)+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)u_{jx}(x,y,t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x,y,t)u_{jy}(x,y,t)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x,y,t)u_j(x,y,t)=f_i(x,y,t)\quad i=1,...,n. \tag{1}$$

For this system we impose the following initial and boundary conditions:

$$u_i(x,y,0)=\Theta_i(x,y),\quad i=1,...,n, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\beta}u_i(x,y,t)=0, \tag{3.1}$$

$$u_i(x,0,t)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}u_j(x,b,t). \tag{3.2}$$

For the solution of problem (1) – (3) we will use eigenfunctions of the following problems:

$$(x^{\alpha}Z)'=\lambda Z;\ \lim_{x\to 0}x^{\beta}Z=0,\quad Z'(a)=0; \tag{4}$$

and

$$Z_i''=\mu Z_i;\quad Z_i(0)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}Z_j(b),\quad Z_i'(b)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}Z_j'(0). \tag{5}$$

It is easy to show that for $\beta\in(0,1/2)$, $\alpha\in(1,2)$ the eigenfunctions of problem (4) satisfy the following properties:

$$\lim_{x\to 0} xZ^2=0; \tag{4.1}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha}ZZ'=0; \tag{4.2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{\alpha+1}(Z')^2=0. \tag{4.3}$$

It is known that the eigenfunctions of problem (5) form a complete system in the space $L^2(0,b)$. For the next consideration we introduce the following system of conditions:

$$\begin{aligned}
(A):\ & \mathfrak{A}A(x,b,t) - A(x,0,t)\mathfrak{A} \leqslant 0; \quad A^t = A;\\
& (A(a,y,t)\xi,\xi) \geqslant 0 \quad \forall\xi \in R^n;\\
(B):\ & B(x,b,t) - \mathfrak{A}^t B(x,0,t)\mathfrak{A} = 0; \quad B^t = B;\\
(C):\ & \mathfrak{A}C(x,b,t) - C(x,0,t)\mathfrak{A} \leqslant 0;\\
(\mathfrak{A}):\ & \mathfrak{A}\mathfrak{A}^t = I,
\end{aligned}$$

where $\mathfrak{A}$ is the matrix with coefficients α_{ij}.

Theorem. *If conditions* $(A), (B), (C)$, $(\mathfrak{A})$ *hold,* $\beta \in (0,1/2)$, $\alpha \in (1,2)$ *and*

$$A_x, x^{-1}A, x^{-\alpha/2}A_y, B, x^{\alpha/2}B_x, B_y, C, x^{\alpha/2}C_x, C_y \in L^\infty(Q_T);$$
$$f, x^{\alpha/2}f_x \in L^2(Q_T); \quad \Theta_i, x^{\alpha/2}\Theta_{ix}, \Theta_{iy} \in L^2(\Omega)$$

and f *satisfies (3.1), (3.2),* Θ_i *satisfies (3.2), then there exists a unique one solution* $u = (u_1, \ldots, u_n)$ *of problem (1) - (3) such that* u, u_t, u_y, $x^{\alpha/2}u_x \in L^2(Q_T)$.

Proof. Let $\phi^i_m(x)$ be the eigenfunctions of problem (4) and $\psi^i_l(y)$ the eigenfunctions of problem (5). We will consider the sequence of the form

$$u^N_i(x,y,t) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \beta^N_{mli}(t)\phi^i_m(x)\psi^i_l(y),$$

where β^N_{mli}, $i = 1, \ldots, n$, $m, l = 1, \ldots, N$, are the solutions of the following Cauchy problem

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} [(u^N_{it}\phi^i_m(x)\psi^i_l(y) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{jx}\phi^i_m(x)\psi^i_l(y) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}u^N_{jy}\phi^i_m(x)\psi^i_l(y) +\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}u^N_j\phi^i_m(x)\psi^i_l(y) - f_i\phi^i_m(x)\psi^i_l(y)]dxdy = 0, \qquad (6)\\
&\qquad \beta^N_{mli}(0) = \Theta^N_{mli}; \quad \text{for } m, l = 1, ..., N,\ i = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Here

$$\Theta^N_i = \sum_{m=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \Theta^N_{mli}\phi^i_m(x)\psi^i_l(y), \ \Theta^N_i \to \Theta_i;$$
$$x^{\alpha/2}\Theta^N_{ix} \to x^{\alpha/2}\Theta_{ix}; \ \Theta^N_{iy} \to \Theta_{iy} \text{ in } L^2(\Omega).$$

Multiplying every equations of the system (6) by the functions β_{mli} respectvely, summing from $l, m = 1$ to N and integrating on Q_τ we get

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau} [(u^N_t, u^N) + (Au^N_x, u^N) +\\
&+ (Bu^N_y, u^N) + (Cu^N, u^N) - (f, u^N)]dxdydt = 0 \text{ for } \tau \in (0,T].
\end{aligned}$$

Taking into account assumptions of the theorem we obtain

$$I_1 = \int\limits_{Q_\tau} (u_t^N, u^N)dxdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{tau}} |u^N|^2 - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |\Theta^N|^2 dxdy$$

$$I_2 = \int\limits_{Q_\tau} (Au_x^N, u^N)dxdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} (Au^N, u^N)_x dxdydt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} (A_x u^N, u^N)dxdydt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^b\int\limits_0^\tau (Au^N, u^N)|_{x=a} dydt - \frac{1}{2}\int\limits_0^b\int\limits_0^\tau (Au^N, u^N)|_{x=0} dydt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} (A_x u^N, u^N)dxdydt \geqslant -\frac{a_1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dxdydt$$

where a_1 depends on coefficients of the matrix A. Going on we get

$$I_3 = \int\limits_{Q_\tau} (Bu_y^N, u^N)dxdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} (Bu^N, u^N)_y dxdydt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} (B_y u^N, u^N)dxdydt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^\tau (B(x,b,t)u^N, u^N)dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^\tau (B(x,0,t)u^N, u^N)dxdt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} (B_y u^N, u^N)dxdydt - \frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^\tau [(B(x,b,t)u^N, u^N) -$$

$$- (B(x,0,t)\mathfrak{A}u^N, \mathfrak{A}u^N)]dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} (B_y u^N, u^N)dxdydt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^\tau [(B(x,b,t)u^N, u^N) - (\mathfrak{A}^t B(x,0,t)\mathfrak{A}u^N, u^N)]dxdt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau} (B_y u^N, u^N)dxdydt \geqslant -\frac{b_1}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dxdydt,$$

where b_1 depends on coefficients of the matrix B.

From the conditions of the theorem we obtain

$$I_4 = \int\limits_{Q_\tau} (Cu^N, u^N)dxdydt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dxdydt,$$

$$I_5 = \int\limits_{Q_\tau} (f, u^N)dxdydt \leqslant \frac{1}{2\delta_0}\int\limits_{Q_\tau} |f|^2 dxdydt + \frac{\delta_0}{2}\int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dxdydt$$

for $\delta_0 > 0$. From the above estimates of integrals $I_1, \ldots, I_5$ the inequality follows

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^2 + \int\limits_{Q_\tau} M|u^N|^2 dxdydt \leqslant \frac{1}{\delta_0}\int\limits_{Q_\tau} |f|^2 dxdydt + \int\limits_{\Omega_0} |\Theta^N|^2 dxdy,$$

where $M = 2c_0 - a_1 - b_1 - \delta_0$. From here using the Gronoull-Bellman inequality we obtain

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u^N|^2 dxdy \leqslant \mu_1(\tau). \tag{7}$$

Now using (4), (6) it is easy to get the following equality

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_\tau} [(u_t^N, (x^\alpha u_x^N)_x) + (Au_x^N, (x^\alpha u_x^N)_x) + (Bu_y^N, (x^\alpha u_x^N)_x) + \\ + (Cu^N, (x^\alpha u_x^N)_x) - (f, (x^\alpha u_x^N)_x)] dxdydt = 0, \quad \tau \in (0, T].\end{gathered} \tag{8}$$

Hence using assumptions of the theorem we shall have

$$\begin{aligned}I_6 &= \int\limits_{Q_\tau} (u_t^N, (x^\alpha u_x^N)_x) dxdydt = \int\limits_{Q_\tau} (u_t^N, x^\alpha u_x^N)_x dxdydt - \int\limits_{Q_\tau} (u_{tx}^N, x^\alpha u_x^N) dxdydt = \\ &= \int\limits_0^\tau \int\limits_0^b (u_t^N, x^\alpha u_x^N)|_{x=a} dydt - \int\limits_0^\tau \int\limits_0^b (u_t^N, x^\alpha u_x^N)|_{x=0} dydt - \\ &- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} (x^{\alpha/2} u_x^N, x^{\alpha/2} u_x^N)_t dxdydt = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} x^\alpha |u_x^N|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} x^\alpha |\Theta_x^N|^2 dxdt;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_7 &= \int\limits_{Q_\tau} (Au_x^N, (x^\alpha u_x^N)_x) dxdydt = \int\limits_{Q_\tau} ((Ax^{-\alpha})(x^\alpha u_x^N), (x^\alpha u_x^N)_x)) dxdydt = \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} ((Ax^{-\alpha}) x^\alpha u_x^N, x^\alpha u_x^N)_x) dxdydt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} ((Ax^{-\alpha})_x x^\alpha u_x^N, x^\alpha u_x^N)) dxdydt = \\ &= -\frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} ((A_x - \alpha A x^{-1}) u_x^N, x^\alpha u_x^N) dxdydt \geqslant \frac{a_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} |x^\alpha u_x^N|^2 dxdydt,\end{aligned}$$

where a_2 depends on coefficients of the matrix A_x

$$\begin{aligned}I_8 &= \int\limits_{Q_\tau} (Bu_y^N, (x^\alpha u_x^N)_x) dxdydt = \int\limits_{Q_\tau} (Bu_y^N, x^\alpha u_x^N)_x dxdydt - \\ &- \int\limits_{Q_\tau} (B_x u_y^N, x^\alpha u_x^N) dxdydt - \int\limits_{Q_\tau} (Bu_{xy}^N, x^\alpha u_x^N) dxdydt - \\ &- \int\limits_{Q_\tau} (B_x u_y^N, x^\alpha u_x^N) dxdydt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} (Bu_x^N, x^\alpha u_x^N)_y dxdydt + \\ &+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} (B_y u_x^N, x^\alpha u_x^N) dxdydt = I_8^1 + I_8^2 + I_8^3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_8^1 &= \int\limits_{Q_\tau} (B_x u_y^N, x^\alpha u_x^N) dxdydt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \|B_x\| x^{\alpha/2} |u_y^N| |x^{\alpha/2} u_x^N| dxdydt \leqslant \\ &\leqslant \frac{b_2}{2} \int\limits_{Q_\tau} (|u_y^N|^2 + x^\alpha |u_x^N|^2) dxdydt,\end{aligned}$$

where b_2 depends on coefficients of the matrix B_x;

$$
\begin{aligned}
I_8^2 = &-\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^\tau [(B(x,b,t)u_x^N(x,b,t), u_x^N(x,b,t))- \\
&-(B(x,0,t)u_x^N(x,0,t), u_x^N(x,0,t))]x^\alpha dxdt = \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^\tau [(B(x,b,t)u_x^N(x,b,t), u_x^N(x,b,t))- \\
&-(B(x,0,t)\mathfrak{A}u_x^N(x,b,t), \mathfrak{A}u_x^N(x,b,t))]x^\alpha dxdt \leqslant 0; \\
I_8^3 = &\frac{1}{2}\int_{Q_\tau}(B_y u_x^N, x^\alpha u_x^N)dxdydt \leqslant b_3\int_{Q_\tau} x^\alpha |u_x^N|^2 dxdydt,
\end{aligned}
$$

where b_3 depends on coefficients of the matrix B_y;

$$
\begin{aligned}
I_9 = &\int_{Q_\tau}(Cu^N, (x^\alpha u_x^N)_x)dxdydt = \int_{Q_\tau}(Cu^N, x^\alpha u_x^N)_x dxdydt - \int_{Q_\tau}(C_x u^N, x^\alpha u_x^N)dxdydt- \\
&-\int_{Q_\tau}(Cu_x^N, x^\alpha u_x^N)dxdydt = I_9^1 + I_9^2 + I_9^3; \quad I_9^1 = 0; \\
I_9^2 = &\int_{Q_\tau}(C_x u^N, x^\alpha u_x^N)dxdydt \leqslant \int_{Q_\tau}\|C_x\| x^{\alpha/2}|u^N||x^{\alpha/2}u_x^N|dxdydt \leqslant \\
&\leqslant \frac{c_2}{2\delta_1}\int_{Q_\tau}(|u^N|^2 dxdydt + \frac{\delta_1}{2}\int_{Q_\tau} x^\alpha |u_x^N|^2 dxdydt,
\end{aligned}
$$

where $\delta_1 > 0$ and c_2 depend on coefficients of the matrix C_x;

$$
\begin{aligned}
I_9^3 = &\int_{Q_\tau}(Cu_x^N, x^\alpha u_x^N)dxdydt \leqslant -c_0\int_{Q_\tau} x^\alpha |u_x^N|^2 dxdydt; \\
I_{10} = &-\int_{Q_\tau}(f, (x^\alpha u_x^N)_x)dxdydt = \int_{Q_\tau}(f, x^\alpha u_x^N)_x dxdydt + \\
&+\int_{Q_\tau}(f_x, x^\alpha u_x^N)dxdydt = I_{10}^1 + I_{10}^2; \quad I_{10}^1 = 0; \\
I_{10}^2 \leqslant &\frac{1}{2\delta_2}\int_{Q_\tau}|f_x|^2 x^\alpha dxdydt + \frac{\delta_2}{2}\int_{Q_\tau} x^\alpha |u_x^N|^2 dxdydt.
\end{aligned}
$$

Taking into account estimates of integrals $I_6, \ldots, I_{10}$ we obtain from (8) the inequality

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\tau} x^\alpha |u_x^N|^2 + \int_{Q_\tau} M_1 x^\alpha |u_x^N|^2 dxdydt \leqslant \frac{1}{\delta_2}\int_{Q_\tau} x^\alpha |f_x|^2 dxdydt + \\
&+\int_{\Omega_0} x^\alpha |\Theta_x^N|^2 dxdy + \frac{c_2}{\delta_1}\int_{Q_\tau}|u^N|^2 dxdydt + \frac{b_2}{2}\int_{Q_\tau}|u_y^N|^2 dxdydt,
\end{aligned}
$$

where $M_1 = 2c_0 - 2\delta_1 - 2b_2 - a_2 - b_3$. Again using (5), (6) it is easy to get the following equality

$$\int\limits_{Q_\tau} [(u_t^N, u_{yy}^N) + (Au_x^N, u_{yy}^N) + (Bu_y^N, u_{yy}^N) + \\ + (Cu^N, u_{yy}^N) - (f, u_{yy}^N)] dxdydt = 0, \quad \tau \in (0, T]. \tag{9}$$

Taking into account assumptions of the theorem we obtain

$$I_{11} = \int\limits_{Q_\tau} (u_t^N, u_{yy}^N) dxdydt = \int\limits_{Q_\tau} (u_t^N, u_y^N)_y dxdydt - \int\limits_{Q_\tau} (u_{ty}^N, u_y^N) dxdydt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} (u_t^N, u_y^N)_y dxdydt - \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} (u_t^N, u_y^N)_t dxdydt = I_{11}^1 + I_{11}^2;$$

$$I_{11}^1 = \int\limits_0^a \int\limits_0^\tau [(u_t^N(x,b,t), u_y^N(x,b,t)) - u_t^N(x,0,t), u_y^N(x,0,t))] dxdt =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^\tau [(u_t^N(x,b,t), \mathfrak{A} u_y^N(x,0,t)) - (\mathfrak{A} u_t^N(x,b,t), u_y^N(x,0,t))] dxdt = 0;$$

$$I_{11} = I_{11}^2 = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} x^\alpha |u_y^N|^2 dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} x^\alpha |\Theta_y^N|^2 dxdt;$$

$$I_{12} = \int\limits_{Q_\tau} (Au_x^N, u_{yy}^N) dxdydt = \int\limits_{Q_\tau} (Au_x^N, u_y^N)_y dxdydt - \int\limits_{Q_\tau} (A_y u_x^N, u_y^N) dxdydt -$$

$$- \int\limits_{Q_\tau} (Au_{xy}^N, u_y^N) dxdydt = I_{12}^1 + I_{12}^2 + I_{12}^3;$$

$$I_{12}^1 = \int\limits_0^a \int\limits_0^\tau [(A(x,b,t) u_x^N(x,b,t), u_y^N(x,b,t)) -$$

$$- (A(x,0,t) u_x^N(x,0,t), u_y^N(x,0,t))] dxdt =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^\tau [(A(x,b,t) u_x^N(x,b,t), \mathfrak{A} u_y^N(x,0,t)) -$$

$$- (A(x,0,t) \mathfrak{A} u_x^N(x,b,t), u_y^N(x,0,t))] dxdt =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^\tau [(\mathfrak{A} A(x,b,t) - A(x,0,t)\mathfrak{A}) u_x^N(x,b,t) u_y^N(x,0,t)] dxdt \leqslant 0;$$

$$I_{12}^2 = - \int\limits_{Q_\tau} (A_y u_x^N, u_y^N) dxdydt \leqslant \int\limits_{Q_\tau} \|A_y\| |x^{\alpha/2} |u_y^N| |x^{\alpha/2} u_x^N| dxdydt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_3}{2} \int\limits_{Q_\tau} (|u_y^N|^2 + x^\alpha |u_x^N|^2) dxdydt,$$

where a_3 depends on coefficients of the matrix A_y;

$$I_{12}^3 = -\int\limits_{Q_\tau}(Au_{xy}^N, u_y^N)dxdydt - \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}(Au_y^N, u_y^N)_x dxdydt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}(A_x u_y^N, u_y^N)dxdydt \leqslant \frac{a_{21}}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_y^N|^2 dxdydt;$$

where a_{21} depends on coefficients of the matrix A_x;

$$I_{13} = \int\limits_{Q_\tau}(Bu_y^N, u_{yy}^N)dxdydt = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}(Bu_y^N, u_y^N)_y dxdydt -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}(B_y u_y^N, u_y^N)dxdydt = I_{13}^1 + I_{13}^2;$$

$$I_{13}^1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^\tau[(B(x,b,t)u_y^N(x,b,t), u_y^N(x,b,t)) -$$

$$-(B(x,0,t)u_y^N(x,0,t), u_y^N(x,0,t))]dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^\tau[(B(x,b,t)\mathfrak{A}u_y^N(x,0,t), \mathfrak{A}u_y^N(x,0,t)) -$$

$$-(B(x,0,t)u_y^N(x,0,t), u_y^N(x,0,t))]dxdt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^\tau[(\mathfrak{A}^t B(x,b,t)\mathfrak{A} - B(x,0,t))u_y^N(x,0,t)u_y^N(x,0,t))]dxdt = 0;$$

$$I_{13}^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}(B_y u_y^N, u_y^N)dxdydt \leqslant \frac{b_3}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_y^N|^2 dxdydt,$$

where b_3 depends on coefficients of the matrix B_y;

$$I_{14} = \int\limits_{Q_\tau}(Cu^N, u_{yy}^N)dxdydt = \int\limits_{Q_\tau}(Cu^N, u_y^N)_y dxdydt - \int\limits_{Q_\tau}(C_y u^N, u_y^N)dxdydt -$$

$$-\int\limits_{Q_\tau}(Cu_y^N, u_y^N)dxdydt = I_{14}^1 + I_{14}^2 + I_{14}^3;$$

$$I_{14}^1 = \int\limits_0^a\int\limits_0^\tau[(C(x,b,t)u^N(x,b,t), u_y^N(x,b,t)) -$$

$$-(C(x,0,t)u^N(x,0,t), u_y^N(x,0,t))]dxdt =$$

$$= \int\limits_0^a\int\limits_0^\tau[(C(x,b,t)u^N(x,b,t), \mathfrak{A}u_y^N(x,0,t)) -$$

$$-(C(x,0,t)\mathfrak{A}u^N(x,b,t), u_y^N(x,0,t))]dxdt \leqslant 0;$$

$$I_{14}^2 = -\int\limits_{Q_\tau} (C_y u^N, u_y^N) dx dy dt \leqslant \frac{c_3}{2\delta_3} \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dx dy dt + \frac{\delta_3}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_y^N|^2) dx dy dt,$$

where c_3 depends on coefficients of the matrix C_y;

$$I_{14}^3 \leqslant - c_0 \int\limits_{Q_\tau} |u_y^N|^2 dx dy dt; \quad I_{15} = -\int\limits_{Q_\tau} (f, u_{yy}^N) dx dy dt =$$

$$= -\int\limits_{Q_\tau} (f, u_y^N)_y dx dy dt + \int\limits_{Q_\tau} (f_y, u_y^N) dx dy dt = I_{15}^1 + I_{15}^2;$$

$$I_{15}^1 = -\int\limits_0^a \int\limits_0^\tau [(f(x,b,t), u_y^N(x,b,t)) - (f(x,0,t), u_y^N(x,0,t))] dx dt =$$

$$= \int\limits_0^a \int\limits_0^\tau [((\mathfrak{A} f(x,b,t) - f(x,0,t)), u_y^N(x,0,t))] dx dt = 0;$$

$$I_{15}^2 \leqslant \frac{1}{2\delta_4} \int\limits_{Q_\tau} |f_y|^2 dx dy dt + \frac{\delta_4}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_y^N|^2 dx dy dt.$$

From the estimates of integrals $I_{11}, \ldots, I_{15}$ and equality (9) we obtain

$$\int\limits_{\Omega_\tau} |u_y^N|^2 + \int\limits_{Q_\tau} M_2 |u_y^N|^2 dx dy dt \leqslant \frac{1}{\delta_4} \int\limits_{Q_\tau} x^\alpha |f_y|^2 dx dy dt + \tag{10}$$

$$+ \int\limits_{\Omega_0} |\Theta_y^N|^2 dx dy + \frac{c_3}{\delta_3} \int\limits_{Q_\tau} |u^N|^2 dx dy dt + a_3 \int\limits_{Q_\tau} x^\alpha |u_x^N|^2 dx dy dt,$$

where $M_2 = 2c_0 - 2\delta_4 - 2b_3 - a_{21} - a_3$. If we sum (9) and (10) we get

$$\int\limits_{\Omega_\tau} (x^\alpha |u_x^N|^2 + |u_y^N|^2) dx dy \leqslant \mu \int\limits_{\Omega_0} (x^\alpha |u_x^N|^2 + |u_y^N|^2) dx dy dt + f_0(\tau). \tag{11}$$

Then from (11) and the Gronoull-Bellman inequality we obtain the estimate

$$\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n x^\alpha |u_{ix}^N|^2 dx dy dt + \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{iy}^N|^2 dx dy dt \leqslant \|\Theta_x\|_{L^2_\alpha(\Omega)} + \frac{1}{\delta_3} \|f_x\|_{L^2_\alpha(\Omega)} +$$

$$+ \|\Theta_y\|_{L^2(\Omega)} + \|f_y\|_{L^2(\Omega)} - \mu_1(\tau) - \mu_2(\tau) \leqslant D(\tau).$$

Therefore

$$\|u^N\|_{L^2(\Omega)} + \|x^{\alpha/2} u_x^N\|_{L^2_\alpha(\Omega)} + \|u_y^N\|_{L^2(\Omega)} \leqslant D(\tau).$$

And now we can choose from sequences $\{u_i^N(x,y,t)\}$, $\{u_{ix}^N(x,y,t)\}$, $\{u_{iy}^N(x,y,t)\}$ subsequences such that $u_i^m(x,y,t) \to u_i(x,y,t)$ weakly in $L^2(\Omega)$, $x^{\alpha/2} u_{ix}^m(x,y,t) \to x^{\alpha/2} u_{ix}(x,y,t)$ weakly in $L^2(\Omega)$, $u_{iy}^m(x,y,t) \to u_{iy}(x,y,t)$ weakly in $L^2(\Omega)$.

Now it is easy to show that the function $u(x,y,t)$ is the unique solution of problem (1)–(3).

1. *Брушлинский К.В.* О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций// Изв. АН СССР. – Сер. мат. – 1959. – Т.23. – N 6. – С.893-912.
2. *Жданович В.Ф.* Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. – 1959. – Т.47. – N3. – С. 307-354.
3. *Кирилич В.М.* Задача з нерозділеними граничними умовами для гіперболічної системи першого порядку на прямій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех-мат. – 1984. – Вип. 24. – С. 90-94.
4. *Лионс Ж.- Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
5. *Оліскевич М.О.* Стійкість розв'язку мішаної задачі для системи з трьома незалежними змінними з періодичними крайовими умовами// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 48. – С. 27-35.

Зареба Л.

ПОЧАТКОВО-КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМ

У праці досліджено мішану задачу для системи гіперболічних рівнянь першого порядку у випадку двох просторових змінних з виродженням на частині межі (за змінною x). За іншою змінною (змінною y) розглянуто нелокальні крайові умови. Початкові функції є необмежені в деякому околі межі. Отримано певні достатні умови існування та єдиності розв'язку зазначеної задачі.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат.1999.Вип.54.С.84–95

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math.1999.Vol.54.P.84–95

УДК 517.95

Володимир Ільків

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НОРМАЛЬНИХ АНІЗОТРОПНИХ СИСТЕМ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В області D^p, яка є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і p-вимірного тора Ω_p, розглянемо нормальну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними і сталими коефіцієнтами

$$L\left(\partial/\partial t, D\right) u(t,x) \equiv \sum_{\substack{|\widehat{s}|\leqslant N \\ s_0\leqslant n}} A_{\widehat{s}} D^s \left(\partial/\partial t\right)^{s_0} u = 0, \tag{1}$$

де $A_{\widehat{s}}$ – квадратні матриці розміру m з комплексними елементами, $u = u(t,x) = \operatorname{col}\left(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x)\right)$ – вектор розміру m; $x = (x_1,\ldots,x_p)$, $N \geqslant n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, $\widehat{s} = (s_0,s) = (s_0,s_1,\ldots,s_p)$, $|\widehat{s}| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p = s_0 + |s|$; $D^s = D_1^{s_1}\ldots D_p^{s_p}$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$ $(j=\overline{1,p})$.

Максимальні порядки похідних за змінними x_j, що входять у систему, можуть бути довільними, не залежати один від одного та від n, тобто система анізотропна стосовно порядків похідних компонент u_j $(j=\overline{1,m})$ вектор-функції u і є загальною нормальною (розв'язаною щодо старших похідних за часом $\partial^n u_j/\partial t^n$) системою зі сталими коефіцієнтами.

Запишемо оператор $L(\lambda, D)$ у вигляді полінома за змінною λ, а саме:

$$L(\lambda,D) = L_0(D)\lambda^n + L_1(D)\lambda^{n-1} + \cdots + L_{n-1}(D)\lambda + L_n(D), \tag{2}$$

де $L_j(D) = \sum\limits_{|s|\leqslant N-n+j} A_{n-j,s}D^s$ $(j=\overline{0,n})$. Оскільки система – нормальна, то $L_0(D) = I_m$, де I_m – одинична матриця.

Ставимо задачу знаходження розв'язку u системи (1), що задовольняє нелокальні крайові умови за часовою змінною t такого вигляду:

$$\nu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} - \mu\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\bigg|_{t=T} = \varphi_j(x),\ j=\overline{0,n-1}, \tag{3}$$

де ν, μ – комплексні числа ($|\nu| \leqslant 1$, $|\mu| \leqslant 1$, $\nu\mu \neq 0$), $T > 0$, $\varphi_j(x)$ – задані вектор-функції розміру m.

Задачу (1), (3) для ізотропної ($N=n$) системи (1) розглядали в праці [1]. За допомогою метричного підходу [2] визначено умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі в шкалах соболевських періодичних за просторовою змінною x просторів $\mathbb{H}_q$ для всіх (за винятком деякої множини малої міри) векторів (ν,μ). Побудовано явний вигляд розв'язку.

Будемо вивчати розв'язність анізотропної ($N \geqslant n$) задачі (1), (3) у згаданих вище соболєвських просторах, тобто праві частини $\varphi_j(x)$ умов (3) та шукані розв'язки задачі (1), (3) розглядаємо у шкалі просторів $\mathbb{H}_q$ ($q \in \mathbb{R}$), вважаючи що $\mathbb{H}_q$ є поповненням множини тригонометричних поліномів $\varphi(x) = \sum \hat{\varphi}(k)e^{ikx}$ за нормою

$$||\varphi||_q^2 = \sum_{k \in Z^p} \widetilde{k}^{2q} |\hat{\varphi}(k)|^2,$$

де $k = (k_1, \ldots, k_p)$, $kx = (k_1x_1 + \cdots + k_px_p)$, $\widetilde{k}^2 = 1 + k_1^2 + \cdots + k_p^2$.

Введемо також псевдодиференціальні оператори (ПДО) $F(D)$, які породжені послідовністю комплексних чисел $F(k)$ за формулою

$$F(D)\varphi(x) = \sum_{k \in Z^p} F(k)\hat{\varphi}(k)e^{ikx},$$

де функція $\varphi(x) = \sum\limits_{k \in Z^p} \hat{\varphi}(k)e^{ikx}$. Очевидно, що кожна така функція $\varphi(x)$ ($\varphi(x) \in \mathbb{H}_q$) також породжує ПДО, а саме $\hat{\varphi}(D)$. У цьому випадку $\varphi(x) = \hat{\varphi}(D)\delta(x)$, де $\delta(x) = \sum\limits_{k \in Z^p} e^{ikx}$ – дельта-функція Дірака, і $\delta(x) \in \mathbb{H}_q$ при $q < -p/2$ [3].

Згідно з формулою (2) задача (1), (3) еквівалентна задачі з нелокальними умовами для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку за часовою змінною

$$\partial v(t,x)/\partial t = L(D)v(t,x), \tag{4}$$

$$\nu v(0,x) - \mu v(T,x) = \varphi(x), \tag{5}$$

де $v = \operatorname{col}(u, \partial u/\partial t, \ldots, \partial^{n-1}u/\partial t^{n-1}) = \operatorname{col}(v_0, v_1, \ldots, v_{nm-1})$, $\varphi(x) = \operatorname{col}(\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)) = \operatorname{col}(\varphi^0(x), \varphi^1(x), \ldots, \varphi^{nm-1}(x))$,

$$L(D) = \begin{pmatrix} 0 & I_{(n-1)m} & & \\ -L_n(D) & -L_{n-1}(D) & \ldots & -L_1(D) \end{pmatrix} = (L_{ij}(D))_{i,j=\overline{1,nm}}.$$

Нехай

$$l_\varphi(\lambda, D) = \lambda^{n(D)} + l_{\varphi 1}(D)\lambda^{n(D)-1} + \cdots + l_{\varphi n(D)}(D) -$$

мінімальний многочлен (ПДО) вектора $\varphi(x)$ щодо матриці $L(D)$, тобто $l_\varphi(L(D), D)\varphi(x) = 0$, і $l_\varphi(\lambda, D) \equiv \prod\limits_{j=1}^{\gamma_\varphi(D)} (\lambda - \lambda_j(D))^{\alpha_{\varphi j}(D)}$, де корені $\lambda_j(D)$ є також коренями (можливо більшої кратності) характеристичного многочлена $l(\lambda, D) \equiv \det(\lambda I_{nm} - L(D))$ системи (4); отже,

$$l(\lambda, D) \equiv \lambda^{nm} + l_1(D)\lambda^{nm-1} + \cdots + l_{nm}(D) = \prod_{j=1}^{\gamma(D)} (\lambda - \lambda_j(D))^{\alpha_j(D)}.$$

Нехай n_i – степінь многочлена $l_i(D) \equiv \sum_{|s| \leqslant n_i} a_{i,s}D^s$ щодо змінної D, n_{ij} – степінь елемента $L_{ij}(D)$ матриці $L(D)$. Вважаємо, що для $l_i(D) \equiv 0$ відповідне число $n_i = -\infty$, аналогічно для чисел n_{ij}. Позначимо через n_l зведений порядок системи (4) (матриці $L(D)$), а саме: $n_l = \max\limits_{n_i \geqslant 0} n_i/i \geqslant 0$; він характеризує зростання коренів $\lambda_j(k)$ характеристичного рівняння $l(\lambda, k) = 0$ при $\widetilde{k} \to \infty$, а саме $\lambda_j(k) = O(\widetilde{k}^{n_l})$.

Виберемо дійсні числа $d_1, \ldots, d_{nm-1}$ $(d_{nm} = 0)$ так, щоб вираз $\max\limits_{n_{ij} \geqslant 0}(d_i - d_j + n_{ij})$ приймав мінімальне значення, яке позначимо через n_L. Якщо наборів $d_1, \ldots, d_{nm-1}$ таких чисел декілька, то вибираємо, наприклад, довільний з тих, у яких мінімальна сума $d_1^2 + \cdots + d_{nm-1}^2$.

Числа $n_L, d_1, \ldots, d_{nm-1}$ характеризують зростання елементів $L_{ij}(D)$ матриці $L(D)$, а саме $L_{ij}(k) = O(\widetilde{k}^{n_L - d_i + d_j})$ при $\widetilde{k} \to \infty$, тобто ПДО-матриця $ZL(D)Z^{-1}\widetilde{D}^{-n_L}$ є обмеженим оператором:

$$||ZL(D)Z^{-1}\widetilde{D}^{-n_L}|| \leqslant C_0, \tag{6}$$

де $Z = \operatorname{diag}(\widetilde{D}^{d_1}, \ldots, \widetilde{D}^{d_{nm}})$, $\widetilde{D}$ – ПДО, породжений послідовністю $\widetilde{k}$, $C_0 > 0$ – деяка константа, $||\cdot||$ – евклідова норма. З (6) випливає, що $n_l \leqslant n_L$. Для одного $(m = 1)$ рівняння $n_l = n_L$ і $d_i = (n - i)n_l$ $(i = \overline{1, n})$.

Дослідимо задачу (4), (5). Необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (4), (5) є нерозв'язність у цілих числах $k_0, k_1, \ldots, k_p$ алгебраїчного рівняння [1]

$$\det\big((\beta_1 + i\beta_2 k_0)I_{nm} - L(k)\big) = 0, \tag{7}$$

де $\beta_1 T = \ln(\nu/\mu)$, $\beta_2 T = 2\pi$, $i = \sqrt{-1}$. Ця умова означає, що число ν не належить точковому спектру оператора $\mu e^{L(D)T}$; його спектр є зліченною множиною з точками скупчення, розташування яких в комплексній площині може бути довільним.

Отже, для будь-якого числа ν із одиничного круга з вилученим точковим спектром оператора $\mu e^{L(D)T}$ задача (4), (5) має не більше одного розв'язку для всіх функцій $\varphi(x)$. Доведемо, що після вилучення точок спектра з деякими їхніми околами існує єдиний розв'язок задачі (4), (5), який має певну гладкість (належить простору з шкали просторів $\mathbb{H}_q$).

Теорема 1. *Для існування розв'язку задачі (4), (5) у шкалі просторів $\mathbb{H}_q$ необхідно, щоб для деяких сталих $K > 0$ і $L \in \mathbb{R}$ для всіх векторів $k \in Z^p$ виконувалась нерівність*

$$\left|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}\right| \geqslant K\widetilde{k}^L, \ j = \overline{1, \gamma(k)}. \tag{8}$$

Доведення. Нехай $\widetilde{L} \in \mathbb{R}$ – довільне число і умова (8) не виконується, тобто для деякого $L < \min(0, \widetilde{L})$ виконується обернена нерівність

$$\left|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}\right| < \frac{|\nu|}{2}\widetilde{k}^L < \frac{|\nu|}{2},$$

для деякого j $(1 \leqslant j \leqslant \gamma(k))$ і деякої безмежної послідовності $\widetilde{\mathbb{Z}}^p$ векторів $k \in Z^p$. Звідси випливає, що $\operatorname{Re}\lambda_j(k) \geqslant \ln|\nu/2\mu|/T$ і $e^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)t} \geqslant \widetilde{K} = \min(1, |\nu/2\mu|)$.

Якщо $E_j(k)$ – власний одиничний вектор матриці $L(k)$, який відповідає власному значенню $\lambda_j(k)$, то вектор-функція

$$\widetilde{v}(t, x) = \sum_{k \in \widetilde{\mathbb{Z}}^p} E_j(k)\frac{e^{\lambda_j(k)t + ikx}}{\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}}$$

є розв'язком системи (4) і

$$\widetilde{\varphi}(x) \equiv \nu\widetilde{v}(0, x) - \mu\widetilde{v}(T, x) = \sum_{k \in \widetilde{\mathbb{Z}}^p} E_j(k)e^{ikx}.$$

Компоненти вектора $\widetilde{\varphi}(x)$ є елементами простору $\mathbb{H}_q$ при довільному $q < -p/2$, однак

$$\sum_{\alpha=0}^{nm-1} \|\widetilde{v}_\alpha\|^2_{\mathbb{H}_{\widetilde{L}}} = \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^p} \widetilde{k}^{2\widetilde{L}} \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)t}}{\left|\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}\right|^2} \geqslant \left(\frac{2\widetilde{K}}{|\nu|}\right)^2 \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{Z}}^p} \widetilde{k}^{2(\widetilde{L}-L)}.$$

Оскільки останній ряд розбігається, то для кожного $t \in [0,T]$ хоча б одна компонента $\widetilde{v}_\alpha \notin \mathbb{H}_{\widetilde{L}}$. Теорему доведено.

Побудуємо розв'язок задачі (4), (5) використовуючи такі позначення:$R_\Lambda(f(\lambda))$ – розділена різниця порядку $s-1$ $(s \geqslant 1)$ функції $f(\lambda)$ для набору комплексних чисел $\Lambda = \Big(\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{\alpha_1},\ldots,\underbrace{\lambda_\gamma,\ldots,\lambda_\gamma}_{\alpha_\gamma}\Big)$ $(s = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\gamma)$, яку можна подати у вигляді

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \sum_{j=1}^{\gamma} \frac{1}{(\alpha_j-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\alpha_j-1} \Big(f(\lambda)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\gamma}(\lambda-\lambda_i)^{-\alpha_i}\Big)\Big|_{\lambda=\lambda_j} = \tag{9}$$

$$= \frac{1}{(\alpha_1-1)!\ldots(\alpha_\gamma-1)!} \frac{\partial^{s-\gamma}}{\partial\lambda_1^{\alpha_1-1}\ldots\partial\lambda_\gamma^{\alpha_\gamma-1}} \Big(\sum_{j=1}^{\gamma} f(\lambda_j)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\gamma}(\lambda-\lambda_i)^{-1}\Big),$$

зокрема при $\gamma = s$

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \sum_{j=1}^{s} f(\lambda_j)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{-1},$$

і $R_\Lambda(f(\lambda)) = f^{(s-1)}(\lambda_1)/(s-1)!$ при $\gamma = 1$. Формула (9) правильна для функції $f(\lambda)$, аналітичної в точках $\lambda_1,\ldots,\lambda_\gamma$, а для функції $f(\lambda)$, яка аналітична в опуклій області, що містить точки $\lambda_1,\ldots,\lambda_\gamma$, справджується така інтегральна формула

$$\begin{aligned} R_\Lambda(f(\lambda)) &= \int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{\gamma-2}} f^{(s-1)}\Big(\sum_{i=1}^{\gamma} t_{i-1}(\lambda_i-\lambda_{i-1})\Big)\times \\ &\times\prod_{j=1}^{\gamma}\frac{(t_{j-1}-t_j)^{\alpha_j-1}}{(\alpha_j-1)!}dt_1\ldots dt_{\gamma-1} = \prod_{l=1}^{\gamma}\frac{1}{(\alpha_l-1)!}\frac{\partial^{\alpha_l-1}}{\partial\lambda_l^{\alpha_l-1}} \\ &\times\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{\gamma-2}} f^{(\gamma-1)}\Big(\sum_{i=1}^{\gamma} t_{i-1}(\lambda_i-\lambda_{i-1})\Big)\,dt_1\ldots dt_{\gamma-1}, \end{aligned}\tag{10}$$

де $t_0 = 1$, $\lambda_0 = t_\gamma = 0$. Еквівалентність формул (9) і (10) випливає з їхньої еквівалентності при $\gamma = s$ [5].

Розділена різниця $R_\Lambda(f(\lambda))$ для многочлена $f(\lambda)$ степеня $s-1$, згідно з формулою (10), дорівнює старшому коефіцієнтові цього многочлена, також, згідно з формулою (9), розділена різниця $R_\Lambda(f(\lambda)) = 0$ для функції $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1}\ldots(\lambda-\lambda_\gamma)^{\alpha_\gamma}g(\lambda)$, де $g(\lambda)$ – аналітична в точках $\lambda_1,\ldots,\lambda_\gamma$ функція.

Розділені різниці різних порядків пов'язані між собою формулою [5]

$$R_\Lambda(f(\lambda)) = \frac{R_{\Lambda_2}(f(\lambda)) - R_{\Lambda_1}(f(\lambda))}{\lambda_{j_1}-\lambda_{j_2}}, \quad \lambda_{j_1}\neq\lambda_{j_2}, \tag{11}$$

де $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, $\Lambda_2 = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{j_2-1}, \lambda_{j_2+1}, \ldots, \lambda_s)$, $\Lambda_1 = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{j_1-1}, \lambda_{j_1+1}, \ldots, \lambda_s)$. У лівій частині формули (11) – розділена різниця порядку $s-1$, а в правій – розділені різниці порядку $s-2$; набори комплексних чисел Λ_2 і Λ_1 утворені з набору Λ вилученням чисел λ_{j_2} і λ_{j_1} відповідно. Якщо в наборі Λ число $\overline{\lambda}$ трапляється $\overline{\alpha}$ разів, то формула (9) дає $(\overline{\alpha}-1)R_\Lambda(f(\lambda)) = \partial R_{\overline{\Lambda}}(f(\lambda))/\partial\overline{\lambda}$, де в наборі $\overline{\Lambda}$ число $\overline{\lambda}$ трапляється $\overline{\alpha}-1$ раз. Остання рівність і рівність (11) свідчать про те, що розділена різниця не залежить від впорядкування чисел λ_j в наборі Λ; ці рівності можна використати для побудови розділених різниць високих порядків.

Позначимо через $\Lambda(D) = \Big(\underbrace{\lambda_1(D), \ldots, \lambda_1(D)}_{\alpha_{\varphi 1}(D)}, \ldots, \underbrace{\lambda_{\gamma_\varphi(D)}, \ldots, \lambda_{\gamma_\varphi(D)}}_{\alpha_{\varphi\gamma_\varphi(D)}(D)}\Big)$ набір $n(D)$ коренів многочлена $l_\varphi(\lambda, D)$.

Теорема 2. *Нехай виконується умова єдиності, тобто алгебраїчне рівняння (7) не має цілочислових розв'язків; тоді існує єдиний формальний розв'язок задачі (4), (5), що має такий вигляд*

$$v(t,x) = \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)L(D), D\Big)\, d\tau R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x)$$

$$\equiv \sum_{k\in Z^p}\int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)L(k), k\Big)\, d\tau R_{\Lambda(k)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\widehat{\varphi}(k)e^{ikx}, \qquad (12)$$

де $\widehat{\varphi}(k)$ – коефіцієнти Фур'є вектор-функції $\varphi(x)$.

Доведення. Очевидно, що формулу (12) можна подати у вигляді розділеної різниці

$$v(t,x) = R_{\Lambda(D)}\Big(\int_0^1 l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D)\, d\tau\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x),$$

а, отже,

$$\nu v(0,x) - \mu v(T,x) = R_{\Lambda(D)}\Big(\int_0^1 l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D)\, d\tau\Big)\varphi(x).$$

Оскільки $l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D) = \sum\limits_{j=0}^{n(D)-1} l_\varphi^{(j+1)}(L(D), D)(\lambda - L(D))^j\tau^j/j!$, то $\int_0^1 l_\varphi^{(1)}(\tau\lambda + (1-\tau)L(D), D)\, d\tau = \sum\limits_{j=0}^{n(D)-1} l_\varphi^{(j+1)}(L(D), D)(\lambda - L(D))^j/(j+1)!$ є многочленом за змінною λ степеня $n(D)-1$ з одиничним старшим коефіцієнтом, а, отже, розділена різниця дорівнює одиничному ПДО, що означає виконання умови (5).

Підставимо (12) в систему (4), тоді

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} - L(D)v(t,x) = \Big(\frac{\partial}{\partial t} - L(D)\Big)\sum_{j=0}^{n(D)-1}\frac{l_\varphi^{(j+1)}(L(D), D)}{(j+1)!}\Big(\frac{\partial}{\partial t} - L(D)\Big)^j$$

$$\times R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x) = \Big[l_\varphi\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D\Big) - l_\varphi(L(D), D)\Big]R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x)$$

$$= R_{\Lambda(D)}\Big(l_\varphi(\lambda, D)\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)\varphi(x) - R_{\Lambda(D)}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\nu - \mu e^{\lambda T}}\Big)l_\varphi(L(D), D)\varphi(x).$$

Оскільки $\Lambda(D)$ – набір коренів многочлена $l_\varphi(\lambda, D)$, то $R_{\Lambda(D)}\big(l_\varphi(\lambda, D)e^{\lambda t}/(\nu - \mu e^{\lambda T})\big) = 0$, а також $l_\varphi(L(D), D)\varphi(x) = 0$ за означенням мінімального многочлена вектора $\varphi(x)$, тобто $\partial v/\partial t - L(D)v = 0$. Теорема доведена.

Доведемо належність одержаного розв'язку (12) до шкали просторів $\mathbb{H}_q$. Для цього оцінимо норму вектор-функції (12). Вона містить малі знаменники $\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}$ та $\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)$ $(\alpha \neq \beta)$, які можуть бути нескінченно малими. При цьому $\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)$ завжди відмінні від нуля, а $\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}$ можуть перетворюватися в нуль, якщо не виконуються умови єдиності. Отже, маємо розв'язати проблему малих знаменників [2, 6], причому для знаменників $\nu - \mu e^{\lambda_j(k)T}$ насправді треба розв'язувати проблему нульових знаменників. Для оцінки нульових знаменників використовуємо метричний підхід [2, 7], а оцінювання малих знаменників $\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)$ виконуємо разом із відповідними чисельниками розділених різниць (9).

Попередньо проаналізуємо властивості наборів $\Lambda(k)$ коренів мінімального многочлена $l_\varphi(\lambda, k)$. Позначимо через $\operatorname{diam}\Lambda$ максимальну відстань між елементами множини Λ, тобто $\operatorname{diam}\Lambda = \max\limits_{a,b\in\Lambda}|a-b|$.

Нехай $\lambda_j(\widehat{\xi}) = \lambda_j(\xi, \xi_{p+1})$, де $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$, $\xi_{p+1} \in \mathbb{R}$, $\xi_{p+1} \geqslant 0$, – корені рівняння

$$l(\lambda, \widehat{\xi}) = \lambda^{nm} + \sum_{j=1}^{nm}\sum_{|s|\leqslant n_j} a_{js}\xi^s\xi_{p+1}^{jn_l-|s|}\lambda^{nm-j} = \prod_{j=1}^{\gamma(\widehat{\xi})}(\lambda - \lambda_j(\widehat{\xi}))^{\alpha_j(\widehat{\xi})} = 0. \tag{13}$$

Очевидно, що $\lambda_j(k) = \widetilde{k}^{n_l}\lambda_j(k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})$ і кількість та кратність коренів $\lambda_j(k)$ і $\lambda_j(k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})$ збігаються $(j = \overline{1, \gamma(k)})$.Виберемо число K_1 таким, щоб виконувались нерівності $n(k) \leqslant b$, $\min\limits_{j=\overline{1,\gamma(k)}}\alpha_j(k) \geqslant b_1$, $\max\limits_{j=\overline{1,\gamma(k)}}\alpha_j(k) \leqslant b_2$ при $\widetilde{k} > K_1$, де $b_1 = \varliminf_{\widetilde{k}\to\infty}\min\limits_{j=\overline{1,\gamma(k)}}\alpha_j(k)$, $b_2 = \varlimsup_{\widetilde{k}\to\infty}\max\limits_{j=\overline{1,\gamma(k)}}\alpha_j(k)$, $b = \varlimsup_{\widetilde{k}\to\infty}n(k)$.

Лема 1. *Нехай функція* $\operatorname{Res}(j;\widehat{\xi}) = \prod\limits_{s=1}^{\gamma(\widehat{\xi})}\big(d^jl(\lambda_s(\widehat{\xi}), \widehat{\xi})/d\lambda^j\big)^{\alpha_s(\widehat{\xi})}$ *позначає результант поліномів (за змінною λ) $l(\lambda, \widehat{\xi})$ і $d^jl(\lambda, \widehat{\xi})/d\lambda^j$ $(j = \overline{1, nm})$ і нехай існують сталі $K_2 > K_1$, $C_1 > 0$ такі, що*

$$\big|\operatorname{Res}(N_j; k/\widetilde{k}, 1/\widetilde{k})\big| \geqslant C_1\widetilde{k}^{\beta_j},\ \forall\widetilde{k} > K_2,\ j = \overline{1, h}, \tag{14}$$

де $b_2 < N_1 < N_2 < \cdots < N_h < b$, $-pb_1/2 - n_l \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_h \leqslant 0$ $(1 \leqslant h \leqslant b - b_1)$. Тоді для кожного $\widetilde{k} > K_2$ правильне твердження: у всякому наборі з $N_j + 1$-го кореня (враховуючи кратність) многочлена $l(\lambda, k)$ існує пара коренів $\lambda^*(k)$ і $\lambda^{**}(k)$, яка задовольняє нерівність

$$|\lambda^*(k) - \lambda^{**}(k)| \geqslant C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_j/b_1}, j = \overline{1, h}, \tag{15}$$

де C_2 – константа, яка не залежить від k, $j = \overline{1, h}$.

Доведення. Оскільки корені $\lambda_j(\widehat{\xi})$ рівняння (13) обмежені зверху константою, що не залежить від $\widehat{\xi}$, то з формули

$$\frac{d^jl}{d\lambda^j}(\lambda_s(\widehat{\xi}), \widehat{\xi}) = \sum\prod_{i=1, i\neq s}^{\gamma(\widehat{\xi})}\big(\lambda_s(\widehat{\xi}) - \lambda_i(\widehat{\xi})\big)^{\alpha_i(\widehat{\xi})-p_i},$$

де сума поширюється на набори чисел $\big(p_1,\ldots,p_{s-1},p_{s+1},\ldots,p_{\gamma(\widehat{\xi})}\big)$ для яких $p_\sigma \leqslant \alpha_\sigma(\widehat{\xi})$ та $\sum\limits_{\sigma=1,\sigma\neq s}^{\gamma(\widehat{\xi})} p_\sigma = j-\alpha_s(\widehat{\xi})$, одержуємо, що для кожного s $(1\leqslant s\leqslant \gamma(\widehat{\xi}))$ існує хоча б один набір чисел $p_\sigma = p_\sigma^*$ $(\sigma\neq s)$, для якого виконуються нерівності

$$|\mathrm{Res}(N_j;\widehat{\xi})| \leqslant C_3\left|\frac{d^{N_j}l}{d\lambda^{N_j}}\big(\lambda_s(\widehat{\xi}),\widehat{\xi}\big)\right|^{\alpha_s(\widehat{\xi})} \leqslant \prod_{i=1,i\neq s}^{\gamma(\widehat{\xi})}\left|\lambda_s(\widehat{\xi})-\lambda_i(\widehat{\xi})\right|^{(\alpha_i(\widehat{\xi})-p_i^*)\alpha_s(\widehat{\xi})}.$$

Отже, з нерівності (14) для кожного $s=\overline{1,\gamma(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})}$ при $\alpha_i(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})>p_i^*$, $i\neq s$, $\widetilde{k}>K_2$, маємо $|\lambda_s(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})-\lambda_i(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})|\geqslant C_1\widetilde{k}^{\beta_j/b_1}$. Оскільки $\sum\limits_{i\neq s}\big(\alpha_i(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k}) - p_i^*\big)=\gamma(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})-N_j$ і $\lambda_s(k)=\widetilde{k}^{n_l}\lambda_s(k/\widetilde{k},1/\widetilde{k})$, то тільки у наборі з N_j коренів кожна пара може задовольняти нерівність, протилежну до (15). Лема доведена.

Зафіксуємо числа ε і r, для яких $0<\sqrt{\varepsilon}<\ln 2/(2\kappa T)$, $2r+p<0$, де $\kappa\leqslant \Big(4T\sqrt{2nm\sum_{k\in Z^p}\widetilde{k}^r}\Big)^{-1}$; позначимо через B одиничний круг у комплексній площині параметра ν і нехай при $|\nu_j(k)|<2$, де $\nu_j(k)=\mu e^{\lambda_j(k)T}$, множина $B_j(k)$ $(j=\overline{1,\gamma(k)})$ позначає область

$$\left\{z\in B\ :\ e^{-\kappa_1 T}\leqslant\left|\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leqslant e^{\kappa_1 T},\left|\arg\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leqslant \kappa_1 T,\ \kappa_1=\sqrt{\varepsilon}\kappa\widetilde{k}^r\right\}.$$

Ця область – частина кільця – має міру $\mathrm{mes}B_j(k)=2\kappa_1 T|\nu_j(k)|^2 sh(2\kappa_1 T)$. Згідно з теоремою про середнє маємо $\mathrm{mes}B_j(k)\leqslant 16\kappa_1^2T^2e^{2\kappa_1 T}\leqslant 32\kappa_1^2T^2$. Міра множини $B_\varepsilon=\bigcup\limits_{k\in Z^p}\ \bigcup\limits_{|\nu_j(k)|<2} B_j(k)$ не перевищує $32T^2nm\varepsilon\kappa^2\sum\limits_{k\in Z^p}\widetilde{k}^{2r}\leqslant\varepsilon$. Через $B_{j,1}(k)$ $(B_{j,1}(k)\subset B_j(k))$ позначимо область

$$\left\{z\in B_j(k)\ :\ e^{-\kappa_1 T/2}\leqslant\left|\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leqslant e^{\kappa_1 T/2},\left|\arg\frac{z}{\nu_j(k)}\right|\leqslant \frac{\kappa_1 T}{2}\right\},$$

тоді відстань кожного числа $z_1\in B_{j,1}(k)$ до будь-якого числа $z_2\notin B_j(k)$ оцінюється знизу величиною

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|&\geqslant \min\left\{|\nu_j(k)|\big(e^{-\kappa_1 T/2}-e^{-\kappa_1 T}\big),|\nu_j(k)|e^{-\kappa_1 T/2}\sin(-\kappa_1 T/2)\right\}\\ &\geqslant|\nu_j(k)|\min\left\{\frac{\kappa_1 T}{2},\frac{\kappa_1 T}{\pi}\right\}=|\nu_j(k)|\frac{\kappa_1 T}{\pi}.\end{aligned}\qquad(16)$$

Наступна лема визначає оцінки знизу для виразів, що містять нульові знаменники $\nu-\mu e^{\lambda_j(k)T}$.

Лема 2. *Нехай $\nu\in B\setminus B_\varepsilon$, $\mu\in B$ і $\overline{\lambda}\in B_{j,2}(k)$, де $B_{j,2}(k)$ – квадрат з центром $\lambda_j(k)$ у комплексній площині змінної λ зі сторонами довжини κ_1 паралельними до осей координат, тоді функції*

$$\rho_s(\lambda,t)\equiv\frac{1}{s!}\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left(\frac{e^{\lambda t}}{\nu-\mu e^{\lambda T}}\right)$$

є аналітичними в області $B_{j,2}(k)$ і

$$|\rho_s(\overline{\lambda},t)|\leqslant e^{s(T+1)}\left(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{s+1},\quad s=0,1,2,\ldots,\qquad(17)$$

де $\theta = 3\pi/(\kappa T \min(|\nu|, |\mu|)\widetilde{k}^r)$, $t \in [0, T]$.

Доведення. Розглянемо два можливі випадки: $|\nu_j(k)| < 2$ і $|\nu_j(k)| \geqslant 2$. У першому випадку $\nu \notin B_j(k)$ і функція $\rho_0(\lambda, t)$ (а, отже, і всі функції $\rho_s(\lambda, t)$) є аналітичними в області $B_{j,2}(k)$.

Визначимо оцінку (17) при $s = 0$, тобто оцінку

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \theta/\sqrt{\varepsilon}. \tag{18}$$

Нехай $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda} \leqslant \ln|\nu/2\mu|/T$, тоді $|\mu e^{\overline{\lambda}T}| \leqslant |\nu|/2$, $|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant |\nu|/2$ і $|e^{\overline{\lambda}t}| \leqslant e^{t\ln|\nu/2\mu|/T} = \max(1, |\nu|/|2\mu|)$. Звідси одержуємо, що

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \max\Big(\frac{2}{|\nu|}, \frac{1}{|\mu|}\Big). \tag{19}$$

Нехай $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda} \geqslant \ln|2/\mu|/T$, тоді $|\mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant 2$, $|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant |\mu e^{\overline{\lambda}T}|/2$ і

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \frac{2}{|\mu|} e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}(t-T)} \leqslant \frac{2}{|\mu|}. \tag{20}$$

Оскільки $\mu e^{\overline{\lambda}T} \in B_{j,1}(k)$ і $\nu \notin B_j(k)$, то з нерівності (16) випливає, що

$$|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant |\nu_j(k)| \frac{\kappa_1 T}{\pi} \geqslant \frac{\kappa_1 T|\mu|}{\pi} e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}T - \kappa_1 T/2} > \frac{\kappa_1 T|\mu|}{2^{1/4}\pi} e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}T}.$$

Нехай $\ln|\nu/2\mu|/T < \mathrm{Re}\,\overline{\lambda} < \ln|2/\mu|/T$, тоді

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \frac{2^{1/4}\pi e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}t}}{\kappa_1 T|\mu| e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}T}} = \frac{2^{1/4}\pi}{\kappa_1 T|\mu| e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}(T-t)}} < \frac{2^{1/4}\pi}{\kappa_1 T|\mu|}\Big(\frac{2|\mu|}{|\nu|}\Big)^{(T-t)/T}$$

або

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \frac{2^{1/4}\pi}{\kappa_1 T} \max\Big(\frac{2}{|\nu|}, \frac{1}{|\mu|}\Big). \tag{21}$$

У другому випадку $|\mu e^{\overline{\lambda}T}| \geqslant |\nu_j(k)| e^{-\kappa_1 T/2} \geqslant 2^{3/4} > 3/2$ або $|\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}| > |\mu e^{\overline{\lambda}T}|/3$ і $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda} > \ln(3/2)/T$, тобто $\rho_0(\overline{\lambda}, t)$ – аналітична в області $B_{j,2}(k)$ і

$$|\rho_0(\overline{\lambda}, t)| \leqslant \frac{3}{|\mu|} e^{\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}(t-T)} \leqslant \frac{3}{|\mu|}. \tag{22}$$

На підставі нерівностей (19) – (22) одержуємо оцінку (18).

Далі використовуємо метод математичної індукції за s. Диференціюючи тотожність $(\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T})\rho_0(\overline{\lambda}, t) \equiv e^{\overline{\lambda}t}$, отримуємо тотожність

$$\frac{t^s}{s!} e^{\overline{\lambda}t} = (\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T})\rho_s(\overline{\lambda}, t) - \mu e^{\overline{\lambda}T} \sum_{l=1}^{s} \frac{T^l}{l!} \rho_{s-l}(\overline{\lambda}, t).$$

Розділимо її на $\nu - \mu e^{\overline{\lambda}T}$ і визначимо $\rho_s(\overline{\lambda}, t)$ через $\rho_0(\overline{\lambda}, t), \rho_1(\overline{\lambda}, t), \ldots, \rho_{s-1}(\overline{\lambda}, t)$:

$$\rho_s(\overline{\lambda}, t) = \frac{t^s}{s!} \rho_0(\overline{\lambda}, t) + \mu\rho_0(\overline{\lambda}, T) \sum_{l=1}^{s} \frac{T^l}{l!} \rho_{s-l}(\overline{\lambda}, t).$$

Використовуючи (18), припускаючи виконання оцінки (17) для $\rho_0(\overline{\lambda}, t), \rho_1(\overline{\lambda}, t), \ldots, \rho_{s-1}(\overline{\lambda}, t)$ і враховуючи, що

$$|\rho_l(\overline{\lambda}, t)| \leqslant e^{l(T+1)} \Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{(l+1)} \leqslant e^{(s-1)(T+1)} \Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s},\ l = \overline{0, s-1},\ t \in [0, T],$$

маємо

$$|\rho_s(\overline{\lambda},t)| \leqslant \Big(\frac{T^s}{s!} + |\mu|\sum_{l=1}^{s}\frac{T^l}{l!}\Big)e^{(s-1)(T+1)}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1} \leqslant e^{s(T+1)}\Big(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)^{s+1},$$

що і треба було довести.

Оцінимо тепер розділені різниці різних порядків для наборів коренів многочлена $l_\varphi(\lambda,k)$.

Лема 3. *Нехай $\overline{\Lambda}(k)$ деякий s-елементний набір коренів многочлена $l_\varphi(\lambda,k)$, тоді*

$$\Big\|\int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_kL(k)Z_k^{-1},k\Big)d\tau R_{\overline{\Lambda}(k)}(\rho_0(\lambda,t))\Big\| \leqslant C_4\widetilde{k}^{n_L(n(k)-1)-sr}, \quad (23)$$

де $Z_k = \operatorname{diag}\big(\widetilde{k}^{d_1},\dots,\widetilde{k}^{d_{nm}}\big)$, C_4 *– не залежить від* k.

Доведення. Якщо $\operatorname{diam}\overline{\Lambda}(k) = |\overline{\lambda}_1(k) - \overline{\lambda}_2(k)| \geqslant \kappa_1$, то згідно з рівностями (11) функцію

$$\overline{U}(k) \equiv \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_kL(k)Z_k^{-1},k\Big)d\tau R_{\overline{\Lambda}(k)}(\rho_0(\lambda,t))$$

можна подати у вигляді $\overline{U}(k) = (\overline{\lambda}_1(k) - \overline{\lambda}_2(k))^{-1}(\overline{U}_2(k) - \overline{U}_1(k))$, де

$$\overline{U}_i(k) = \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_kL(k)Z_k^{-1},k\Big)d\tau R_{\overline{\Lambda}_i(k)}(\rho_0(\lambda,t)),$$

$\overline{\Lambda}_i(k)$ – набір одержаний із $\overline{\Lambda}(k)$ вилученням кореня $\lambda_i(k)$ або зменшенням його кратності на одиницю. Отже, $||\overline{U}(k)|| \leqslant ||\overline{U}_1(k)||/\kappa_1 + ||\overline{U}_2(k)||/\kappa_1$. Продовжуючи вилучати корені з наборів $\overline{\Lambda}_i(k)$ таких, що $\operatorname{diam}\overline{\Lambda}_i(k) \geqslant \kappa_1$, одержимо таку оцінку

$$||\overline{U}(k)|| \leqslant \sum_{s^*}\kappa_1^{-\eta_{s^*}}||\overline{U}_{1,s^*}(k)||, \quad (24)$$

де $\eta_{s^*} \in \mathbb{N}$, індекси i та s^* пробігають скінченні підмножини множини натуральних чисел,

$$\overline{U}_{i,s^*}(k) = \int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_kL(k)Z_k^{-1},k\Big)d\tau R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\rho_0(\lambda,t)),$$

$\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)$ – має $s-\eta_{s^*}$ елементів (з набору $\overline{\Lambda}(k)$) і $\operatorname{diam}\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k) < \kappa_1$. Очевидно, що вираз $\overline{U}_{i,s^*}(k)$ можна переписати у вигляді

$$\overline{U}_{i,s^*}(k) = \int_0^1\sum_{\chi=1}^{n(k)}\frac{\tau^{\chi-1}}{(\chi-1)!}l_\varphi^{(\chi)}((1-\tau)Z_kL(k)Z_k^{-1},k)d\tau R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))$$

і він допускає оцінку

$$||\overline{U}_{i,s^*}(k)|| \leqslant C_5\sum_{\chi=1}^{n(k)}\widetilde{k}^{n_L(n(k)-\chi)}|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))|. \quad (25)$$

Використовуючи формулу (10), знайдемо оцінку зверху для розділеної різниці $|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))|$, а саме:

$$|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))| \leqslant C_6 \left|\frac{\partial^{s-\eta_{s^*}-1}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))}{\partial\lambda^{s-\eta_{s^*}-1}}\right|_{\lambda=\overline{\lambda}_{s^*}(k)} \leqslant$$
$$\leqslant C_7 \sum_{g=0}^{\max(s-\eta_{s^*},\chi)-1} \frac{1}{g!}\left|\frac{\partial^g(\lambda^{\chi-1})}{\partial\lambda^g}\right|_{\lambda=\overline{\lambda}_{s^*}(k)} \left|\rho_{s-\eta_{s^*}-g-1}(\overline{\lambda}_{s^*}(k),t)\right|,$$

де $\overline{\lambda}_{s^*}(k) \in B_{j,2}(k)$ при деякому j $(1 \leqslant j \leqslant n(k))$, або, використовуючи нерівність (17),

$$|R_{\overline{\Lambda}_{i,s^*}(k)}(\lambda^{\chi-1}\rho_0(\lambda,t))| \leqslant C_8 \sum_{g=0}^{\max(s-\eta_{s^*},\chi)-1} \widetilde{k}^{(\chi-g-1)n_l}\widetilde{k}^{-(s-\eta_{s^*}-g)r} \leqslant$$
$$\leqslant C_9\widetilde{k}^{(\chi-1)n_l-(s-\eta_{s^*})r}.$$

Підставивши останню оцінку в (25), маємо

$$||\overline{U}_{i,s^*}(k)|| \leqslant C_{10}\widetilde{k}^{(n(k)-1)n_L-(s-\eta_{s^*})r},$$

тоді з оцінки (24) випливає $||\overline{U}(k)|| \leqslant C_4\widetilde{k}^{n_L(n(k)-1)-sr}$, що і треба було довести.

Доведемо тепер теорему існування розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 3. *Нехай $r < -p/2$, $\kappa \leqslant \left(4T\sqrt{2nm\sum_{k\in Z^p}\widetilde{k}^r}\right)^{-1}$, $2\kappa T\sqrt{\varepsilon} < \ln 2$, $\varepsilon > 0$, тоді, якщо $\nu \in B\setminus B_\varepsilon$ і $\varphi^j(x) \in \mathbb{H}_{q_j}$, то існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2) такий, що у разі виконання умов леми 1 правильні включення $\partial^j u_s/\partial t^j \in \mathbb{H}_{q_{sj}}$ $(q_{sj} = d_{jm+s} - d)$ для кожного $t \in [0,T]$, де $d = (b-1)n_L + (b-N_1)n_l + (b-N_h)b_h/b_1 + \sum_{g=1}^{h-1}(N_{g+1}-N_g)\beta_g/b_1 - N_1 r + \max_{s=\overline{1,nm}}(d_s - q_{s-1})$.*

Доведення. Оскільки $\nu \in B\setminus B_\varepsilon$, то формальний розв'язок задачі (1), (2) існує. З формули (12) одержимо

$$Zv(t,x) = \sum_{k\in Z^p}\int_0^1 l_\varphi^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k)Z_k^{-1}, k\Big)d\tau R_{\Lambda(k)}(\rho_0(\lambda,t))\times$$
$$\times Z_k\widehat{\varphi}(k)e^{ikx}. \tag{26}$$

Елементи набору $\Lambda(k)$ є коренями многочлена $l_\varphi(\lambda,k)$, а отже, і многочлена $l(\lambda,k)$. Отже, згідно з лемою 1, при $\widetilde{k} > K_2$ кожен набір з більше ніж N_h коренів містить хоча б одну пару коренів, відстань між якими не менша ніж $C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_h/b_1}$, кожен набір з більш ніж N_{h-1} коренів містить хоча б одну пару коренів, відстань між якими не менша ніж $C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_{h-1}/b_1}$, і так далі, кожен набір з більш ніж N_1 коренів містить хоча б одну пару коренів, відстань між якими не менша ніж

$C_2\widetilde{k}^{n_l+\beta_1/b_1}$. Використовуючи (11), одержимо нерівність

$$||v_j(t,x)||_{d_{j+1}} \leqslant C_{11} \sum_{\widetilde{k}\leqslant K_2} \Big(\sum_{i=0}^{nm-1} |\widehat{\varphi}^i(k)|^2 \widetilde{k}^{2d_{i+1}} \Big)^{1/2} + C_{12} \sum_{\widetilde{k}>K_2} \widetilde{k}^{(b-N_h)b_h/b_1} \times$$

$$\times \widetilde{k}^{(b-N_1)n_l + \sum_{g=1}^{h-1}(N_{g+1}-N_g)\beta_g/b_1} \sum_j \Big\| \int_0^1 l_{\varphi}^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau \times$$

$$\times R_{\Lambda_j(k)}(\rho_0(\lambda,t)) \Big\| \Big(\sum_{i=0}^{nm-1} |\widehat{\varphi}^i(k)|^2 \widetilde{k}^{2d_{i+1}} \Big)^{1/2},$$

де розділені різниці $R_{\Lambda_j(k)}(\rho_0(\lambda,t))$ мають порядок, не вищий ніж $N_1 - 1$, і їхня кількість (для кожного $\widetilde{k} > K_2$) не більша ніж 2^{nm}. Тоді за лемою 3

$$\Big\| \int_0^1 l_{\varphi}^{(1)}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial t} + (1-\tau)Z_k L(k) Z_k^{-1}, k\Big) d\tau R_{\Lambda_j(k)}(\rho_0(\lambda,t)) \Big\| \leqslant C_4 \widetilde{k}^{n_L(b-1)-N_1 r},$$

тобто

$$||v_j(t,x)||_{d_{j+1}} \leqslant C_{13} \sum_{k\in Z^p} \widetilde{k}^d \Big(\sum_{i=0}^{nm-1} |\widehat{\varphi}^i(k)|^2 \widetilde{k}^{2d_{i+1}} \Big)^{1/2}.$$

З станньої оцінки випливає нерівність

$$\Big\| \frac{\partial^j u_s}{\partial t^j} \Big\|_{q_s j} \leqslant C_{14} \sum_{i=0}^{nm-1} ||\varphi^i||_{q_i}$$

і доведення теореми.

---

1. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними// Укр. мат. журн. – 1996. – Т.48. – N2. – С.184-194.
2. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.
3. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М., 1988.
5. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М., 1965.
6. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М., 1978.
7. *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами// Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т.13. – N4. – С.637-645.

Il'kiv V.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NORMAL ANIZOTROPIC SYSTEMS OF PARTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

We consider time nonlocal two-point boundary value problem for general partial systems with constant coefficients in cartesian product of time interval and space multidimensional torus. This system is space derivatives anisotropic and time derivatives normal.

Existence and uniqueness conditions for solution of this problem in Sobolev spaces scale of space periodic functions are investigated. We construct this solution in the form of the hight order divided difference. The estimates for small denominators which appear by using the metrical theorie methods of diophantine approximations are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 12.02.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 96–101

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 96–101

УДК 517.518.34

OKSANA KARABYN

NST-RIESZ BASIS IN A HILBERT SPACE

1. Notion of *nst*-equivalent bases. Denote by $\mathbb{H}$ a standard separable complex Hilbert space. Bases $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{\varphi}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ of $\mathbb{H}$ are said to be *equivalent* iff $\forall i \in \mathbb{N}\, \tilde{\varphi}_i = U\varphi_i$ for some $U \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ such that $\ker U = \{0\}$ and $U^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$. If this holds U is called the equivalency of (φ_i) and $(\tilde{\varphi}_i)$. Equivalent bases (φ_i), $(\tilde{\varphi}_i)$ are said to be *nst-equivalent* iff its equivalency U and U^{-1} are uniformly nearstandard operators, i.e. there exist standard operators ${}^\circ U$, $({}^\circ U)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ (${}^\circ U$ is the shadow of U) such that $\|U - {}^\circ U\| \approx 0$, $\|U^{-1} - ({}^\circ U)^{-1}\| \approx 0$ (read "is infinitesimal" for "≈ 0"). Note that the above defined relation is a genuine equivalency.

Observe that bases (ψ_i), $(\tilde{\psi}_i)$, associated biorthogonal to nst-equivalent bases (φ_i), $(\tilde{\varphi}_i)$ are also nst-equivalent.

For $x \in \mathbb{H}$ such that $\|x\| \ll \infty$ there exists a unique standard vector ${}^\circ x \in \mathbb{H}$ (*shadow* of x) such that for any standard $y \in \mathbb{H}$ $\quad ({}^\circ x|y) \approx (x|y)$. For a given sequence $(\varphi_i) \subset \mathbb{H}$ such that for standard $i \in \mathbb{N}$ $\quad \|\varphi_i\| \ll \infty$, there exists, by standardization principle, a unique standard sequence $(\mathring{\varphi}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, such that $\mathring{\varphi}_i = {}^\circ\varphi_i$ for standard $i \in \mathbb{N}$. This sequence $(\mathring{\varphi}_i)$ is called the *shadow* of the sequence (φ_i).

Let (φ_i) be a basis of $\mathbb{H}$ for which $\|\varphi_i\| \ll \infty$ for standard $i \in \mathbb{N}$. Suppose that its shadow $(\mathring{\varphi}_i)$ is also a basis and (φ_i), $(\mathring{\varphi}_i)$ are equivalent with equivalency U, such that $\|U - I\| \approx 0$. Then (φ_i) is said to be a *nearstandard* basis.

It is easy to see that a basis (ψ_i) assosiated to a nearstandard basis (φ_i) is nearstandard too. Indeed, $\|U - I\| \approx 0$ implies $\|(U^*)^{-1} - I\| \approx 0$.

1.1. Proposition. *Let (φ_i) and $(\tilde{\varphi}_i)$ are nst-equivalent bases of $\mathbb{H}$. Then (φ_i) is nearstandard iff so is $(\tilde{\varphi}_i)$. The shadow ${}^\circ U$ of the equivalency U of φ_i and $\tilde{\varphi}_i$ is the equivalency of $(\tilde{\varphi}_i)$ and $\left(\mathring{\tilde{\varphi}}_i\right)$.*

Proof. Assume that $\mathring{\varphi}_i = V\varphi_i$, where $\|V - I\| \approx 0$ and $\tilde{\varphi}_i = U\varphi_i$, where U is uniformly nearstandard. Define $\forall i \in \mathbb{N}$ $\quad \hat{\varphi}_i = ({}^\circ U)\mathring{\varphi}_i$. Then $(\hat{\varphi}_i)$ is a standard basis of $\mathbb{H}$ which is equivalent to $(\mathring{\varphi}_i)$ with the standard equivalency ${}^\circ U$. Set $V_1 := ({}^\circ U)VU^{-1}$. Then ${}^\circ V_1 = ({}^\circ U)I^\circ(U^{-1}) = I$ and $\|V_1 - I\| \approx 0$. It is easy to check that $\hat{\varphi}_i = V_1\tilde{\varphi}_i$. Therefore, $(\tilde{\varphi}_i)$ is nearstandard and $(\hat{\varphi}_i) = (\mathring{\tilde{\varphi}}_i)$.

It is also so easy to prove the following

1.2. Proposition. *The shadow of a nearstandard orthonormal basis is an orthonormal basis.*

Let (φ_i) be a nearstandard basis of $\mathbb{H}$. Consider an arbitrary vector $x \in \mathbb{H}$ and denote by (c_i) the sequence of coordinates of x: $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i\varphi_i$. Suppose that $\|x\| \ll \infty$, then $|c_i| \ll \infty$ for standard $i \in \mathbb{N}$ and there exists a unique standard ${}^\circ c_i \in \mathbb{C}$ such that $c_i \approx {}^\circ c_i$ By standardization principle of IST there exists a unique standard sequence $(\mathring{c}_i)$ in $\mathbb{C}$ such that $\mathring{c}_i = {}^\circ c_i$ for standard $i \in \mathbb{N}$.

1.3. Proposition. *In the above assumption we have*

$$ {}^\circ x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathring{c}_i\mathring{\varphi}_i, \tag{1.1}$$

where $(\mathring{\varphi}_i)$ is the shadow of the basis (φ_i).

Proof. As it was noted the assosiated basis (ψ_i) is nearstandard too. Hence $\forall i \in \mathbb{N}$ $\|\mathring{\psi}_i - \psi_i\| \approx 0$. Whence $\|\psi_i\| \ll \infty$ for standard $i \in \mathbb{N}$. Because $\|x\| \ll \infty$ we have $|(x|\psi_i)| \ll \infty$ for standard $i \in \mathbb{N}$. Therefore indeed $|c_i| \ll \infty$ and the sequence $(\mathring{c}_i)$ is well defined above. Observe that ${}^\circ x = \sum_{i\in\mathbb{N}} ({}^\circ x|\mathring{\psi}_i)\mathring{\varphi}_i$, but for standard $i \in \mathbb{N}$ we have $({}^\circ x|\mathring{\psi}_i) = {}^\circ(x|\mathring{\psi}_i) = {}^\circ(x|\psi_i) = \mathring{c}_i$.

2. nst-Riesz basis. Recall that a basis (φ_i) is said to be a Riesz basis iff it is equivalent to an orthonormal basis [2]. A basis which is nst-equvalent to a Riesz basis is called an *nst-Riesz basis*. Obviously, each nst-Riesz basis is a Riesz basis.

2.1. Proposition. *(i) A basis is an nst-Riesz basis iff it is nearstandard and its shadow is a Riesz basis.*

(ii) A basis is an nst-Riesz basis iff it is nst-equivalent to some standard orthonormal basis.

Proof. (i) Let (φ_i) be an nst-Riesz basis. Denote by U the (uniformly nearstandard) equivalency of (φ_i) and a standard Riesz basis $(\tilde{\varphi}_i)$. Set $\hat{\varphi}_i := ({}^\circ U)^{-1}\tilde{\varphi}_i$. Since $U\varphi_i = \tilde{\varphi}_i$, we have $({}^\circ U)^{-1}U\varphi_i = \hat{\varphi}_i$. Therefore $({}^\circ U)^{-1}U$ is an equivalency of (φ_i) and $(\hat{\varphi}_i)$. But $\|({}^\circ U)^{-1}U - I\| \approx 0$ and $\hat{\varphi}_i$ is standard. Hence $(\hat{\varphi}_i)$ is the shadow $(\mathring{\varphi}_i)$. Because $(\tilde{\varphi}_i)$ and $(\hat{\varphi}_i)$ are equivalent, $(\mathring{\varphi}_i)$ is a Riesz basis. The converse is evident.

(ii) Let (φ_i) be an nst-Riesz basis. Then $(\mathring{\varphi}_i)$ is a standard Riesz basis. By definition and transfer principle, $(\mathring{\varphi}_i)$ is equivalent to the standard orthonormal basis (e_i) with a standard equivalency. By transitivity of the nst-equivalence, (φ_i) and (e_i) are nst-equivalent. Since each orthonormal basis is a Riesz basis, the converse is evident.

2.2. Corollary. *Let (φ_i) be an nst-Riesz basis. Then the constants γ_1, γ_2 in the Parseval inequality*

$$\forall x \in \mathbb{H} \quad \gamma_1\|x\|^2 \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} |(x|\psi_i)|^2 \leqslant \gamma_2\|x\|^2, \tag{2.1}$$

are appreciables numbers i.e. $0 \ll \gamma_1 < \gamma_2 \ll \infty$.

Proof. Let U be the uniformly nearstandard equivalency of (φ_i) and standard orthonormal basis (e_i). Therefore $\sum_{i\in\mathbb{N}} |(x|\psi_i)|^2 = \|Ux\|^2$. Because $\|Ux\| \leqslant \|U\|\|x\|$ and

$\|x\| \leqslant \|U^{-1}\|\|Ux\|$, (2.1) holds for $\gamma_1 = \|U^{-1}\|^{-1}$ and $\gamma_2 = \|U\|$. Since U and U^{-1} are uniformly nearstandard, the constants γ_1 and γ_2 are appreciables.

Recall that a vector $x \in \mathbb{H}$ such that $\|x\| \ll \infty$ is said to be (strongly) nearstandard iff $\|x - {}^\circ x\| \approx 0$.

2.3. Theorem. *Let (φ_i) be an nst-Riesz basis. A vector $x \in \mathbb{H}$, such that $\|x\| \ll \infty$ is nearstandard iff for any infinite $n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{i>n} |c_i|^2 \approx 0, \tag{2.2}$$

where (c_i) is the sequence of coordinates of x: $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i\varphi_i$.

Proof. As it is well known (see e.g. [4] or [5]), a vector $x \in \mathbb{H}$, such that $\|x\| \ll \infty$ is nearstandard iff for a standard orthonormal basis (e_i) $\sum_{i>n} |(x|e_i)|^2 \approx 0$ holds for any infinite $n \in \mathbb{N}$. Let (ψ_i) be the associated basis for (φ_i) and a standard orthonormal basis (e_i). It easy to check that $c_i = (x|\psi_i) = (Ux|e_i)$. Therefore (2.2) is a necessary and sufficient condition for Ux to be nearstandard. Because the equivalency U (and also U^{-1}) is uniformly nearstandard, Ux is nearstandard iff so is x. (Note that ${}^\circ(Ux) = ({}^\circ U)({}^\circ x)$).

2.4 Remark. For each orthonormal sequence (e_i) in $\mathbb{H}$, by standardization principle we can construct a unique standard sequence $(\hat{e}_i)$, such that $\hat{e}_i = {}^\circ e_i$ for standard $i \in \mathbb{N}$. By transfer principle, $(\hat{e}_i)$ is orthonormal. It is not difficult to prove (using Robinson's lemma) that $(\hat{e}_i)$ is a basis iff so is (e_i) and $\sum_{i>n} |(x|e_i)|^2 \approx 0$ holds for any standard x and any infinite $n \in \mathbb{N}$.

2.5 Remark. Let (φ_i) be a basis of $\mathbb{H}$. As it is known (see e.g. [2]), (φ_i) is a Riesz basis iff for any bijection $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(\varphi_{\pi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ is a basis as well. Suppose that the basis (φ_i) is nearstandard. Then $(\varphi_{\pi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ is a nearstandard basis iff the bijection π is standard. For proof use the following

Remark. Let f, g be bijections with $\mathrm{dom} f = \mathrm{im} g$. Suppose that f is standard. Then $f \circ g$ is standard iff so is g.

3. Infinitesimal perturbation of basis. Introduce the following notion. A sequence (γ_i) in $\mathbb{H}$ is said to be *uniformly infinitesimal* iff for arbitrary $(c_i) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i\leqslant n} |c_i|^2 \leqslant 1 \implies \|\sum_{i\leqslant n} c_i\gamma_i\| \approx 0. \tag{3.1}$$

3.1. Lemma. *Let (γ_i) be an uniformly infinitesimal sequence in $\mathbb{H}$. Then for any $c = (c_i) \in \ell_2$ the series $\sum_{i\in\mathbb{N}} c_i\gamma_i$ is convergent. The operator Γ, defined by*

$$\forall c \in \ell_2 \ \Gamma c = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i\gamma_i \tag{3.2}$$

belongs to $\mathcal{B}(\ell_2; \mathbb{H})$ and $\|\Gamma\| \approx 0$.

Proof. Let ε be the lest upper bound of $\|\sum_{i\leqslant n} c_i\gamma_i\|$ for $n \in \mathbb{N}$ and $\sum_{i\in\mathbb{N}} |c_i|^2 \leqslant 1$. By (3.1) $\varepsilon \approx 0$. At first define Γ by (3.2) for c satisfying $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall i > n)(c_i = 0)$. Then $\|\Gamma c\| \leqslant \varepsilon\|c\|$. Because such c are dense in ℓ_2 we can extend Γ onto all $c \in \ell_2$ and get $\Gamma \in \mathcal{B}(\ell_2, \mathbb{H})$, $\|\Gamma\| \approx 0$.

3.2 Definition. Sequences (φ_i), $(\tilde{\varphi}_i)$ in $\mathbb{H}$ are said to be (uniformly) infinitely close iff the sequence $(\varphi_i - \tilde{\varphi}_i)$ is uniformly infinitesimal.

3.3. Proposition. *Let (φ_i) be a Riesz basis in $\mathbb{H}$. Suppose that for an equivalency U of (φ_i) and some orthonormal basis (e_i)*

$$\|U\| \ll \infty \tag{3.3}$$

holds. Then each infinitely close to (φ_i) sequence $(\tilde{\varphi}_i)$ is a Riesz basis.

Proof. Denote by (ψ_i) the basis associated whith (φ_i) and set

$$\forall x \in \mathbb{H} \quad \Delta x = ((x|\psi_i))_{i \in \mathbb{N}}. \tag{3.4}$$

Since $\psi_i = U^* e_i$ $\|\Delta x\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |(Ux|e_i)|^2 = \|Ux\|^2$. In particular $\|\Delta\| = \|U\| \ll \infty$. Let Γ be operator (3.2) for $\gamma_i := \varphi_i - \tilde{\varphi}_i$. It is easy to check that

$$\tilde{\varphi}_i = (I + \Gamma\Delta)\varphi_i. \tag{3.5}$$

But $\|\Gamma\Delta\| \approx 0$. Therefore $\ker(I + \Gamma\Delta) = \{0\}$ and $(I + \Gamma\Delta)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$. Since $\tilde{\varphi}_i = (I + \Gamma\Delta)U^{-1}e_i$, $(I + \Gamma\Delta)U^{-1}$ is an equivalency of (e_i) and $(\tilde{\varphi}_i)$.

3.4. Theorem. *A sequence $(\tilde{\varphi}_i)$ which is infinitely close to nst-Riesz basis (φ_i) is an nst-Riesz basis.*

Proof. Let U be the uniformly nearstandard equivalency of (φ_i) and a standard orthonormal basis (e_i) (see 2.1 (ii)). Since $U\varphi_i = e_i$, by (3.5) we have $U(I+\Gamma\Delta)^{-1}\tilde{\varphi}_i = e_i$ (notation as above). Thus $U(I + \Gamma\Delta)^{-1}$ is an equivalency of $(\tilde{\varphi}_i)$ and (e_i). But $\|U(I + \Gamma\Delta) - {}^\circ U\| \approx 0$ (because $\|\Gamma\Delta\| \approx 0$). Therefore $U(I + \Gamma\Delta)^{-1}$ is uniformly nearstandard.

Remark. In condition of theorem 3.4, (φ_i) and $(\tilde{\varphi}_i)$ have common shadow. This follows from proposition 1.1, because ${}^\circ(U(I + \Gamma\Delta)) = {}^\circ U$.

Example.(Contribution to some Paley–Wiener theorem; see [6], [7]). Consider the functions $\varphi_n(t) = (2\pi)^{-1/2}\exp(i\lambda_n t)$ as elements of the standard Hilbert spase $\mathbb{H} = L_2(-\pi, \pi)$. Suppose that $\max_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n - n| \ll \pi^{-1}\ln 2$. Denote by $(\mathring{\lambda}_n)_n \in \mathbb{Z}$ the (unique) standard sequence of complex numbers such that $\mathring{\lambda}_n \approx \lambda_n$ for standard $n \in \mathbb{N}$. Assume that $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_n - \mathring{\lambda}_n| \approx 0$. Then (φ_n) is an nst-Riesz basis of $L_2(-\pi, \pi)$ with the shadow which consists of $(2\pi)^{-1/2}\exp(i\mathring{\lambda}_n t), n \in \mathbb{Z}$. The proof is almost the same as in [7].

4.Diagonal operators. Note that each operator $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ such that $\|A\| \ll \infty$, has a shadow ${}^\circ A$ which is defined as a standard element of $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, such that $({}^\circ Ax|y) \approx (Ax|y)$ for arbitrary standard $x, y \in \mathbb{H}$. If for any standard $x \in \mathbb{H}$ $\|(A - {}^\circ A)x\| \approx 0$ then A is said to be *nearstandard*, and if $\|A - {}^\circ A\| \approx 0$ then A is said to be *uniformly nearstandard.* Let (φ_i), $(\tilde{\varphi}_i)$ be biorthogonal bases in $\mathbb{H}$. Then to $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ there corresponds the matrix with elements $a_{i,j} = (A\psi_j|\varphi_i)_{j \in \mathbb{N}}$. Suppose that the basis (φ_i) is nearstandard (therefore so is (ψ_i)), and $\|A\| \ll \infty$. It is easy to check that $(\mathring{a}_{i,j})$, defined as a standard matrix such that for standard $i, j \in \mathbb{N}$ $\mathring{a}_{i,j} = {}^\circ(a_{i,j})$, is the matrix of the shadow ${}^\circ A$ with respect to the shadows of bases (φ_i), (ψ_i), i.e. $\mathring{a}_{i,j} = ({}^\circ A\mathring{\psi}_{i,j}|\mathring{\varphi}_i)$.

Somewhat more concrete information concerns operators of the form

$$\forall x \in \mathbb{H} \quad Ax = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i (x|\psi_i)\varphi_i. \tag{4.1}$$

4.1. Theorem. *Let (the eigenvectors of A) φ_i forms an nst-Riesz basis of $\mathbb{H}$. Then A is (strongly) nearstandard, iff $\forall i \in \mathbb{N}$ $|\lambda_i| \ll \infty$. Denote by $(\overset{\circ}{\lambda}_i)$ a standard sequence in $\mathbb{C}$ such that $\overset{\circ}{\lambda}_i \approx \lambda_i$ for standard $i \in \mathbb{N}$. Then A is uniformly nearstandard iff $\forall i \in \mathbb{N}$ $\overset{\circ}{\lambda}_i \approx \lambda_i$.*

Proof is not difficult, it is based only on theorem 2.3 and Robinson lemma.

4.2 Warning. Let p be some bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. For operator (4.1) define $(pA)x := \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{p(i)}(x|\psi_i)\varphi_i$. Then A and pA are *similar*. Suppose $\forall i \in \mathbb{N}$ $|\lambda_i| \ll \infty$ and (φ_i) is an nst-Riesz basis. Assume that the bijection p is standard. Then A and pA a both (strongly) nearstandard and so are their shadows ${}^\circ A$ and ${}^\circ(pA)$. But in general this is not true.

Remark. Recall that an operator $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ is said to be S-compact iff $\|x\| \ll \infty$ implies that Ax is nearstandard. Suppose that (φ_i) is an nst-Riesz basis. Then operator (4.1) is S-compact, iff $\forall i \in \mathbb{N}$ $|\lambda_i| \ll \infty$ and $\lambda_i \approx 0$ for nonstandard $i \in \mathbb{N}$. If this holds, then ${}^\circ A$ is a standard *compact* operator.

5. Unbounded operators. In order to define the shadow ${}^\circ A$ whenever $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ but $\|A\| \approx \infty$ use the concept of *graph-nearstandardness* [9]. Denote by $\mathrm{dom}_{nst}A$ the set of nearstandard $x \in \mathbb{H}$ for which Ax is nearstandard. Suppose that for each infinitesimal $u \in \mathrm{dom}_{nst}A$ the vector Au is infitesimal. Then the shadow of the graph of A is the graph of some standard map, which by definition is the shadow ${}^\circ A$ of A. This ${}^\circ A$ is optionally an element of $\mathcal{B}(\mathbb{H})$, but it is a *standard closed* operator. Thus $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ is graph-nearstandard iff ${}^\circ(\mathrm{graph}A) = \mathrm{graph}({}^\circ A)$.

5.1. Theorem. *Let (φ_i) be a nst-Riesz basis and $|\lambda| \ll \infty$ for any standard $i \in \mathbb{N}$. Then the operator (4.1) is graph-nearstandard. Its shadow is the standard closed densely defined operator ${}^\circ A$ such that* $\mathrm{dom}({}^\circ A)$ *is the set of $x \in \mathbb{H}$ for which the series $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\overset{\circ}{\lambda}_i(x|\overset{\circ}{\psi}_i)|^2$ converges, and for $x \in \mathrm{dom}^\circ A$ $({}^\circ A)x = \sum_{i\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\lambda}_i(x|\overset{\circ}{\psi}_i)\overset{\circ}{\varphi}_i$.*

Proof. Let $u \approx 0$ and $u \in \mathrm{dom}_{nst}A$. By Robinson lemma there exists an infinite $k \in \mathbb{N}$ such that $\sum_{i\leqslant k} |\lambda_i(u|\psi_i)|^2 \approx 0$. By theorem 2.3 $\sum_{j>k} |\lambda_j(u|\psi_j)|^2 \approx 0$. By the Parseval inequality for nst-Riesz basis $Au \approx 0$. Thus A is graph-nearstandard. Let $x \in \mathbb{H}$ be standard and the series $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\overset{\circ}{\lambda}_i(x|\overset{\circ}{\psi}_i)|^2$ converges. Set $y := \sum_{i\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\lambda}_i(x|\overset{\circ}{\psi}_i)\overset{\circ}{\varphi}_i$, this y is standard (as a sum of a standard convergent series). Find infinite $k \in \mathbb{N}$ for which $\sum_{i\leqslant k} \|(x|\overset{\circ}{\psi}_i)\overset{\circ}{\varphi}_i - (x|\psi_i)\varphi_i\| \approx 0$ and $\sum_{i\leqslant k} \|\overset{\circ}{\lambda}_i(x|\overset{\circ}{\psi}_i)\overset{\circ}{\varphi}_i - \lambda_i(x|\psi_i)\varphi_i\| \approx 0$. For this k define $x_1 := \sum_{i\leqslant k}(x|\psi_i)\varphi_i$. Then $x_1 \approx x$, in particular x_1 is nearstandard. It is easy to check that $Ax_1 \approx y$. This means that $(x, y) \in {}^\circ(\mathrm{graph}A)$, i.e. $({}^\circ A)x = y$. For the transfer principle the part ($\Longrightarrow$) is proved. Conversely, suppose that $x \approx x_1$, where $x_1 \in \mathrm{dom}_{nst}A$. Then $({}^\circ A)x = {}^\circ(Ax_1) = {}^\circ(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i(x|\psi_i)\varphi_i)$. Since ${}^\circ(\lambda_i(x|\psi_i)) = \overset{\circ}{\lambda}_i(x|\overset{\circ}{\psi}_i)$, for standard $i \in \mathbb{N}$ by *Proposition 1.3* ${}^\circ(Ax_1) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{\lambda}_i(x|\overset{\circ}{\psi}_i)\overset{\circ}{\varphi}_i$. In particular we see that $\sum_{i\in\mathbb{N}} |\overset{\circ}{\lambda}_i(x|\overset{\circ}{\psi}_i)|^2$ converges.

5.2 Example. Denote by T the interval $[0, 2\pi[$ considered as an additive group with the addition $\mathrm{mod}(2\pi)$. Let $\mathbb{H} = L_2(T)$ with the standard Lebesgue measure. For an infinitesimal $h > 0$ define

$$\forall x \in \mathbb{H} \quad Ax(t) = \frac{1}{h^2}[x(t+2h) - 2x(t+h) + x(t)],\ t \in T. \tag{5.1}$$

Then $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ but $||A|| = \dfrac{1}{h^2} \approx +\infty$. Rewrite (5.1) as $A = \dfrac{1}{h^2}(S-I)^2$, where S is the shift $Sx(t) = x(t+h)$. The eigenvalues and eigenfunctions of S are e^{int} and $t \longmapsto e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$. Therefore the eigenvalues of A are $\lambda_n = \dfrac{1}{h^2}(e^{inh} - I)^2$ with the same eigenfunctions. We see that A is unitary equivalent to the operator $\widehat{A}$ in $\widehat{H} = \ell_2(\mathbb{Z})$ of multiplication by λ_n. Since $\lambda_n \approx -n^2$ for standard $n \in \mathbb{Z}$, $|\lambda_n| \ll \infty$ for such n. Therefore $\widehat{A}$ (and A) is graph-nearstandard. Its shadow ${}^\circ\widehat{A}$ is the multiplication by $\overset{\circ}{\lambda}_n = -n^2$ in $\widehat{H}$ and $\mathrm{dom}({}^\circ\widehat{A}) = \{(c_n) \in \ell_2(\mathbb{Z}) : \sum |n^2 c_n|^2 \text{ converges }\}$.

Hence $\mathrm{dom}({}^\circ A) = \{x \in \mathbb{H} : \quad x', x'' \in \mathbb{H}\}$, ${}^\circ Ax = x''$. Observe that λ_n are placed on *infinitely large cardioid* with the equation $\rho = \frac{2}{h^2}(1 + cos\varphi)$ in polar coordinates. The shadow of this curve is the union of the right and left *shores* of negative real semiaxis $\mathbb{R}_-$ on which the eigenvalues $\overset{\circ}{\lambda}_n = -n^2$ of ${}^\circ A$ are placed.

---

1. *Krein M.* On the Bary bases of the Hilbert spases// Uspekhi mat. nauk. – 1957. – Vol. 12. – N 3. – C. 333-341 (in Russian).
2. *Gohberg I.C., Krein M.G.* Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators. – M., 1965 (in Russian).
3. *Nelson E.* Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis// Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – Vol. 83. – P.1165-1198.
4. *Davis M.* Applied nonstandard analysis. – M., 1980 (in Russian).
5. *Diener F., Reeb G.* Analyse Nonstandard. – Hermann, Paris, 1989.
6. *Paley R.E.A., Wiener N.* Fourier transforms in complex domain. – New York, 1934.
7. *Duffin R.J., Eachus J.J.* Some notes on an expansion theorem of Paley and Wiener// Bul. Amer. Math. Soc. – 1942. – Vol. 48. – P.850-855.
8. *Bary N.K.* Biorthogonal systems and bases in Hilbert spase// Uch. Zap. Moscow State University. – 1951. – Vol. 4. – N 148. – C.69-107.
9. *Lyantse V.* Nearstandardness on finite set. – Dissert. Math. CCCLXIX, Warszawa, 1997.
10. *Lyantse V., Kudryk T.* Introduction to nonstandard analysis.– Mathematical Studies, Monograph Series, 1998.

Карабін О.

NST-БАЗИ РІСА У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Розглянуто деякі нестандартні аспекти теорії баз, введено поняття nst-бази Ріса. На підставі праці Нельсона про внутрішню теорію множин наведено умови колостандартності вектора в базі Ріса, розглянуто бази, нескінченно близькі до nst-баз Ріса, означена тінь необмеженого оператора.

Стаття надійшла до редколегії 09.06.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 102–113

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 102–113

УДК 517.95

Марія Колінько, Сергій Лавренюк

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ФУР'Є ДЛЯ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Нехай Ω – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $T < \infty$; $S_T = \partial\Omega \times (-\infty, T)$. Розглянемо в Q_T систему рівнянь

$$\mathcal{A}(u) \equiv u_t + \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} H_\alpha(x,t) D^\alpha u -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) u_{x_j t})_{x_i} + \mathcal{B}(u) + G(x,t)u = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t), \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_T} = 0, \quad i = 0, \ldots, l-1, \qquad (2)$$

де

$$\mathcal{B}(u) = -\sum_{i=1}^{n} (C_i(x)\theta_i)_{x_i},$$

$l > 1$, $A_{\alpha\beta}$, B_{ij}, H_α, G – квадратні матриці розміру $N \times N$; $C_i(x) = \operatorname{diag}\{c_1^i(x), \ldots, c_N^i(x)\}$, $i = 1, \ldots, n$; $\theta_i = \operatorname{colon}(|u_{1,x_i}|^{p-2} u_{1,x_i}, \ldots, |u_{N,x_i}|^{p-2} u_{N,x_i})$, $i = 1, \ldots, n$; $p > 2$; $u = \operatorname{colon}(u_1, \ldots, u_N)$; $F_\alpha = \operatorname{colon}(f_{1\alpha}, \ldots, f_{N\alpha})$, $|\alpha| \leqslant 1$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n;$$

ν – зовнішня нормаль до S_T. Мета праці – знайти умови існування розв'язку задачі Фур'є (задачі без початкових умов) (1), (2). Єдиність розв'язку цієї задачі доведено в праці авторів [1]. Зауважимо, що задачу Фур'є для лінійних параболічних рівнянь і систем досліджували раніше багато авторів [2 – 5]. У цих працях виділено клас єдиності та існування розв'язків задачі Фур'є у різних функціональних просторах. Зокрема, для єдиності розв'язку треба, щоб при $t \to -\infty$ розв'язок зростав не швидше, ніж $\exp(-at)$, причому стала a залежить від даних задачі. Для нелінійних параболічних рівнянь у працях [6, 7] одержано умови існування й єдиності розв'язку задачі Фур'є незалежно від поведінки при $t \to -\infty$. У працях [8 – 11] вивчено задачі Фур'є для деяких псевдопараболічних рівнянь і систем, а також псевдопараболічних варіаційних нерівностей.

Говоритимемо, що для коефіцієнтів системи (1) виконуються відповідно умови (A), (B), (C), (G), якщо:

(A): $A_{\alpha\beta}(x) \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l$;

$$\int\limits_\Omega \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x)D^\beta w, D^\alpha w)dx \geqslant a_0 \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha w|^2 dx,$$

$a_0 > 0, \forall w \in (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N$;

(B): $B_{ij}(x,t), B_{ijt}(x,t) \in L^\infty(Q_T)$; $B_{ij}(x,t) = B_{ji}(x,t)$; $B_{ij}(x,t) = B^*_{ij}(x,t)$, $i,j = 1,\ldots,n$; майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

$$\sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)\xi_i, \xi_j) \geqslant b_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \quad b_0 > 0,$$

для всіх $\xi_i \in \mathbb{R}^N$ і майже для всіх $(x,t) \in Q_T$;

(C): $C_i \in L^\infty(\Omega)$, $i = 1,\ldots,n$; $c^i_k(x) \geqslant c_0 > 0$, майже для всіх $x \in \Omega; j = 1,\ldots,n; k = 1,\ldots,N$;

(G): $G \in L^\infty(Q_T)$; $(G(x,t)\xi,\xi) \geqslant g_0(t)|\xi|^2$, $g_0 \in L^\infty(-\infty,T)$, для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ і майже для всіх $(x,t) \in Q_T$.

Тут через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток у просторі $\mathbb{R}^N$. Позначимо через V рефлексивний банахів простір

$$V = (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N.$$

Зауважимо, що у просторі $(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N$ можна ввести еквівалентну норму

$$\|u\|^{(1)}_{(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N} = \left(\int\limits_\Omega |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}; \quad |u_x|^2 = \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^2.$$

Введемо у просторі V норму за формулою

$$\|u\|_V = \|u\|_{(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N} + \|u\|^{(1)}_{(\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N}.$$

Очевидно, виконуються неперервні вкладення

$$V \subset (L^2(\Omega))^N \subset V^*, \text{ де } V^* = (H^{-l}(\Omega))^N + (W^{-1,q}(\Omega))^N, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Крім того, надалі будуть використані нерівності Фрідріхса ([12], ст. 44):

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2 dx \leqslant \gamma_{l,j} \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2 dx,$$

$j = 0,\ldots,l$, правильні для будь-яких $v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega)$, де сталі $\gamma_{l,j}$ залежать від Ω, l, n. Введемо позначення:

$$h_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} \|H_\alpha(x,\tau)\|^2; \quad h_1 = \inf_{(-\infty,T)} h_0(t);$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad g_0(t) \geqslant 0, \\ g_0(t), & \text{якщо} \quad g_0(t) < 0. \end{cases} \qquad g_2 = \inf_{(-\infty,T)} \sup_{(-\infty,t)} g_1(\tau).$$

Означення. *Функцію $u(x,t)$, яка задовольняє включення*

$$u \in L^2_{\text{loc}}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N) \cap L^p_{\text{loc}}((-\infty,T]; (\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega))^N),$$
$$u_t \in L^2_{\text{loc}}((-\infty,T); (\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$$

і рівність

$$\int\limits_{Q_T} \Big[(u_t, v) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) u_{x_i t}, v_{x_j}) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (C_i(x)\theta_i, v_{x_i}) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha u, v) + (G(x,t)u, v) \Big] dxdt =$$
$$= \int\limits_{Q_T} \sum_{|\alpha| \leqslant 1} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v) dxdt$$

для довільної функції $v \in (C_0^\infty(Q_T))^N$, називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1), (2).

Теорема. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови (A), (B), (C), (G) і, крім того, $l > 1$; $\partial\Omega \in C^l$; $H_\alpha \in L^\infty(Q_T)$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant l$; $F_\alpha \in L^\infty_{\text{loc}}((-\infty;T]; (L^2(\Omega))^N)$, $|\alpha| \leqslant 1$. Тоді існує узагальнений розв'язок $u(x,t)$ задачі (1), (2), причому $u \in L^\infty_{\text{loc}}((-\infty;T]; V)$, $u_t \in L^2_{\text{loc}}((-\infty;T]; (\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$.*

Доведення. Розглянемо послідовність задач

$$\mathcal{A}(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha^{(k)}(x,t), \; (x,t) \in Q_{T-k,T},$$
$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_{S_{T-k,T}} = 0, \; i = 0, \ldots, l-1, \quad u(x, T-k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

де $S_{T-k,T} = \partial\Omega \times (T-k, T)$,

$$F_\alpha^{(k)}(x,t) = \begin{cases} F_\alpha(x,t), & (x,t) \in Q_{T-k,T}, \\ 0, & (x,t) \in Q_{T-k}. \end{cases}$$

Згідно з теоремою, доведеною в праці [14], існує узагальнений розв'язок $u^k(x,t)$ задачі (3). Зокрема, якщо продовжити $u^k(x,t)$ нулем на Q_{T-k} і прийняти

$$u^k(x,t) = v^k(x,t) e^{\lambda t}, \quad \lambda > 0,$$

то функція $v^k(x,t)$ задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T} e^{\lambda t} \Big[(v_t^k, w) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta v^k, D^\alpha w) + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) v^k_{x_i t}, w_{x_j}) +$$
$$+ \lambda \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) v^k_{x_i}, w_{x_j}) + \sum_{i=1}^{n} (C_i(x) \varkappa_i^k, w_{x_i}) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha v^k, w) +$$

$$+((G(x,t)+\lambda E)v^k;w)\Bigg]dxdt=\int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F^k_\alpha(x,t),D^\alpha w)dxdt \tag{4}$$

для довільної функції $w\in(C_0^\infty(Q_T))^N$. Нехай $\tau\in(-\infty,T)$ – довільне фіксоване число таке, що $\tau+1\leqslant T$. Розглянемо область $Q_{\tau-1,T}$. Очевидно, рівність (4) збережеться, якщо за функцію $w(x,t)$ взяти функцію з простору $L^\infty((\tau-1,T);V)$ і $w(x,t)=0$ майже всюди в $Q_{\tau-1}\cup Q_{t_0,T}$, де $t_0\in[\tau,\tau+1]$. Приймемо в (4)

$$w(x,t)=\begin{cases} q_\tau v^k(x,t)e^{-\lambda t}, & (x,t)\in Q_{\tau-1,t_0},\\ 0, \quad (x,t)\in Q_{\tau-1}\cup Q_{t_0,T}, \end{cases}$$

де $q_\tau(t)=q(t-\tau)$; $q(t)\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $0\leqslant q(t)\leqslant 1$, $q'(t)\geqslant 0$ на $\mathbb{R}^1$; $q(t)=0$ на $(-\infty,-1]$, $q(t)=\exp\left(-\dfrac{1}{1+t}\right)$ на $\left(-1,-\dfrac12\right]$, $q(t)\geqslant e^{-2}$ на $\left(-\dfrac12,+\infty\right)$, причому $q(t)=1$ на $[0,+\infty)$ [6, с.24]. Легко перевірити, що

$$\sup_{t>-1}\frac{q'(t)}{q^\nu(t)}\leqslant q_0(\nu)$$

для довільних $\nu(\nu<1), q_0(\nu)\equiv\mathrm{const}>0$. Перевіримо й оцінимо кожний доданок рівності (4) окремо:

$$\Im_1=\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}(v_t^k,q_\tau(t)v^k)dxdt=\frac12\int\limits_{\Omega_{t_0}}|v^k|^2dx-\frac12\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}q'_\tau(t)|v^k|^2dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega_{t_0}}|v^k|^2dx-\frac{\gamma_{1,0}}{2}\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}q'_\tau(t)|v^k_x|^2dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega_{t_0}}|v^k|^2dx-\frac{\gamma_{1,0}\varepsilon}{p}\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}q_\tau(t)|v^k_x|^2dxdt-\frac{\mu_1}{2}\varepsilon^{\frac{2}{2-p}},$$

$$\text{де}\quad \varepsilon>0,\quad \mu_1=\frac{2(p-2)\gamma_{1,0}q_0^{\frac{p}{p-2}}\operatorname{mes}\Omega}{p};$$

$$\Im_2=\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v^k,D^\alpha v^k)q_\tau(t)dxdt\geqslant a_0\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha v^k|^2q_\tau(t)dxdt;$$

$$\Im_3=\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{i,j=1}^n[(B_{ij}(x,t)v^k_{x_it},v^k_{x_j})+\lambda\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)v^k_{x_i},v^k_{x_j})]q_\tau(t)dxdt=$$

$$=\frac12\int\limits_{\Omega t_0}\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t_0)v^k_{x_i},v^k_{x_j})dx+\frac12\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{i,j=1}^n((2\lambda B_{ij}(x,t)-$$

$$-B_{ijt}(x,t))v^k_{x_i},v^k_{x_i})q_\tau(t)dxdt-\frac12\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)v^k_{x_i},v^k_{x_j})q'_\tau(t)dxdt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{b_0}{2}\int\limits_{\Omega_{t_0}}|v^k_x|^2dx-\frac{b_1\varepsilon}{p}\int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}}q_\tau(t)|v^k_x|^2dxdt-\frac{\mu_1b_1}{2\gamma_{1,0}}\varepsilon^{\frac{2}{2-p}},$$

$$\text{де}\quad b_1\quad\text{залежить від}\quad\sup_{Q_T}\|B_{ij}(x,t)\|;$$

$$\Im_4 = \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{i=1}^{n} (C_i(x)\varkappa_i^k, v_{x_i}) q_\tau(t)dxdt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \exp(\lambda(p-2)t)|v_x^k|^p q_\tau(t)dxdt;$$

$$\Im_5 = \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (H_\alpha(x,t)D^\alpha v^k, v^k) q_\tau(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_0}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^k|^2 q_\tau(t)dxdt + \frac{1}{2a_0 h_2(T)\sum\limits_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} |v^k|^2 q_\tau(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_0}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^k|^2 q_\tau(t)dxdt + \frac{\mu_2\varepsilon}{2p} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} |v_x^k|^p q_\tau(t)dxdt +$$

$$+ \frac{\mu_2(p-2)\mathrm{mes}\,\Omega}{2p}\varepsilon^{\frac{2}{2-p}}, \quad \text{де} \quad \mu_2 = 2\gamma_{1,0}\left[a_0 h_2(T)\sum_{j=1}^{l}\gamma_{l,j}\right]^{-1};$$

$$\Im_6 = \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} ((G(x,t)+\lambda E)v^k, v^k) q_\tau(t)dxdt \geqslant 0;$$

$$\Im_7 = \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (F_\alpha^{(k)}(x,t), D^\alpha v^k)\exp(-\lambda t) q_\tau(t)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 \exp(-2\lambda t) q_\tau(t)dxdt +$$

$$+ \frac{(\gamma_{1,0}+1)\varepsilon}{p} \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} q_\tau(t)|v_x^k|^p dxdt + \frac{(\gamma_{1,0}+1)\gamma(p-2)\mathrm{mes}\,\Omega}{p}\varepsilon^{\frac{2}{2-p}}.$$

Використовуючи оцінки інтегралів $\Im_1, \ldots \Im_7$, з рівності (4) одержуємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{t_0}} (|v^k|^2 + b_0|v_x^k|^2)dx + a_0 \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v^k|^2 q_\tau(t)dxdt + \Big(2c_0\exp(\lambda(p-2)(\tau-1)) -$$

$$- \frac{2\gamma_{1,0}}{p}\varepsilon - \frac{2b_1}{p}\varepsilon - \frac{\mu_2\varepsilon}{p} - \frac{2(\gamma_{1,0}+1)\varepsilon}{p}\Big) \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} q_\tau(t)|v_x^k|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\mu_1 + \frac{\mu_1 b_1}{\gamma_{1,0}} + \frac{\mu_2(p-2)\mathrm{mes}\,\Omega}{p} + \frac{2(\gamma_{1,0}+1)(p-2)\mathrm{mes}\,\Omega}{p}\right)\varepsilon^{\frac{2}{2-p}} + \tag{5}$$

$$+ \int\limits_{Q_{\tau-1,t_0}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 \exp(-2\lambda t) 2q_\tau(t)dxdt, \quad \text{коли} \quad t_0 \in [\tau, \tau+1].$$

Виберемо

$$\varepsilon = \frac{c_0 p \exp(\lambda(p-2)(\tau-1))}{4\gamma_{1,0} + 2b_1 + \mu_2 + 2}.$$

Тоді з (5) одержимо оцінки:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} (|v^k|^2 + |v_x^k|^2)dx \leqslant \mu_3(\tau-1) + \mu_4(\tau-1) \int\limits_{Q_{\tau-1,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 dxdt, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Omega_{\tau,\tau+1}} \sum_{|\alpha|=l} (|D^\alpha v^k|^2 + |v_x^k|^p) dxdt \leqslant \mu_3(\tau-1) + \mu_4(\tau-1) \int\limits_{Q_{\tau-1,\tau+1}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 dxdt.$$

Нехай $\sigma \in (\tau, \tau+1)$, $\omega_m(t)$ – неперервна кусково-лінійна функція на $(-\infty, T)$, $\omega_m(t) = 1$ при $t < \sigma - \frac{2}{m}$, $\omega_m(t) = 0$ при $t > \sigma - \frac{1}{m}$; $\rho_s(t)$ – регуляризуюча послідовність функцій з $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, $\rho_s(t) = \rho_s(-t)$, $\operatorname{supp} \rho_s \subset \left[-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}\right]$ і $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho_s(t)dx = 1$. Приймемо при $s > 2m$

$$w = ((\omega_m v_t^k q_\tau) * \rho_s * \rho_s)\omega_m q_\tau e^{-\lambda t},$$

де $*$ – означає згортку за змінною t. Очевидно,

$$w = ((\omega_m v^k q_\tau)_t * \rho_s * \rho_s)\omega_m q_\tau e^{-\lambda t} - (((\omega_m q_\tau)' v^k) * \rho_s * \rho_s)\omega_m q_\tau e^{-\lambda t}.$$

Підставимо функцію $w(x,t)$ у рівність (4) і перетворимо кожний її доданок окремо. Матимемо таке:

$$\begin{aligned}
\Im_8 = &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} (v_t^k, w) e^{\lambda t} dxdt = \\
= &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} (v_t^k (\omega_m v^k q_\tau) * \rho_s * \rho_s)\omega_m q_\tau dxdt \to \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} (v_t^k, v_t^k \omega_m^2 q_\tau^2) dxdt; \\
\Im_9 = &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha v^k \omega_m q_\tau, (\omega_m q_\tau D^\alpha v^k)_t * \rho_s * \rho_s)) dxdt - \\
- &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\alpha v^k w_m' q_\tau, (\omega_m q_\tau D^\alpha v^k)_t * \rho_s * \rho_s)) dxdt \to \\
&\to - \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta v^k, D^\alpha v^k) \omega_m w_m' q_\tau^2 dxdt - \\
- &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1\leqslant|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta v^k, D^\alpha v^k) q_\tau q_\tau' \omega_m^2 dxdt; \\
\Im_{10} = &\int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) v_{x_i t}^k \omega_m q_\tau, ((\omega_m q_\tau v_{x_j t}^k) * \rho_s * \rho_s)) dxdt \to \\
&\to \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) v_{x_i t}^k, v_{x_j t}^k) \omega_m^2 q_\tau^2 dxdt; \\
\Im_{11} = &\lambda \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) v_{x_i}^k \omega_m q_\tau, ((\omega_m q_\tau v_{x_j t}^k) * \rho_s * \rho_s)) dxdt \to \\
&\to \lambda \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) v_{x_i}^k, v_{x_j t}^k) \omega_m^2 q_\tau^2 dxdt;
\end{aligned}$$

$$\Im_{12} = \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i=1}^{n} (C_i(x) \varkappa_i^k \omega_m q_\tau, ((\omega_m q_\tau v_{x_i t}^k) * \rho_s * \rho_s)) dx dt \to$$
$$\to \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{i=1}^{n} (C_i(x) \varkappa_i^k, v_{x_i t}^k) \omega_m^2 q_\tau^2 dx dt;$$
$$\Im_{13} = \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha v^k \omega_m q_\tau, ((\omega_m q_\tau v_t^k) * \rho_s * \rho_s)) dx dt \to$$
$$\to \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha v^k, v_t^k) \omega_m^2 q_\tau^2 dx dt;$$
$$\Im_{14} = \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} ((G(x,t) + \lambda E) v^k \omega_m q_\tau, ((\omega_m q_\tau v_t^k) * \rho_s * \rho_s)) dx dt \to$$
$$\to \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} ((G(x,t) + \lambda E) v^k, v_t^k) \omega_m^2 q_\tau^2 dx dt;$$
$$\Im_{15} = \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} e^{-\lambda t} (F_\alpha^{(k)}(x,t) \omega_m q_\tau, ((\omega_m q_\tau D^\alpha v_t^k) * \rho_s * \rho_s)) dx dt \to$$
$$\to \int\limits_{Q_{\tau-1,T}} \exp(-\lambda t) \sum_{|\alpha| \leqslant 1} (F_\alpha^{(k)}(x,t), D^\alpha v_t^k) \omega_m^2 q_\tau^2 dx dt,$$

коли $s \to \infty$. Якщо тепер спрямувати в інтегралах $\Im_8, \ldots, \Im_{15}$, $m \to \infty$, то одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} [(v_t^k, v_t^k q_\tau^2) - \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta v^k, D^\alpha v^k) q_\tau q_\tau' + \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) v_{x_i t}^k, v_{x_j t}^k) q_\tau^2 +$$
$$+ \lambda \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) v_{x_i}^k, v_{x_j t}^k) q_\tau^2 + \sum_{i=1}^{n} (C_i(x) \varkappa_i^k, v_t^k) q_\tau^2 + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (H_\alpha(x,t) D^\alpha v^k, v_t^k) q_\tau^2 +$$
$$+ ((G(x,t) + \lambda E) v^k, v_t^k) q_\tau^2] dx dt + \int\limits_{\Omega_\sigma} \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta v^k, D^\alpha v^k) q_\tau dx =$$
$$= \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha| \leqslant 1} (F_\alpha^{(k)}(x,t), D^\alpha v_t^k) \exp(-\lambda t) q_\tau' dx dt \tag{7}$$

майже для всіх $\sigma \in [\tau - 1, \tau + 1]$. Оцінюючи доданки рівності (7), матимемо

$$\Im_{16} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{1 \leqslant |\alpha| = |\beta| \leqslant l} (A_{\alpha\beta}(x) D^\beta v^k, D^\alpha v^k) q_\tau q_\tau' \leqslant a_1 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha| = l} |D^\alpha v^k|^2 q_\tau dx dt;$$
$$\Im_{17} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t) v_{x_i t}^k, v_{x_j t}^k) q_\tau^2 dx dt \geqslant b_0 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v_{tx}^k|^2 q_\tau^2 dx dt;$$

$$\Im_{18} =\lambda \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij}(x,t)v^k_{x_i}, v^k_{x_j t})q^2_\tau dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\lambda b_0}{2} \int\limits_{\Omega_\sigma} |v^k_x|^2 q^2_\tau dx - \frac{\lambda b_2}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_x|^2 q^2_\tau dxdt;$$

$$\Im_{19} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{i=1}^{n} (C_i(x)\varkappa^k_i, v^k_{x_i t})q^2_\tau dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c^i_j(x)|v^k_{j,x_i}|^{p-2} v^k_{j,x_i} v^k_{j,x_i t} q^2_\tau exp(\lambda(p-2)t)dxdt =$$

$$=\frac{1}{p} \int\limits_{\Omega_\sigma} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c^i_j(x)|v^k_{j,x_i}|^p \exp(\lambda(p-2)\sigma)q^2_\tau(\sigma)dx-$$

$$-\frac{\lambda(p-2)}{p} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c^i_j(x)|v^k_{j,x_i}|^p \exp(\lambda(p-2)t)q^2_\tau dxdt-$$

$$-\frac{2}{p} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} c^i_j(x)|v^k_{j,x_i}|^p \exp(\lambda(p-2)t)q_\tau q'_\tau dxdt \geqslant$$

$$\geqslant \mu_5 \int\limits_{\Omega_\sigma} |v^k_x|^p \exp(\lambda(p-2)\sigma t)q^2_\tau(\sigma)dx - \mu_6 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_x|^p \exp(\lambda(p-2)t)q_\tau(t)dxdt;$$

$$\Im_{20} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|=1} (H_\alpha(x,t)D^\alpha v^k, v^k_t)q^2_\tau dxdt \leqslant$$

$$\leqslant h_4 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha v^k|^2 q^2_\tau dxdt + \frac{1}{8} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_t|^2 q^2_\tau dxdt;$$

$$\Im_{21} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} ((G(x,t)+\lambda E)v^k, v^k_t)q^2_\tau dxdt \leqslant$$

$$\leqslant g_3 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha v^k|^2 q^2_\tau dxdt + \frac{1}{8} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_t|^2 q^2_\tau dxdt;$$

$$\Im_{22} = \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} (F^{(k)}_\alpha(x,t), D^\alpha v^k_t)e^{-\lambda t}dxdt \leqslant \mu_7 \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} \sum_{|\alpha|\leqslant 1} |F_\alpha(x,t)|^2 e^{-2\lambda t}dxdt+$$

$$+\frac{1}{4} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_t|^2 q^2_\tau dxdt + \frac{b_0}{2} \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}} |v^k_{tx}|^2 q^2_\tau dxdt.$$

Сталі $a_1, b_2, \mu_5, \mu_6, \mu_7, h_4, g_3$ не залежать від k, τ, σ.

Враховуючи оцінки інтегралів $\Im_{16}, \dots \Im_{22}$, з рівності (7) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\sigma}\left[\frac{1}{p}\exp(\lambda(p-2)\sigma)|v_x^k|^p + a_0\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha v^k|^2\right]dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\tau,\sigma}}(|v_t^k|^2+|v_{tx}^k|^2)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}}\left[(a_1+h_4+g_3)\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha v^k|^2 + \frac{\lambda b_2}{2}|v_x^k|^2 +\right.$$

$$\left. +\mu_6\exp(\lambda(p-2)t)\right]dxdt + \mu_7\int\limits_{Q_{\tau-1,\sigma}}e^{-2\lambda t}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|F_\alpha(x,t)|^2dxdt \tag{8}$$

для майже всіх $\sigma\in[\tau,\tau+1]$. Якщо взяти до уваги оцінку (6), то з (8) одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha v^k|^2+|v_x^k|^p\right]dx + \int\limits_{Q_{\tau-1,\tau}}|v_{tx}^k|^2dxdt \leqslant \mu_8(\tau-2)+$$

$$+\mu_9(\tau-2)\int\limits_{Q_{\tau-2,\tau}}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}|F_\alpha(x,t)|^2dxdt. \tag{9}$$

Отже, в області $Q_{T-t_1,T}(t_1<T)$ з (6), (9) випливають такі оцінки:

$$\int\limits_{\Omega_t}\left(\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha v^k|^2+|v_x^k|^p\right)dx \leqslant \mu_{10}(t_1), \qquad \int\limits_{Q_{T-t_1,T}}|v_{tx}^k|^2dxdt\leqslant\mu_{10}(t_1). \tag{10}$$

Крім того, легко довести, що

$$||\mathcal{B}(v^k e^{\lambda t})||_{L^q((t_1,T);(W^{-1,q}(\Omega))^N)} \leqslant \mu_{10}(t_1). \tag{11}$$

На підставі оцінок (10), (11) з побудованої послідовності $\{v^k(x,t)\}$ можна вибрати підпослідовність $\{v_s^k(x,t)\}$ таку, що $v^{k_s}\to v$ $*-$ слабко в $L^\infty((t_1,T);V)$, $v_t^{k_s}\to v_t$ слабко в $L^2((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^N)$, $\mathcal{B}(v^{k_s}e^{\lambda t})\to\mathcal{Z}_\lambda$ слабко в $L^q((t_1,T);(W^{-1,q}(\Omega))^N)$, коли $k_s\to\infty$ для будь-якого t_1, $-\infty<t_1<T$. Очевидно, функція v задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_T}\left[(v^t,w)+\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta v,D^\alpha w)+\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)v_{x_it},w_{x_j})+\right.$$

$$\left.+\lambda\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)v_{x_i},w_{x_j})+\sum_{|\alpha|=1}(H_\alpha(x,t)D^\alpha v,w)+((G(x,t)+\lambda E)v,w)\right]e^{\lambda t}dxdt+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{Z}_\lambda,w\rangle dt = \int\limits_{Q_T}\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_\alpha(x,t),D^\alpha w)dxdt \tag{12}$$

для довільної функції $w\in(C_0^\infty(Q_T))^N$. Покажемо, що $\mathcal{B}(ve^{\lambda t})=\mathcal{Z}_\lambda$. Для цього візьмемо $\psi\in\mathcal{D}(-\infty,T)$, $\psi(t)\geqslant 0$, $\operatorname{supp}\psi(t)\in[t_1,T]$, $w\in L^\infty_{\rm loc}((-\infty,T];V)$ і приймемо

$$\mathcal{Y}_{k_s}=\int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{B}(v^{k_s}e^{\lambda t})-\mathcal{B}(we^{\lambda t}),v^{k_s}-w\rangle dt.$$

Враховуючи (4), одержимо

$$\mathcal{Y}_{k_s} = -\int\limits_{Q_T}\Big[-\frac{1}{2}\psi'|v^{k_s}|^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v^{k_s}_{x_it}, v^{k_s}_{x_j})\psi' -$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ijt}(x,t)v^{k_s}_{x_i}, v^{k_s}_{x_j})\psi + \sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}v^{k_s}, D^{\alpha}v^{k_s})\psi +$$
$$+\lambda\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v^{k_s}_{x_i}, v^{k_s}_{x_j})\psi + \sum_{|\alpha|=1}(H_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}v^{k_s}, v^{k_s})\psi +$$
$$+((G(x,t)+\lambda E)v^{k_s}, v^{k_s})\psi - \sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_{\alpha}(x,t), D^{\alpha}v^{k_s})e^{-\lambda t}\psi dxdt\Big]dxdt -$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{B}(v^{k_s}e^{\lambda t}), w\rangle\psi dt - \int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{B}(we^{\lambda t}), v^{k_s}-w\rangle dt.$$

Розглянемо простір

$$W_1 = \{w(x,t):\ w\in L^{\infty}((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^{l}(\Omega))^N),\ w_t\in L^2((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^{1}(\Omega))^N)\}.$$

Оскільки $l>1$, то $(\overset{\circ}{H}{}^{l}(\Omega))^N\subset(\overset{\circ}{H}{}^{1}(\Omega))^N$ компактно. Тому на підставі теореми 5.1 [15, с.70] $W_1\subset L^2((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^{1}(\Omega))^N)$ компактно. Отже, можемо вважати, що

$$||v^{k_s}-v||^{(2)}_{L^2((t_1,T);(\overset{\circ}{H}{}^{1}(\Omega))^N)}\to 0,$$

коли $k_s\to\infty$. Якщо у рівності для $\mathcal{Y}_{k_s}$ перейти до границі, коли $k_s\to\infty$, то одержимо

$$\overline{\lim_{k_s\to\infty}}\,\mathcal{Y}_{k_s}\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q_T}\psi'\Big[|v|^2+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}(x,t)v_{x_i}, v_{x_j}\Big]dx\,dt -$$
$$-\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(A_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}v, D^{\alpha}v)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}((2\lambda B_{ij}(x,t)-B_{ijt}(x,t)v_{x_i}, v_{x_j})+$$
$$+\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}(H_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}v, v)+((G(x,t)+\lambda E)v, v)-$$
$$-\sum_{|\alpha|\leqslant 1}(F_{\alpha}(x,t), D^{\alpha}v)e^{-\lambda t}dxdt\Big]\psi(t)dxdt-$$
$$-\int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{Z}_{\lambda}, w\rangle\psi(t)dt - \int\limits_{-\infty}^{T}\langle\mathcal{B}(we^{\lambda t}), v-w\rangle\psi dt.$$

Враховуючи монотонність оператора $\mathcal{B}$ і рівність (12), з останньої нерівності випливає, що

$$\int_{-\infty}^{T} \psi(t)\langle \mathcal{Z}_\lambda - \mathcal{B}(we^{\lambda t}), v - w\rangle dt \geqslant 0.$$

Звідси $\mathcal{Z}_\lambda = \mathcal{B}(ve^{\lambda t})$ і теорему доведено.

1. *Колінько М. О., Лавренюк С. П.* Єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї нелінійної псевдопараболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 45. – С. 71-77.
2. *Олейник О.А.,Иосифьян Г.А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – Т.31. – N6. – С.142-166.
3. *Ивасишен С.Д.* О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т.14. – N 2. – С. 361-363.
4. *Ивасишен С.Д.* О параболических граничных задачах без начальных условий // Укр. мат. журн. – 1982. – Т.34. – N5. – С. 547-552.
5. *Кадыров Р.Р., Жураев Б.Б.* О классах единственности решений краевых задач без начальных условий для параболических уравнений высшего порядка // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук – 1985. – N2.– С.23-29.
6. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды сем. им. И.Г.Петровского. – 1989. – Вып.14. – С.3-44.
7. *Бокало Н.М.* Об однозначной разрешимости краевых задач для полулинейных параболических уравнений в неограниченных областях без условий на бесконечности // Сиб. мат. журн. – 1993. – Т.34. – N 4. – С. 33-40.
8. *Бас М.О., Лавренюк С.П.* Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболєва-Гальперна // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48. – N 1. – С.124-128.
9. *Лавренюк С.П., Пташник М.Б.* Псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50. – N 7. – С. 919-929.
10. *Lavrenyuk S.P., Kolinko M.O.* Fourier problem for linear Sobolev-Halperin system // Demonstratio mathematica. – 1998. – Vol. 31. – N 1. – P.26-32.
11. *Лавренюк С.П., Пташник М.Б.* Деякі нелінійні псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51. – N 3.
12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
13. *Колінько М. О., Лавренюк С. П.* Існування розв'язку однієї нелінійної псевдопараболічної системи // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С. 44-49.
14. *Лионс Ж.- Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

Kolin'ko M., Lavrenyuk S.

EXISTENCE OF A SOLUTION THE FOURIER PROBLEM FOR ONE NONLINEAR PSEUDOPARABOLIC SYSTEM

Some sufficient conditions the existence of a weak solution the problem without initial data for one nonlinear pseudoparabolic system there are obtained. The existence of a solution does not depepend on a behaviour under $t \to -\infty$.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 114–116

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 114–116

УДК 517.53

Володимир Кушнір

ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ТА РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ АНАЛІТИЧНОЇ В ОБЛАСТІ ФУНКЦІЇ

Нехай G – довільна область із $\mathbb{C}$, f – аналітична в області G функція, яка має на $\partial\mathbb{G}$ принаймні одну особливу точку, а l – додатна неперервна в G функція така, що

$$l(z) > \frac{\beta}{\operatorname{dist}(z, \partial G)}, \quad z \in G, \tag{1}$$

де $\beta > 1$ – фіксоване число. Функція f називається [1] функцією обмеженого l-індексу, якщо існує число $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant N\right\}. \tag{2}$$

Найменше з таких чисел N називатимемо l-індексом і позначатимемо через $N(f;l)$. У випадку, коли $G = \mathbb{C}$ і $l(z) \equiv 1$, звідси одержуємо означення цілої функції обмеженого індексу. У. Хейман [2] показав, що для того, щоб ціла функція f мала обмежений індекс, необхідно і достатньо, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$, $C \geqslant 1$ такі, що для кожного $z \in \mathbb{C}$ виконувалась нерівність $|f^{(p+1)}(z)| \leqslant C\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \leqslant k \leqslant p\}$. М.М. Шеремета [3] переніс теорему Хеймана на цілі функції обмеженого l^*-індексу, де l^* – додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція і $l(z) = l^*(|z|)$.

Для $r \in [0, \beta]$ приймемо

$$\lambda_1(r) = \inf\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}$$

і

$$\lambda_2(r) = \sup\left\{\frac{l(z)}{l(z_0)} : |z - z_0| \leqslant \frac{r}{l(z_0)},\ z_0 \in G\right\}.$$

Очевидно, що $\lambda_1(r) \leqslant 1 \leqslant \lambda_2(r)$. Клас додатних неперервних в G функцій l, які, крім (1), задовольняють умову $0 < \lambda_1(r) \leqslant \lambda_2(r) < +\infty$ для всіх $r \in [0, \beta]$, позначимо через Q_β.

Зауважимо таке: якщо $l \in Q_\beta$ і $z_0 \in G$, то для всіх $r \in [0, \beta]$ з нерівності $|z - z_0| \leqslant \dfrac{r}{l(z_0)}$ випливають нерівності

$$\lambda_1(r)l(z_0) \leqslant l(z) \leqslant \lambda_2(r)l(z_0). \tag{3}$$

Будемо говорити, що функція f має обмежений l-розподіл значень в області G, якщо існує число $p \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z_0 \in G$ і $w \in \mathbb{C}$ рівняння $f(z) = w$ має не більш ніж p коренів у крузі $\left\{z \ : \ |z-z_0| \leqslant \frac{1}{l(z_0)}\right\}$, тобто функція f в кожному такому крузі p-листа.

Нам будуть потрібні такі леми.

Лема 1. *[2] Якщо функція f аналітична і p-листа в крузі $\{z : |z-z_0| < R\}$, то для кожного $n > p$*

$$\frac{1}{n!}|f^{(n)}(z_0)|R^n \leqslant \left(\frac{An}{p}\right)^{2p} \max\left\{\frac{1}{k!}|f^{(k)}(z_0)|R^k \ : \ 1 \leqslant k \leqslant p\right\}, \quad A = \text{const}. \tag{4}$$

Лема 2. *[2] Якщо функція f аналітична в крузі $\{z : |z-z_0| < R\}$, і для кожного z з цього круга*

$$\frac{1}{(p+1)!}|f^{(p+1)}(z)| \left(\frac{R}{2}\right)^{p+1} \leqslant \max\left\{\frac{1}{k!}|f^{(k)}(z)| \left(\frac{R}{2}\right)^k \ : \ 1 \leqslant k \leqslant p\right\}, \tag{5}$$

то вона p-листа в крузі $\{z : |z-z_0| < R/25\sqrt{(p+1)}\}$.

Лема 3. *[4] Нехай $\beta > 1$ і $l \in Q_\beta$. Для того щоб аналітична в G функція f мала обмежений l-індекс, необхідно і достатньо, щоб існували числа $p \in \mathbb{Z}_+$ і $C \geqslant 1$ такі, що для кожного $z \in G$ виконувалась нерівність*

$$\frac{|f^{(p+1)}(z3)|}{l^{p+1}(z)} \leqslant C \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{l^k(z)} : 0 \leqslant k \leqslant p\right\}. \tag{6}$$

Теорема. *Нехай $\beta > 0$, $l \in Q_\beta(G)$. Для того щоб аналітична в G функція f мала обмежений l-розподіл значень, необхідно і достатньо, щоб її похідна f' була функцією обмеженого l-індексу.*

Доведення. Нехай функція f має обмежений l-розподіл значень, тобто функція f у кожному крузі $\{z : |z-z_0| < 1/l(z_0)\}$ є p-листою. Приймемо $R = 1/l(z_0)$ і $n = p+1$. Тоді з (4) маємо

$$\frac{|f^{(p+1)}(z_0)|}{l^{p+1}(z_0)} \leqslant (p+1)! \left(A\frac{p+1}{p}\right)^{2p} \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z_0)|}{l^k(z_0)} \ : \ 1 \leqslant k \leqslant p\right\}.$$

Звідси видно, що для функції f' виконується (6) з $p-1$ замість p і $C = (p+1)!(A(p+1)/p)^{2p}$, тобто f'– функція обмеженого l-індексу. Навпаки, нехай f'– функція обмеженого l-індексу, тобто для деяких $C \geqslant 1$ і $p \in \mathbb{N}$ і всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$\frac{|f^{(p+1)}(z)|}{l^p(z)} \leqslant C \max\left\{\frac{|f^{(k+1)}(z)|}{l^k(z)} \ : \ 0 \leqslant k \leqslant p-1\right\}. \tag{7}$$

Розглянемо довільний круг $K_0 = \{z : |z-z_0| < 1/l(z_0)\}$, $\quad z_0 \in G$. З (7) і (3) одержуємо

$$\frac{|f^{(p+1)}(z)|}{(p+1)!} \left(\frac{1}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^{p+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Cp!}{(p+1)!} \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!} \left(\frac{1}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^k \left(\frac{l(z)}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^{p+1-k} \ : \ 1 \leqslant k \leqslant p\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{p+1}\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!}\left(\frac{1}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^k\left(\frac{1}{C}\right)^{p+1-k} : 1\leqslant k\leqslant p\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!}\left(\frac{1}{C\lambda_2(1)l(z_0)}\right)^k : 1\leqslant k\leqslant p\right\},$$

тобто справджується (5) з $R=\dfrac{2}{C\lambda_2(1)l(z_0)}$. За лемою 2 функція f є p-листою в крузі $\{z:|z-z_0|<\dfrac{\rho}{l(z_0)}\}$, $\rho=\dfrac{2}{25C\lambda_2(1)\sqrt{(p+1)}}$.

Нехай z_j – довільна точка з K_0, а $K_j^*=\left\{z:|z-z_j|<\dfrac{\rho}{l(z_j)}\right\}$. Оскільки $l(z_j)\leqslant$ $\leqslant\lambda_2(1)l(z_0)$, то $K_j=\{z:|z-z_j|<\dfrac{\rho}{\lambda_2(1)l(z_0)}\}\subset K_j^*$. Отже, функція f є p-листою в K_j. Зауважимо, що кожен замкнений круг радіуса R_* можна покрити скінченним числом m_* замкнених кругів радіуса $\rho_*<R_*$ з центрами в цьому крузі, причому $m_*\leqslant B_*\left(\dfrac{R_*}{\rho_*}\right)^2$, де $B_*>0$ – деяка стала. Отже, K_0 можна покрити скінченним числом m замкнених кругів K_j. Оскільки f є p-листою в K_j, то f є mp-листою в K_0. Враховуючи довільність точки z_0, теорема доведена.

---

1. *Шеремета М.М., Кушнір В.О.* Аналітичні функції обмеженого l-індексу // Мат. студії. – 1999. – Т. 12. – N 1. – С. 59-66.
2. *Hayman W.K.* Differential inequalities and local valency// Pacif. J. Math. – 1973. – Vol.44. – N 1. – P. 117-137.
3. *Шеремета М.Н.* Об l-индексе и l-распределении значений целых функций// Изв. вузов. Математика. – 1990. – N 2. – С. 94-96.
4. *Кушнір В.О.* Аналог теореми Хеймана для аналітичних функцій обмеженого l-індексу// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. –1999. – Вип. 53. – С. 48-51.
5. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index// Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math Soc., Providence. – 1968. – Vol. 11. – P. 298-307.

Kushnir V.

THE BOUNDEDNESS OF *l*-INDEX AND VALUE DISTRIBUTION OF AN ANALITIC FUNCTION IN COMPLEX DOMAIN

Let G be an arbitrary complex domain, and l be a positive continuous function in G such that $l(z)>\dfrac{\beta}{\operatorname{dist}(z,\partial G)}$, $z\in G$, where $\beta>1$ is a constant. The connection between the l-boundedness of value distribution of an analytic function f in complex domain G and boundedness of l-index of its derivative f' is established.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 117–124

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 117–124

УДК 539.3

Тарас Нагірний, Костянтин Червінка

МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛАХ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТІВ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ

Відомо, що деформівні тверді тіла характеризуються неоднорідністю властивостей, які зумовлені різними умовами взаємодії частинок у приповерхневих та внутрішніх областях тіла [1,2]. Зрозуміло, що така неоднорідність може суттєво впливати на процеси, які відбуваються в тілах, а тим самим – на їхні функціональні та міцнісні характеристики. В цій праці ми розглянемо моделі опису та методику дослідження хвильових процесів у твердих тілах з урахуванням ефектів приповерхневої неоднорідності.

Для врахування приповерхневої неоднорідності скористаємося локально градієнтними моделями термомеханіки [3-5]. В таких моделях поряд з класичними параметрами стану, такими як тензори деформації та напружень, розглядають градієнт хімічного потенціалу $\vec{\nabla} H$ та спряжений до нього параметр – вектор зміщень маси $\vec{\pi}_m$. Повна система рівнянь моделі локально градієнтної пружності складається з рівнянь балансу імпульсу $\vec{k}_v$ та маси, якщо знехтувати конвективною складовою похідної за часом τ та масовими силами у локальній формі, то можна записати у вигляді [3,4]

$$\frac{\partial \vec{k}_v}{\partial \tau} = \vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma}, \qquad \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\varrho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}_m\right) = 0,$$

$$\hat{\sigma} = 2\mu \hat{e} + \left[\lambda e + (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_m \eta\right] \hat{I},$$

$$\varrho = \varrho_* - c_m \eta - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_m e, \quad \vec{\pi}_m = -b_m \vec{\nabla} \eta, \quad \vec{k}_v = \varrho \vec{v}. \tag{1}$$

Тут $\hat{\sigma}$ – тензор напружень Коші; $\hat{e}$ – тензор деформації, $e = \hat{e} : \hat{I}$, $\hat{I}$ – одиничний тензор; $\vec{v}$ – вектор швидкості; $\eta \equiv H - H_*$ – збурення хімічного потенціалу H стосовно початкового значення H_*; ϱ_* – початкове значення густини; $\lambda, \mu, \alpha_m, b_m, c_m$ – сталі матеріалу; "$\cdot$", "$:$" – внутрішній та подвійний внутрішній добутки. Зазначимо, що за початкові зазвичай приймають значення відповідних величин для безмежного середовища, матеріал якого ідентичний матеріалу тіла, яке розглядають.

Якщо врахувати, що тензор деформації $\hat{e}$ пов'язаний з вектором переміщення $\vec{u}$ співвідношенням Коші

$$\hat{e} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla} \otimes \vec{u} + \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u}\right)^T\right],$$

а також прийняти нульові початкові умови під час інтегрування другого співвідношення системи (1), то ключову систему рівнянь локально градієнтної пружності можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\left[\varrho_* - c_m\eta - (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right]\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right\} =$$

$$= \mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\eta,$$

$$\nabla^2\eta - \beta^2\eta - \beta_u^2\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0, \qquad (2)$$

де

$$\beta^2 = \frac{c_m}{b_m}, \quad \beta_u^2 = \frac{(3\lambda+2\mu)\,\alpha_m}{b_m},$$

"$\otimes$" – операція тензорного добутку; "T" – індекс, що позначає транспонування.

Система рівнянь (2) є нелінійною внаслідок нелінійності імпульсу механічного поступального руху $\vec{k}_v$. У разі дослідження хвильових процесів на її основі розв'язок $\vec{u}, \eta$ природно подати у вигляді суми осередненої $\overline{\vec{u}}, \overline{\eta}$ на періоді коливань τ_0 та коливної $\tilde{\vec{u}}, \tilde{\eta}$ складових [6-8]

$$\vec{u} = \overline{\vec{u}} + \tilde{\vec{u}}, \quad \eta = \overline{\eta} + \tilde{\eta}.$$

Тут, як і в монографіях [6-8], приймаємо, що

$$\overline{f}(\vec{r},\tau) = \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{\tau}^{\tau+\tau_0} f(\vec{r},\zeta)d\zeta,$$

де $f \equiv \{\vec{u},\eta\}$, $\vec{r}$ – радіус-вектор.

Приймемо також наближення, які здебільшого використовують у теорії нелінійних коливань

$$\frac{\overline{\partial}^n f}{\partial \tau^n} \approx \frac{\partial^n \overline{f}}{\partial \tau^n}, \quad \overline{\overline{f\varphi}} \approx \overline{f}\overline{\varphi}, \quad \overline{\overline{f}\tilde{\varphi}} \approx 0, \quad \overline{\tilde{f}} \approx 0.$$

Якщо знехтувати осередненою складовою сили інерції, то систему рівнянь (2) можна звести до вигляду

$$\mu\nabla^2\overline{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\overline{\eta} = 0,$$

$$\nabla^2\overline{\eta} - \beta^2\overline{\eta} - \beta_u^2\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}} = 0; \qquad (3)$$

$$\left[\varrho_* - c_m\overline{\eta} - (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right]\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2} - \frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\left[c_m\tilde{\eta} + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right]\frac{\partial\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau}\right\}_V =$$

$$= \mu\nabla^2\tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\,\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\tilde{\eta},$$

$$\nabla^2\tilde{\eta} - \beta^2\tilde{\eta} - \beta_u^2\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}} = 0, \qquad (4)$$

де індексом "V" позначено коливну складову від добутку.

Якщо додатково обмежитись розглядом хвиль основної гармоніки, то перше рівняння системи (4) спрощується до вигляду

$$\left[\varrho_* - c_m\overline{\eta} - (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right]\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2} =$$

$$= \mu\nabla^2\tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\tilde{\eta}. \tag{5}$$

Отже, для прийнятого наближення дослідження полів переміщення та хімічного потенціалу зводиться до послідовного визначення осереднених складових $\overline{\vec{u}}, \overline{\eta}$ з системи рівнянь (3) у разі наступного визначення коливних складових $\tilde{\vec{u}}, \tilde{\eta}$ із співвідношень (4). Система (3) описує приповерхневу неоднорідність (приповерхневі явища) у пружних тілах з урахуванням різних умов взаємодії частинок у внутрішніх та приповерхневих областях тіла [4, 5]. Тому (4) описує хвильові процеси із врахуванням поверхневих явищ і є системою рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Якщо ж враховувати осереднену складову сили інерції, то системи рівнянь для коливних та осереднених складових полів, які розглядають, будуть взаємопов'язаними.

Лінеаризованим наближенням першого рівняння системи (4) та рівняння (5) є

$$\varrho_*\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2} = \mu\nabla^2\tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right) + (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\tilde{\eta}. \tag{6}$$

Для одновимірних за координатою x коливань

$$\tilde{\vec{u}} = \left(u_a\exp\left(i\left(kx+\nu\tau\right)\right),0,0\right), \quad \tilde{\eta} = \eta_a\exp\left(i\left(kx+\nu\tau\right)\right)$$

з (6) і з другого рівняння (4) одержуємо таке дисперсійне співвідношення

$$k^4 + k^2\left[\beta^2 - \beta_u^2\frac{(3\lambda+2\mu)\,\alpha_m}{\lambda+2\mu} - \frac{\nu^2}{c_1^2}\right] = \beta^2\frac{\nu^2}{c_1^2},$$

яке відрізняється від аналогічного співвідношення класичної теорії пружності

$$k^2 = \frac{\nu^2}{c_1^2}.$$

Тут $c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\varrho_*}$ - швидкість поширення поздовжньої пружної хвилі в безмежному середовищі.

Якщо зв'язаністю хвильових процесів знехтувати, то рівняння (5) набуває вигляду

$$\left[\varrho_* - c_m\overline{\eta} - (3\lambda+2\mu)\,\alpha_m\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{u}}\right]\frac{\partial^2\tilde{\vec{u}}}{\partial\tau^2} = \mu\nabla^2\tilde{\vec{u}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{u}}\right). \tag{7}$$

Використаємо друге рівняння системи (3) і рівняння (7) для дослідження впливу приповерхневої неоднорідності на частоти власних коливань деформівного шару (область $|\,x\,|\leqslant l$ евклідового простору). Для простоти знехтуємо впливом деформації на густину $\overline{\varrho}$. У такому наближенні для відшукання

$$\overline{\eta} = \overline{\eta}(x), \qquad \tilde{\vec{u}} = (\tilde{u}(x,\tau),0,0)$$

маємо систему рівнянь

$$\frac{d^2\overline{\eta}}{dx^2} - \beta^2\overline{\eta} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} - c_1^{-2}\left(1 - \frac{c_m}{\varrho_*}\overline{\eta}\right)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tau^2} = 0. \tag{8}$$

Розв'язок першого рівняння цієї системи, який задовольняє умови

$$\overline{\eta} = \eta_a \equiv H_a - H_*$$

на поверхнях $x = \mp l$ шару є таким:

$$\overline{\eta}(x) = \eta_a \frac{\mathrm{ch}(\beta x)}{\mathrm{ch}(\beta l)}. \tag{9}$$

Зазначимо, що неоднорідність поля хімічного потенціалу є причиною приповерхневої неоднорідності пов'язаних з ним полів іншої фізичної природи.

Якщо внести (9) в рівняння (8), то для коливної складової вектора переміщення $\tilde{u}$ одержуємо

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} - c_1^{-2}\left(1 - A\frac{\mathrm{ch}(\beta x)}{\mathrm{ch}(\beta l)}\right)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} = 0, \tag{10}$$

де $A = c_m \eta_a / \varrho_*$.

Розв'язок цього рівняння запишемо у вигляді

$$\tilde{u}(x, \tau) = u(x)\exp(i\nu\tau). \tag{11}$$

Для відшукання амплітуди коливань $u(x)$ з (10), (11) маємо

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2\left(1 - a_1 \mathrm{ch}(\beta x)\right)u = 0, \tag{12}$$

де

$$k = \frac{\nu}{c_1}, \quad a_1 = \frac{A}{\mathrm{ch}(\beta l)}.$$

Далі розглядатимемо шари, товщини яких є значно більшими від характерного розміру області приповерхневої неоднорідності ($\beta l \gg 1$) (для бездомішкових тіл це шари, товщини яких порядку мікрона та більше). Розв'язок рівняння (12) шукаємо у вигляді розвинення за малим параметром a_1

$$u(x) = u_0(x) + a_1 u_1(x) + \cdots. \tag{13}$$

Обмежимося першим наближенням. Тоді для визначення u_0, u_1 одержуємо рівняння

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + k^2 u_0 = 0,$$

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + k^2 u_1 = k^2 \mathrm{ch}(\beta x) u_0. \tag{14}$$

Розв'язок рівнянь (14) можна записати у вигляді

$$u_0 = A_0\cos(kx) + B_0\sin(kx),$$

$$u_1 = A_0\left\{\cos(kx) + \frac{k}{2}\left[-V_1(x)\cos(kx) + V_2\sin(kx)\right]\right\} +$$

$$+B_0\left\{\sin(kx) + \frac{k}{2}\left[-V_3(x)\cos(kx) + V_1\sin(kx)\right]\right\}, \tag{15}$$

де

$$V_1 = \frac{1}{\beta^2 + 4k^2}\left[\beta\mathrm{sh}(kx)\sin(2kx) - 2k\mathrm{ch}(kx)\cos(2kx)\right],$$

$$V_2 = \beta^{-1}\mathrm{sh}(kx) + \frac{1}{\beta^2 + 4k^2}\left[\beta\mathrm{sh}(kx)\cos(2kx) + 2k\mathrm{ch}(kx)\sin(2kx)\right],$$

$$V_3 = \beta^{-1}\mathrm{sh}(kx) - \frac{1}{\beta^2 + 4k^2}\left[\beta\mathrm{sh}(kx)\cos(2kx) + 2k\mathrm{ch}(kx)\sin(2kx)\right].$$

Застосуємо цю систему співвідношень для дослідження частот власних коливань шару для конкретних граничних умов.

Нерухомі поверхні шару. Тоді граничні умови є такими:

$$u(-l) = 0, \qquad u(l) = 0. \tag{16}$$

Для першого наближення за параметром a_1 з (13), (15), (16) одержуємо

$$A_0\left\{(1+a_1)\cos(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[-V_1(l)\cos(kl) + V_2(l)\sin(kl)\right]\right\} +$$

$$+B_0\left\{(1+a_1)\sin(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[-V_3(l)\cos(kl) + V_1(l)\sin(kl)\right]\right\} = 0,$$

$$A_0\left\{(1+a_1)\cos(kl) - \frac{a_1 k}{2}\left[V_1(-l)\cos(kl) + V_2(-l)\sin(kl)\right]\right\} +$$

$$+B_0\left\{-(1+a_1)\sin(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[V_3(-l)\cos(kl) + V_1(-l)\sin(kl)\right]\right\} = 0. \tag{17}$$

Необхідною умовою існування нетривіального розв'язку системи рівнянь (17) є рівність нулю визначника цієї системи. Обмежуючись лінійним за a_1 наближенням, одержуємо

$$\left(1 + \frac{Ak^2}{\beta^2 + 4k^2}\right)\sin(2kl) = \frac{2Ak^3}{\beta(\beta^2 + 4k^2)}\cos(2kl), \tag{18}$$

де враховано, що для товстих шарів ($\beta l \gg 1$)

$$\mathrm{ch}(\beta l) \approx \mathrm{sh}(\beta l).$$

Якщо приповерхневі явища не враховувати, то аналогом (18) є рівняння

$$\sin\left(2k^0 l\right) = 0.$$

На основі його розв'язку $k_n^0 = \pi n/(2l)$ знаходять частоти власних коливань ν_n^0 шару з нерухомими поверхнями

$$\nu_n^0 = \frac{\pi n c_1}{2l}, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots$$

На цій підставі можна стверджувати, що рівняння (18) є трансцендентним рівнянням для знаходження частот власних коливань шару з урахуванням приповерхневої неоднорідності. Для товстих шарів природно прийняти, що

$$k = k^0 + k^1, \qquad k^1/k^0 \ll 1.$$

У першому наближенні за малим параметром k^1/k^0 для k_n одержуємо

$$k_n = \frac{\pi n}{2l}\left[1 + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{A}{(\beta l)^3}\right] \qquad n = 1, 2, 3 \cdots$$

Це відповідає таким значенням власних частот:

$$\nu_n = \frac{\pi n c_1}{2l}\left[1 + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \frac{A}{(\beta l)^3}\right] \qquad n = 1, 2, 3 \cdots \tag{19}$$

Шар, одна поверхня якого нерухома, а інша – вільна. Тоді граничні умови мають вигляд

$$u(-l) = 0, \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = 0.$$

У цьому випадку одержуємо систему рівнянь

$$A_0\left\{(1+a)\cos(kl) - \frac{a_1 k}{2}\left[V_1(-l)\cos(kl) + V_2(-l)\sin(kl)\right]\right\} +$$
$$+B_0\left\{-(1+a)\sin(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[V_3(-l)\cos(kl) + V_1(-l)\sin(kl)\right]\right\} = 0,$$
$$A_0\left\{-(1+a)k\cos(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[V_1(l)k\sin(kl) + V_2(l)k\cos(kl) -\right.\right.$$
$$\left.\left. - V_1'(l)\cos(kl) + V_2'(l)\sin(kl)\right]\right\} +$$
$$+B_0\left\{(1+a)k\cos(kl) + \frac{a_1 k}{2}\left[V_3(l)k\sin(kl) + V_1(l)k\cos(kl) -\right.\right.$$
$$\left.\left. - V_3'(l)\cos(kl) + V_1'\sin(kl)\right]\right\} = 0, \tag{20}$$

де

$$V_i' \equiv \left(\frac{dV_i}{dx}\right)_{x=l}.$$

У прийнятому вище наближенні для відшукання хвильового числа k з (20) одержуємо

$$\operatorname{ctg}(2kl) + \frac{Ak}{\beta} = 0. \tag{21}$$

Якщо приповерхневі явища не враховувати, то відповідним рівнянням є

$$\cos\left(2k^0 l\right) = 0.$$

Обмежуючись першим наближенням за параметром k^1/k^0, одержуємо такий розв'язок рівняння (21):

$$k_n = \frac{\pi(2n+1)}{4l}\left(1 + \frac{A}{2\beta l}\right) \qquad n = 0, 1, 2\cdots$$

Тому власними частотами коливань шару з однією нерухомою поверхнею є

$$\nu_n = \frac{\pi(2n+1)c_1}{4l}\left(1 + \frac{A}{2\beta l}\right) \qquad n = 0, 1, 2\cdots \tag{22}$$

Шар з вільними поверхнями. Граничні умови для амплітуди вектора переміщень мають вигляд

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=-l} = 0, \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=l} = 0.$$

Виконуючи процедуру, аналогічну до тої, що у попередніх випадках, одержуємо таке трансцендентне рівняння:

$$\left(\frac{2Ak^2}{\beta^2 + 4k^2} - 1\right)\sin(2kl) + Ak\left(\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\beta^2 + 4k^2}\right)\cos(2kl) = 0$$

для знаходження хвильового числа k.

У першому наближенні за параметром k^1/k^0 для власних частот ν_n маємо

$$\nu_n = \frac{\pi n c_1}{2l}\left(1+\frac{A}{\beta l}\right) \qquad n = 1, 2, 3\cdots \tag{23}$$

Порівнюючи вирази (19), (22), (23) бачимо, що в шарі з нерухомими поверхнями вплив приповерхневої неоднорідності на ν_n є нехтовно малим. У шарі з вільними поверхнями такий вплив є у два рази більший порівняно з шаром, одна поверхня якого нерухома, а інша вільна.

Зазначимо, що врахування залежності густини маси ϱ від деформації e не приводить до зміни методики, оскільки для осередненої складової густини $\overline{\varrho}$ можна записати

$$\overline{\varrho} = \varrho_* - c_m\overline{\eta} - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha_m\overline{e},$$

а характер залежності $\overline{e}$ від координати x є таким же, як характер залежності від x хімічного потенціалу $\overline{\eta}$.

Незалежно від умов закріплення, ми приймали значення хімічного потенціалу на поверхнях шару $x = \mp l$ таким, що дорівнює η_a. Водночас треба чекати, що значення хімічного потенціалу на вільній та закріпленій поверхнях будуть різними. З наведеного вище випливає, що вплив приповерхневої неоднорідності в околі нерухомої поверхні шару на частоти власних коливань є нехтовно малим. Вивчаючи такі частоти можна знехтувати впливом причин закріплення (наявністю контактуючого тіла).

Зауваження. *Робота виконана при частковій фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень.*

---

1. *Непийко С.А.* Физические свойства малых металлических частиц.- К., 1985.
2. *Подстригач Я.С., Повстенко Ю.З.* Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах.- К., 1985.
3. *Бурак Я.И., Нагирный Т.С.* Математическое моделирование локально-градиентных процессов в инерционных термомеханических системах// Прикл. механика. – 1992. – Т. 28. – N. 12. – С.3-23.
4. *Бурак Я.Й., Нагірний Т.С., Грицина О.Р.* Про термодинамічне моделювання приповерхневих явищ в термомеханіці//Доп.АН УРСР. Сер.А. – 1991. – N.9. – С.66-70.
5. *Бурак Я.Й., Нагірний Т.С.* Теоретичні основи розрахунку локально-градієнтних термомеханічних систем з врахуванням приповерхневих явищ// Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1993. – N.4. – С.24-30.
6. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике.- К., 1971.
7. *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах.- М., 1986.
8. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел.- К., 1982.

Nagirny T., Chervinka K.

MODELLING OF WAVE PROCESSES IN SOLIDS WITH DUE REGARD FOR THE INTERFACE NONHOMOGENEITY

That is proposed the interface nonhomogeneity concerned method of investigation for wave processes in solids, using the local gradient model of solids and averaging operation over a vibration period. The influence of interface nonhomogeneity on the normal mode of layer vibration for the different boundary conditions are studied. It is established that such effect for the fixed boundary of layers is negligible, while for the free boundary layers it is far larger and twice as far for the layer with one fixed surface.

Стаття надійшла до редколегії 13.11.98

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 125–131 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 125–131*

УДК 517.95

Зіновій Нитребич

ПРО ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД ВІД РОЗВ'ЯЗКУ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ

Відомо [1], що між задачею Коші та крайовою задачею з багатоточковими умовами за часовою змінною для одного і того ж диференціального рівняння з частинними похідними існує принципова різниця. Вона полягає насамперед у такому: якщо розв'язком задачі Коші для однорідного диференціального рівняння з однорідними початковими умовами є лише тривіальний розв'язок, то багатоточкова задача для того ж рівняння з однорідними багатоточковими умовами окрім тривіального, може мати і ненульові розв'язки. Це означає, що багатоточкова задача для диференціальних рівнянь із частинними похідними здебільшого є некоректною крайовою задачею, хоча існують і коректні постановки таких задач [2].

Незважаючи на принципову відмінність між задачею Коші і багатоточковою задачею, все ж виявляється можливим граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші для одного і того ж диференціального рівняння. Опис цього переходу, а, отже, і доведення того факту, що крайова задача з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною є узагальненням задачі Коші, є метою цієї праці.

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\left[\frac{d^n}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t) \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\right] T(t) = 0\,, \tag{1}$$

де $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ - неперервні на $[0; +\infty)$ функції.

Запишемо для рівняння (1) початкові умови

$$T^{(k-1)}(0) = c_k\,,\ k = \overline{1, n}\,, \tag{2}$$

та n-точкові умови

$$T((k-1)h) = c_k\,,\ k = \overline{1, n}\,, \tag{3}$$

де c_k, $k = \overline{1, n}$, - довільні сталі, $h \neq 0$, $h \in R$.

Визначимо схему одержання розв'язку задачі Коші (1), (2), використовуючи розв'язок багатоточкової задачі (1), (3). Зауважимо, що простим прямуванням h до нуля з розв'язку задачі (1), (3) одержати розв'язок задачі (1), (2) неможливо. Для цього треба використовувати деяку "вагову" матрицю, що залежить від кроку h.

Нехай $\{T_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$ – нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння (1), тобто система розв'язків рівняння (1), які задовольняють умови

$$T_j^{(k-1)}(0) = \delta_{jk}\ ,\ \ j,k = \overline{1,n}\,, \tag{4}$$

де δ_{jk} - символ Кронекера.

За нормальною фундаментальною системою розв'язків рівняння (1) розв'язок задачі (1), (2) записуємо так:

$$T(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(t)\,. \tag{5}$$

Поряд з нормальною фундаментальною системою розв'язків $\{T_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$ побудуємо систему розв'язків $\{\hat{T}_j(t,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ рівняння (1), які задовольняють умови

$$\hat{T}_j((k-1)h,h) = \delta_{jk}\ ,\ \ j,k = \overline{1,n}\,. \tag{6}$$

Шукаючи елементи цієї системи у вигляді лінійної комбінації елементів нормальної фундаментальної системи розв'язків

$$\hat{T}_j(t,h) = \sum_{m=1}^{n} A_{mj}(h) T_m(t)\ ,\ \ j = \overline{1,n}\,, \tag{7}$$

де $A_{mj}(h)$ – невідомі функції, залежні від кроку h, і задовольняючи умови (6), одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення $A_{mj}(h)$, яку запишемо у матричному вигляді

$$A(h)D(h) = E_n\,, \tag{8}$$

де $A(h) = \|A_{mj}(h)\|_{m,j=\overline{1,n}}$, $D(h) = \|T_j((m-1)h)\|_{m,j=\overline{1,n}}$, E_n – одинична матриця порядку n.

Матричне рівняння (8) однозначно розв'язане, якщо

$$\Delta(h) \equiv \det D(h) \not\equiv 0\,.$$

Якщо $\Delta(h) \equiv 0$, тоді задача (1), (3) є недоозначеною. Якщо ж $\Delta(h) \not\equiv 0$, тоді позначимо

$$M = \{h \in R\ :\ \Delta(h) = 0\}\,.$$

Множина M може збігатися з $\emptyset$ або складатися зі зліченної кількості точок $h_n \in R$, де $n \in N$.

Для $h \overline{\in} M$ матричне рівняння (8) однозначно розв'язується: $A(h) = D^{-1}(h)$. Тоді співвідношення (7) можна записати так:

$$T_j(t) = \sum_{k=1}^{n} T_j((k-1)h)\hat{T}_k(t,h)\ ,\ \ j = \overline{1,n}\,. \tag{9}$$

Зауважимо, що формула (9) визначає, по-перше, тотожності стосовно $h \overline{\in} M$, а, по-друге, співвідношення між елементами двох систем $\{T_j(t)\}_{j=\overline{1,n}}$, $\{\hat{T}_j(t,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ розв'язків рівняння (1).

За системою $\{\hat{T}_j(t,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ розв'язок задачі (1), (3) визначається формулою

$$T(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{T}_k(t,h)\,,$$

або, врахувавши залежність розв'язку від h, $c_1, c_2, \cdots, c_n$, так:

$$T(t,h,c_1,c_2,\cdots,c_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k \hat{T}_k(t,h)\,. \tag{10}$$

Теорема 1. *Нехай для задачі (1), (3) $\Delta(h) \not\equiv 0$. Тоді розв'язок задачі (1), (2) може бути знайдений через розв'язки (10) задачі (1), (3) за допомогою граничного переходу, що визначається формулою*

$$T(t) = \lim_{h\to 0}\Big(T(t,h,1,1,1,\cdots,1)c_1 + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} T\left(t,h,0,\frac{h^k}{k!},\frac{(2h)^k}{k!},\cdots,\frac{((n-1)h)^k}{k!}\right)c_{k+1}\Big)\,. \tag{11}$$

Доведення. Довести той факт, що формула (11) визначає розв'язок (5) задачі (1), (2), це те саме, що довести виконання співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\Lambda(h)\begin{pmatrix}\hat{T}_1(t,h)\\ \hat{T}_2(t,h)\\ \cdots\\ \hat{T}_n(t,h)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}T_1(t)\\ T_2(t)\\ \cdots\\ T_n(t)\end{pmatrix}\,, \tag{12}$$

де "вагова" матриця $\Lambda(h)$ має вигляд

$$\Lambda(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & h & 2h & \cdots & (n-1)h\\ 0 & \frac{h^2}{2!} & \frac{(2h)^2}{2!} & \cdots & \frac{((n-1)h)^2}{2!}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(2h)^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{((n-1)h)^{n-1}}{(n-1)!}\end{pmatrix}\,. \tag{13}$$

Для елементів нормальної фундаментальної системи розв'язків рівняння (1) на підставі (4) правильні такі розвинення в ряди Маклорена

$$T_j(t) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{T_j^{(k)}(0)}{k!}t^k\,,\ j=\overline{1,n}\,,$$

які можна записати у вигляді

$$T_j(t) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + o(t^{n-1})\,,\ j=\overline{1,n}\,. \tag{14}$$

Для близьких до нуля значень h з рівностей (14) одержуємо

$$T_j((k-1)h) = \frac{((k-1)h)^{j-1}}{(j-1)!} + o(h^{n-1})\,,\ j,k=\overline{1,n}\,. \tag{15}$$

Підставляючи (15) у тотожності (9), маємо

$$T_j(t) = \delta_{1j}\hat{T}_1(t,h) + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{((k-1)h)^{j-1}}{(j-1)!} + o(h^{n-1})\right)\hat{T}_k(t,h)\,,\ j=\overline{1,n}\,.$$

Записуючи ці тотожності у вигляді

$$T_j(t) = \lim_{h\to 0}\left\{\delta_{1j}\hat{T}_1(t,h) + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{((k-1)h)^{j-1}}{(j-1)!} + o(h^{n-1})\right)\hat{T}_k(t,h)\right\}\,,\ j=\overline{1,n}\,,$$

і відкидаючи нескінченно малі величини вищого порядку мализни, одержуємо рівності

$$T_j(t) = \lim_{h\to 0}\left\{\delta_{1j}\hat{T}_1(t,h) + \sum_{k=2}^{n}\frac{((k-1)h)^{j-1}}{(j-1)!}\hat{T}_k(t,h)\right\}\ ,\ j=\overline{1,n}\,,$$

які, очевидно, можна подати у матричному вигляді (12) з "ваговою" матрицею (13). Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо замість умов (3) задані n-точкові умови

$$T(\xi+(k-1)h) = c_k\ ,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{16}$$

де $\xi \neq 0$, тоді за поданою в теоремі 1 схемою з розв'язку n-точкової задачі (1), (16) можна одержати розв'язок задачі Коші для рівняння (1) з початковими умовами в точці $t=\xi$.

Зауваження 2. У багатоточкових умовах (3) вузли $t_k=(k-1)h$, $k=\overline{1,n}$, є рівновіддаленими. Якщо ж вузли $t_1,t_2,\cdots,t_n$ не є рівновіддаленими, тобто $t_i = h\xi_i$, $i=\overline{1,n}$, $0=\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n$ і $t_1,t_2,\cdots,t_n\in[0;+\infty)$, тоді схема граничного переходу при $h\to 0$ залишається такою самою, лише "вагова" матриця матиме вигляд

$$\Lambda(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & h\xi_2 & h\xi_3 & \cdots & h\xi_n \\ 0 & \frac{(h\xi_2)^2}{2!} & \frac{(h\xi_3)^2}{2!} & \cdots & \frac{(h\xi_n)^2}{2!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{(h\xi_2)^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(h\xi_3)^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{(h\xi_n)^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}.$$

Одержані результати для звичайних диференціальних рівнянь перенесемо на випадок диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Нехай задано диференціальне рівняння

$$L\left(t,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{k=1}^{n} A_k\left(t,\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{n-k}u}{\partial t^{n-k}} = 0\ ,\ x\in R^s\,, \tag{17}$$

де $A_k\left(t,\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільні лінійні диференціальні вирази, взагалі кажучи, безмежного порядку з коефіцієнтами, що неперервно залежать від t. Припускаємо, що для кожного $t\geqslant 0$ символи $A_k(t,\nu)$, $k=\overline{1,n}$, є цілими стосовно $\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_s)$ функціями.

Розглянемо для рівняння (17) початкові умови

$$\frac{\partial^{k-1}u}{\partial t^{k-1}}(0,x) = \varphi_k(x)\ ,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{18}$$

та n-точкові умови вигляду

$$u(\xi_k h,x) = \varphi_k(x)\ ,\ k=\overline{1,n}\,, \tag{19}$$

де $h\neq 0$, $h\in R$, $0=\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<+\infty$.

Позначимо через $\{T_j(t,\nu)\}_{j=\overline{1,n}}$, $\{\hat{T}_j(t,\nu,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ дві сукупності розв'язків рівняння

$$L\left(t,\frac{d}{dt},\nu\right)T(t,\nu) = 0\,, \tag{20}$$

які задовольняють відповідно умови

$$T_j^{(k-1)}(0,\nu) = \delta_{jk}\,,\ j,k=\overline{1,n}\,, \tag{21}$$

$$\hat{T}_j(\xi_k h,\nu,h) = \delta_{jk}\,,\ j,k=\overline{1,n}\,. \tag{22}$$

Якщо система розв'язків рівняння (20), яка задовольняє умови (21), може бути завжди однозначно побудованою, то про сукупності розв'язків $\{\hat{T}_j(t,\nu,h)\}_{j=\overline{1,n}}$ робимо припущення, що вона може бути побудованою, тобто, що відповідний характеристичний визначник задачі (20), (22) $\Delta(\nu,h)\not\equiv 0$.

Для подання розв'язку багатоточкової задачі (17), (19) використаємо операційний метод, породжений узагальненою схемою відокремлення змінних [2], хоча для побудови розв'язку задачі (17), (19), зрозуміло, можна використовувати й інші методи.

Формальний розв'язок задачі (17), (19) запишемо у вигляді

$$u(t,x,h,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n) = \sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\hat{T}_j(t,\nu,h)\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}, \tag{23}$$

де $\nu\cdot x = \nu_1x_1+\nu_2x_2+\cdots+\nu_sx_s$. У працях [2,3] зазначено класи аналітичних функцій, у яких поданий формальний розв'язок (23) задачі (17), (19) та подібних до неї задач є фактичним.

Теорема 2. *Розв'язок задачі Коші (17), (18) можна одержати з розв'язку (23) n-точкової задачі (17), (19) граничним переходом при $h\to 0$, що визначається формулою*

$$u(t,x) = \lim_{h\to 0}(u(t,x,h,\varphi_1,\varphi_1,\varphi_1,\cdots,\varphi_1)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^k}{k!}u(t,x,h,0,\xi_2^k\varphi_{k+1},\xi_3^k\varphi_{k+1},\cdots,\xi_n^k\varphi_{k+1})\,. \tag{24}$$

Доведення. Враховуючи вигляд розв'язку (23), з формули (24) одержуємо

$$u(t,x) = \lim_{h\to 0}\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\sum_{j=1}^{n}\hat{T}_j(t,\nu,h)\right\}\Bigg|_{\nu=0}+$$
$$+\lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{h^k}{k!}\varphi_{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\sum_{m=2}^{n}\xi_m^k\hat{T}_m(t,\nu,h)\right\}\Bigg|_{\nu=0}=$$
$$=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}\sum_{j=1}^{n}\hat{T}_j(t,\nu,h)\right\}\Bigg|_{\nu=0}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}\sum_{m=2}^{n}\frac{(h\xi_m)^k}{k!}\hat{T}_m(t,\nu,h)\right\}\Bigg|_{\nu=0}.$$

Використовуючи співвідношення (12), замінюючи в якому $T_j(t)$ на $T_j(t,\nu)$ і $\hat{T}_j(t,h)$ на $\hat{T}_j(t,\nu,h)$, знаходимо розв'язок задачі Коші (17), (18):

$$u(t,x) = \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu\cdot x]T_1(t,\nu)\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\varphi_{k+1}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu\cdot x]T_{k+1}(t,\nu)\}\Big|_{\nu=0}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_j(t,\nu)\exp[\nu\cdot x]\}\Big|_{\nu=0}.$$

Оскільки $\{T_j(t,\nu)\}_{j=\overline{1,n}}$ – нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння (20), тоді формула

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{T_j(t,\nu)\exp[\nu\cdot x]\}\Big|_{\nu=0} \tag{25}$$

є поданням формального розв'язку задачі Коші (17), (18). Теорему доведено.

Зауважимо, що в праці [2] виділено класи аналітичних функцій, у яких знайдений формальний розв'язок (25) задачі Коші є фактичним. Зокрема, якщо $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – квазіполіноми, то, легко бачити, за допомогою одних лише операцій диференціювання, причому скінченної їх кількості, неважко будуються за формулою (25) так звані квазіполіноміальні розв'язки задачі Коші (17), (18).

Приклад. З розв'язку двоточкової задачі для хвильового рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta_s\right]u(t,x)=0\ t>0,\ x\in R^s, \tag{26}$$

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\ u(h,x)=\varphi_2(x), \tag{27}$$

одержимо розв'язок задачі Коші для рівняння (26) з початковими умовами

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\varphi_2(x). \tag{28}$$

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}-a^2|\nu|^2\right]T(t,\nu)=0, \tag{29}$$

де $\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_s)$, $|\nu|^2=\nu_1^2+\nu_2^2+\cdots+\nu_s^2$.

У цьому випадку $\Delta(\nu,h)=\mathrm{sh}[a|\nu|h]$, а, отже, не дорівнює тотожно нулю, тому будуємо розв'язки $\hat{T}_1(t,\nu,h)$, $\hat{T}_2(t,\nu,h)$ рівняння (29):

$$\hat{T}_1(t,\nu,h)=\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|(h-t)]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]},\ \hat{T}_2(t,\nu,h)=\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}.$$

Формальний розв'язок задачі (26), (27) має вигляд

$$u(t,x,h,\varphi_1,\varphi_2)=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|(h-t)]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}\exp[\nu\cdot x]\right\}\Big|_{\nu=0}.$$

Тепер для одержання розв'язку задачі Коші (26), (28) виконаємо граничний перехід за формулою (24):

$$u(t,x)=\lim_{h\to0}(u(t,x,h,\varphi_1,\varphi_1)+hu(t,x,h,0,\varphi_2))=$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x](\hat{T}_1(t,\nu,h)+\hat{T}_2(t,\nu,h))\right\}\Big|_{\nu=0}\right)+$$

$$+\lim_{h\to 0}\left(h\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\hat{T}_2(t,\nu,h)\right\}\Big|_{\nu=0}\right)=$$

$$=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}(\hat{T}_1(t,\nu,h)+\hat{T}_2(t,\nu,h))\right\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\lim_{h\to 0}h\hat{T}_2(t,\nu,h)\right\}\Big|_{\nu=0}.$$

Обчислюємо границі

$$\lim_{h\to 0}(\hat{T}_1(t,\nu,h)+\hat{T}_2(t,\nu,h))=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|(h-t)]+\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}=\left[\frac{0}{0}\right]=\mathrm{ch}[a|\nu|t],$$

$$\lim_{h\to 0}h\hat{T}_2(t,\nu,h)=\lim_{h\to 0}\frac{h\ \mathrm{sh}[a|\nu|t]}{\mathrm{sh}[a|\nu|h]}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{a|\nu|}.$$

Знаходимо зображення розв'язку задачі Коші (26), (28):

$$u(t,x)=\varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\{\exp[\nu\cdot x]\mathrm{ch}[a|\nu|t]\}\Big|_{\nu=0}+$$

$$+\varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\exp[\nu\cdot x]\frac{\mathrm{sh}[a|\nu|t]}{a|\nu|}\right\}\Big|_{\nu=0}.$$

Отже, крайова задача з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною для диференціального рівняння із частинними похідними є узагальненням задачі Коші для цього ж рівняння, граничним переходом при прямуванні всіх вузлів до однієї (крайньої лівої) точки з розв'язку багатоточкової задачі можна одержати розв'язок задачі Коші з початковими умовами в цій точці.

---

1. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К., 1984.
2. *Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К., 1993.
3. *Нитребич З.М.* Крайова задача в безмежній смузі // Мат.методи і фіз.-мех. поля. – 1994. – N 37. – С.16-21.

Nytrebych Z.

ON THE PASSAGE TO THE LIMIT FROM THE MULTIPOINT PROBLEM SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM SOLUTION

It is proved, that the problem with local multipoint conditions with respect to time variable for a differential equation is the Cauchy problem generalization for this equation. The scheme of the passage to the limit is proposed. From the multipoint problem solution one can obtain the Cauchy problem solution under tending all multipoint conditions nodes to one (extreme left) point from the soluton by means of the proposed scheme.

Стаття надійшла до редколегії 02.04.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 132–139 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 132–139*

УДК 517.95

МАРІАННА ОЛІСКЕВИЧ

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З НЕСТАНДАРТНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Коректність мішаних задач для гіперболічних систем першого порядку, коефіцієнти яких залежать від однієї просторової та часової змінної, розглянуто у працях В.Ф. Ждановича, В.М. Кирилича, К.В. Брушлінського та інших авторів ([1] - [4]). У праці [5] доведено існування, єдиність та стійкість розв'язку мішаної задачі для лінійної гіперболічної системи з двома просторовими змінними і періодичними крайовими умовами. У цій статті ми досліджуємо мішану задачу для нелінійної гіперболічної системи з певними нестандартними крайовими умовами: на частині межі задано значення однієї з невідомих функцій, а на доповненні – іншої. Зазначимо, що розглянуті крайові умови були запропоновані для гіперболічних систем Г.А. Шинкаренком.

У смузі $P = \{(x, y, t) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, t > 0\}$ розглянемо мішану задачу для гіперболічної системи

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}(x, y, t)\frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{2} b_{ij}(x, y, t)\frac{\partial u_j}{\partial y} + \sum_{j=1}^{2} c_{ij}(x, y, t)u_j + \\ + g_i(u_1, u_2) = f_i(x, y, t) \qquad (i = 1, 2) \tag{1}$$

з крайовими

$$u_1(0, y, t) = 0, \quad u_2(1, y, t) = 0, \tag{2}$$

$$u_1(x, 0, t) = 0, \quad u_2(x, 1, t) = 0, \tag{3}$$

і початковими умовами

$$u_i(x, y, 0) = \varphi_i(x, y) \qquad (i = 1, 2), \tag{4}$$

де $A(x, y, t) = (a_{ij}(x, y, t))$, $B(x, y, t) = (b_{ij}(x, y, t))$ – симетричні квадратні матриці порядку 2, а функції $\varphi_i(x, y)$ задовольняють умови погодження. Позначимо $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Теорема 1. *Нехай $\varphi_i \in H^1(D)$, $f_i \in H^1_{\text{loc}}(\overline{P})$ $(i = 1, 2)$, функції a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} та їхні перші похідні за t, x, y належать простору $L^{\infty}_{\text{loc}}(P)$, причому a_{ii}, b_{12} задовольняють умови (2), a_{12}, b_{ii} – умови (3), а c_{ij}, f_i – умови (2) і (3) $(i, j = 1, 2)$. Функції $g_i(u_1, u_2)$ такі, що для довільних $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ виконуються умови*

$$(g_i(u) - g_i(v))(u_i - v_i) \geqslant G_1|u_i - v_i|^p, \tag{5}$$

$$|g(u)| \leqslant G_2 |u|^{p-1} \tag{6}$$

і квадратична форма $\sum\limits_{i,j}^{2} \dfrac{\partial g_i}{\partial u_j}\xi_i\xi_j$ *додатно визначена, тобто існує стала* $G_0 > 0$ *така, що*

$$\sum_{i,j}^{2} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}\xi_i\xi_j \geqslant G_0 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \xi_2). \tag{7}$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1) – (4), який належить до простору $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{P})$.

Доведення. Нехай $\{\phi_k^i(x,y)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $(i = 1, 2)$ фундаментальна система в просторі функцій з $H^1(D)$, причому $\phi_k^i(x,y)$ – власні функції оператора Лапласа

$$\Delta\phi_k^i = -\lambda_k \phi_k^i \qquad (i = 1, 2),$$

які задовольняють крайові умови

$$\phi_k^1(0,y) = 0, \quad \phi_k^2(1,y) = 0, \qquad \phi_k^1(x,0) = 0, \quad \phi_k^2(x,1) = 0,$$
$$\frac{\partial\phi_k^1(1,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\phi_k^2(0,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\phi_k^1(x,1)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\phi_k^2(x,0)}{\partial y} = 0.$$

Наближений роз'язок задачі (1) – (4) шукаємо у вигляді

$$u_i^N = \sum_{k=1}^{N} c_{ik}^N(t)\phi_k^i(x,y) \qquad (i = 1, 2) \qquad (N = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

зі співвідношень

$$\int\limits_D \Big(u_{it}^N + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}u_{jx}^N + \sum_{j=1}^{2} b_{ij}u_{jy}^N + \sum_{j=1}^{2} c_{ij}u_j^N + g_i(u_1^N, u_2^N)\Big)\phi_k^i\, dxdy =$$
$$= \int\limits_D f_i\phi_k^i\, dxdy \quad (k = 1, \ldots, N; i = 1, 2), \tag{9}$$

$$c_{ik}^N(0) = \alpha_{ik}^N \qquad (k = 1, \ldots, N; i = 1, 2), \tag{10}$$

де α_{ik}^N – коефіцієнти сум $\varphi_i^N(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_{ik}^N\phi_k^i(x,y)$, які апроксимують при $N \to \infty$ функції φ_i в нормі $H^1(D)$. Рівності (9) є системою звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку за t для невідомих $c_{ik}^N(t)$ $(i = 1, 2, k = 1, \ldots, N)$. Оскільки коефіцієнти цієї системи є обмеженими функціями, а вільні члени з $L_1(0,T)$, то ця система однозначно розв'язна при початкових даних (10).

Оцінимо $\int\limits_{P_T} \sum\limits_{i=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial t}(u_i^{N\,2})dxdydt$. Для цього домножимо кожну з рівностей (9) на відповідне $2c_{ik}^N(t)$, підсумуємо за k від 1 до N та зінтегруємо за t від 0 до T. Одержимо рівність

$$\int\limits_{P_T} 2\Big(u_{it}^N + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}u_{jx}^N + \sum_{j=1}^{2} b_{ij}u_{jy}^N + \sum_{j=1}^{2} c_{ij}u_j^N + g_i(u^N)\Big)u_i^N\, dxdydt =$$

$$= \int\limits_{P_T} 2 f_i u_i^N \, dxdydt \quad (i = 1, 2) .$$

Звідси, використовуючи умову (3), оцінимо

$$\int\limits_{P_T} 2G_1 |u_i|^p dxdydt + \int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t} (u_i^N)^2 dxdydt - \int\limits_{P_T} \Big((6\mu + 1) u_i^{N\,2} + \mu \sum_{j=1}^{2} u_{jx}^{N\,2} +$$

$$+ \mu \sum_{j=1}^{2} u_{jy}^{N\,2} + \mu \sum_{j=1}^{2} u_j^{N\,2} \Big) dxdydt \leqslant \int\limits_{P_T} f_i^2 dxdydt \quad (i = 1, 2) ,$$

де μ – стала, що обмежує абсолютні величини коефіцієнтів системи.

Підсумовуючи останні нерівності за i від 1 до 2, одержимо

$$\int\limits_{P_T} 2G_1 \sum_{i=1}^{2} |u_i^N|^p dxdydt + \int\limits_{P_T} \frac{\partial}{\partial t} \Big(\sum_{i=1}^{2} u_i^{N\,2} \Big) dxdydt \leqslant \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} f_i^2 \, dxdydt +$$

$$+ \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} ((8\mu + 1) u_i^{N\,2} + 2\mu \, (u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})) \, dxdydt . \tag{11}$$

Оцінимо $\int\limits_{P_T} \sum\limits_{i=1}^{2} \dfrac{\partial}{\partial t} (u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2}) dxdydt$. Для цього домножимо кожну i–ну рівність (9) на $\lambda_k c_{ik}^N(t)$, підсумуємо за k від 1 до N, за i від 1 до 2, зінтегруємо за t від 0 до T. У підсумку матимемо

$$- \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} \Big(u_{it}^N + \sum_{j=1}^{2} (a_{ij} u_{jx}^N + b_{ij} u_{jy}^N + c_{ij} u_j^N) + g_i(u^N) - f_i \Big) \Delta u_i^N dxdydt = 0$$

або

$$- \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (u_{it}^N u_{ixx}^N + u_{it}^N u_{iyy}^N + g_i u_{ixx}^N + g_i u_{iyy}^N) \, dxdydt - \int\limits_{P_T} \Big(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} u_{jx}^N u_{ixx}^N +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} u_{jx}^N u_{iyy}^N + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} u_{jy}^N u_{ixx}^N \Big) dxdydt - \int\limits_{P_T} \Big(\sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} u_{jy}^N u_{iyy}^N +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} u_j^N u_{ixx}^N + \sum_{i,j=1}^{2} c_{ij} u_j^N u_{iyy}^N \Big) dxdydt = - \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (f_i u_{ixx}^N + f_i u_{iyy}^N) \, dxdydt .$$

Звідси

$$\int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2}) dxdydt - \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{2} (u_{it}^N (1, y, t) u_{ix}^N (1, y, t) -$$

$$- u_{it}^N (0, y, t) u_{ix}^N (0, y, t)) dydt - \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{2} (u_{it}^N (x, 1, t) u_{iy}^N (x, 1, t) -$$

$$-u_{it}^N(x,0,t)u_{iy}^N(x,0,t)\,)dxdt - \int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(g_i u_{ix}^N) + \frac{\partial}{\partial y}(g_i u_{iy}^N)\Big)dxdydt +$$

$$+\int\limits_{P_T}\sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial g_i}{\partial u_j}u_{jx}^N u_{ix}^N + \frac{\partial g_i}{\partial u_j}u_{jy}^N u_{iy}^N\Big)dxdydt - \int\limits_{P_T}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{ix}^N u_{jx}^N\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}u_{iy}^N u_{jy}^N\Big)\Big)dxdydt - \int\limits_{P_T}\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{ix}^N u_{jy}^N\Big) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}u_{iy}^N u_{jx}^N\Big)\Big)dxdydt + \int\limits_{P_T}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{iy}^N u_{jy}^N\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}u_{ix}^N u_{jx}^N\Big)\Big)dxdydt - \int\limits_{P_T}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}c_{ij}u_i^N u_{jx}^N\Big) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}c_{ij}u_i^N u_{jy}^N\Big)\Big)dxdydt + \frac{1}{2}\int\limits_{P_T}\sum_{i,j=1}^{2}(a_{ijx}u_{ix}^N u_{jx}^N + b_{ijy}u_{iy}^N u_{jy}^N - a_{ijx}u_{iy}^N u_{jy}^N -$$

$$-b_{ijy}u_{ix}^N u_{jx}^N)\,dxdydt + \int\limits_{P_T}\sum_{i,j=1}^{2}(a_{ijy}u_{ix}^N u_{jy}^N + b_{ijx}u_{iy}^N u_{jx}^N)\,dxdydt +$$

$$+\int\limits_{P_T}\sum_{i,j=1}^{2}(c_{ijx}u_i^N u_{jx}^N + c_{ij}u_{ix}^N u_{jx}^N + c_{ijy}u_i^N u_{jy}^N + c_{ij}u_{iy}^N u_{jy}^N)\,dxdydt =$$

$$= -\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x}(f_i u_{ix}^N) + \frac{\partial}{\partial y}(f_i u_{iy}^N) - f_{ix}u_{ix}^N - f_{iy}u_{iy}^N\Big)dxdydt\,.$$

Оскільки функції u_i^N задовольняють такі ж крайові умови, як і ϕ_i^k, а саме

$$\begin{aligned} &u_1^N(0,y,t) = 0\,,\ u_{1x}^N(1,y,t) = 0\,, \quad u_2^N(1,y,t) = 0\,,\ u_{2x}^N(0,y,t) = 0\,,\\ &u_1^N(x,0,t) = 0\,,\ u_{1y}^N(x,1,t) = 0\,, \quad u_2^N(x,1,t) = 0\,,\ u_{2y}^N(x,0,t) = 0\,, \end{aligned} \tag{12}$$

то, враховуючи умову (7) та умови, яким задовольняють функції a_{ij}, b_{ij} при $x = 0, 1$, $y = 0, 1$, одержимо, що

$$\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt \leqslant \int\limits_{P_T}4\mu\sum_{i=1}^{2}u_i^{N\,2}dxdydt +$$

$$+\int\limits_{P_T}(14\mu + 1 - 2G_0)\sum_{i=1}^{2}(u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt + \int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(f_{ix}^2 + f_{iy}^2)\,dxdydt\,. \tag{13}$$

Оцінимо $\int\limits_{P_T}\sum\limits_{i=1}^{2}\dfrac{\partial}{\partial t}(u_{it}^{N\,2})dxdydt$. Продиференціюємо кожну з рівностей (9) за t і домножимо на відповідну функцію $2c_{ik\,t}^N(t)$. Після підсумовування за k від 1 до N та інтегрування за t від 0 до T, одержимо

$$\int\limits_{P_T} 2\Big(u_{itt}^N+\sum_{j=1}^{2}(a_{ijt}u_{jx}^N+a_{ij}u_{jxt}^N+b_{ijt}u_{jy}^N+b_{ij}u_{jyt}^N+c_{ijt}u_j^N+c_{ij}u_{jt}^N\Big)u_{it}^N\,dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T} 2\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial g_i}{\partial u_j}u_{jt}^N u_{it}^N\,dxdydt=\int\limits_{P_T} 2f_{it}u_{it}^N\,dxdydt\,,\ (i=1,2)\,.$$

Підсумувавши ці рівності за i від 1 до 2, матимемо

$$\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{i=1}^{2}u_{it}^{N\,2}\Big)dxdydt+\int\limits_{P_T}2\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial g_i}{\partial u_j}u_{jt}^N u_{it}^N\,dxdydt-$$

$$-\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}((10\mu+1)u_{it}^{N\,2}+2\mu(u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2}+u_i^{N\,2}))\,dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{it}^N u_{jt}^N\Big)dxdydt+\int\limits_{P_T}\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}u_{it}^N u_{jt}^N\Big)dxdydt-$$

$$-\int\limits_{P_T}\Big(\sum_{i,j=1}^{2}a_{ijx}u_{jt}^N u_{it}^N+\sum_{i,j=1}^{2}b_{ijy}u_{jt}^N u_{it}^N\Big)dxdydt\leqslant\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}f_{it}^2\,dxdydt\,,$$

Врахувавши крайові умови (12) та умову (7), одержимо нерівність

$$\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_{it}^{N\,2})\,dxdydt\leqslant\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}((14\mu+1-2G_0)u_{it}^{N\,2}dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T}2\mu(u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2}+u_i^{N\,2}))\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}f_{it}^2\,dxdydt\,, \tag{14}$$

Додамо нерівності (11), (13) і (14). Тоді отримаємо

$$\int\limits_{P_T}2G_1\sum_{i=1}^{2}|u_i^N|^p\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{P_T}\Big((14\mu+1)\sum_{i=1}^{2}u_i^{N\,2}+(14\mu n+1-2G_0)\sum_{i=1}^{2}u_{it}^{N\,2}\Big)dxdydt+$$

$$+\int\limits_{P_T}(18\mu+1)\sum_{i=1}^{2}(u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(f_i^2+f_{it}^2+f_{ix}^2+f_{iy}^2)\,dxdydt\,.$$

Позначивши $K=\max\{14\mu+1,18\mu+1-2G_0\}$, матимемо

$$\int\limits_{P_T}2G_1\sum_{i=1}^{2}|u_i^N|^p\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt\leqslant \tag{15}$$

$$\leqslant K\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(f_i^2+f_{it}^2+f_{ix}^2+f_{iy}^2)\,dxdydt\,.$$

З нерівності (15) випливають оцінки

$$\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt \leqslant \tag{16}$$

$$\leqslant K\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(f_i^2+f_{it}^2+f_{ix}^2+f_{iy}^2)\,dxdydt\,,$$

$$\int\limits_{P_T}2G_1\sum_{i=1}^{2}|u_i^N|^p\,dxdydt \leqslant \tag{17}$$

$$\leqslant K\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(f_i^2+f_{it}^2+f_{ix}^2+f_{iy}^2)\,dxdydt\,.$$

Розглянемо нерівність (16). Норми $\|u_i^N(\cdot,\cdot,0)\|_{H^1(D)}=\|\varphi_i^N\|_{H^1(D)}$ обмежені рівномірно за N, а для доведення обмеженості норм $\|u_{it}^N(\cdot,\cdot,0)\|_{L^2(D)}$ $(i=1,2)$ помножимо кожну з рівностей (10) на $c_{ik\,t}$, підсумуємо їх за k від 1 до N і приймемо $t=0$. Після нескладних перетворень матимемо

$$\int\limits_{D}(u_{it}^N(x,y,0))^2dxdy \leqslant \int\limits_{D}|g_i(\varphi^N)||u_{it}^N(x,y,0)|dxdy+$$

$$+\mu\int\limits_{D}\sum_{j=1}^{2}(|\varphi_{jx}^N|+|\varphi_{jy}^N|+|\varphi_j^N|)|u_{it}^N(x,y,0)|dxdy+\int\limits_{D}f_i(x,y,0)u_{it}^N(x,y,0)dxdy.$$

Звідси, використовуючи умову (6), маємо оцінку

$$\int\limits_{D}(u_{it}^N(x,y,0))^2dxdy \leqslant \Bigg(\int\limits_{D}\Big(\mu\sum_{j=1}^{2}(\varphi_{jx}^N+\varphi_{jy}^N+\varphi_j^N)+$$

$$+G_2|\varphi|^{p-1}+f_i(x,y,0)\Big)^2dxdy\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int\limits_{D}(u_{it}^{N\,2}(x,y,0)dxdy\Bigg)^{1/2}$$

або

$$\|u_{it}^N(\cdot,\cdot,0)\|_{L^2(D)} \leqslant C \quad (i=1,2)\,. \tag{18}$$

Врахувавши нерівності (18), з (16) одержимо

$$\int\limits_{D}\sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+u_{iy}^{N\,2})\,dxdy \leqslant K\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(u_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}+u_{ix}^{N\,2}+$$

$$+u_{iy}^{N\,2})\,dxdydt+\int\limits_{P_T}\sum_{i=1}^{2}(f_i^2+f_{it}^2+f_{ix}^2+f_{iy}^2)\,dxdydt+$$

$$+\int\limits_{D}\sum_{i=1}^{2}(\varphi_i^{N\,2}+u_{it}^{N\,2}(x,y,0)+\varphi_{ix}^{N\,2}+\varphi_{iy}^{N\,2})\,dxdy,$$

звідки згідно з лемою Гронуола-Белмана матимемо

$$\int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (u_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\, dxdydt \leqslant C_1(T)\,. \tag{19}$$

Оцінивши праву частину нерівності (17) за допомогою (19), одержимо

$$\int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} |u_i^N|^p\, dxdydt \leqslant C_2(T)\,. \tag{20}$$

Додавши (19) і (20), матимемо

$$\int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (|u_i^N|^p + u_i^{N\,2} + u_{it}^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2})\, dxdydt \leqslant C(T)\,. \tag{21}$$

Отже, на підставі (21) з послідовностей $\{u_i^N\}$ можна вибрати підпослідовності, які збігаються слабко в $H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{P})$ до деяких елементів $u_i \in H^1_{\mathrm{loc}}(\overline{P})$.

Тепер за схемою, наведеною в [6, с.169], легко показати, що $u(x,y,t) = (u_1(x,y,t),\ldots,u_n(x,y,t))$ є узагальненим розв'язком майже скрізь задачі (1) – (4).

Єдиність розв'язку задачі (1)–(4) доведемо від супротивного. Припустимо, що існує два різних розв'язки задачі $u^1(x,y,t)$ і $u^2(x,y,t)$. Тоді функція $u = u^1 - u^2$ буде розв'язком задачі (1) – (4), у якій $f_i \equiv 0$, $\varphi_i \equiv 0$ $(i = 1,2)$. Провівши аналогічні міркування, як і при доведенні нерівностей (11), (13), додавши їх і використавши лему Гронуола-Белмана, матимемо нерівність

$$\int\limits_{P_T} 2G_1 \sum_{i=1}^{2} |u_i^N|^p dxdydt + \int\limits_{P_T} \sum_{i=1}^{2} (u_i^{N\,2} + u_{ix}^{N\,2} + u_{iy}^{N\,2}) dxdydt \leqslant 0\,,$$

з якої випливає, що $u \equiv 0$. Отже, ми одержали протиріччя. Теорему доведено.

---

1. *Брушлинский К.В.* О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – Т.23. – N6. – С.893-912.

2. *Жданович В.Ф.* Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. – 1959. – Т.47. – N3. – С. 307-354.

3. *Кирилич В.М.* Задача з нерозділеними граничними умовами для гіперболічної системи першого порядку на прямій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1984. – Вип. 24. – С. 90–94.

4. *Dickey R.W.* Stability theory for quasi-linear wave equatijns with linear damping// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1981. – A88. – N1-2. –P.25-41.

5. *Оліскевич М.О.* Стійкість розв'язку мішаної задачі для системи з трьома незалежними змінними з періодичними крайовими умовами// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 48. – С. 27-35.

6. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М., 1973.

Oliskevych M.

MIXED PROBLEM FOR NONLINEAR HYPERBOLIC SYSTEM OF THE FIRST ORDER WITH NONSTANDART BOUNDARY CONDITIONS

The nonstandart mixed problem for hyperbolic system of differential equations whith of the first order is considered. The theorem of existence and uniqueness of the solution is proved.

Стаття надійшла до редколегії 14.06.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 140–151

VISNYK LVIV UNIV.
Ser.Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 140–151

УДК 517.956.4

Галина Пасічник

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНУ МАТРИЦЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИСИПАТИВНИХ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Поняття фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) є одним з найважливіших понять у теорії задачі Коші для параболічних систем. Сьогодні найповніші результати для ФМР задачі Коші одержано у випадку рівномірно параболічних за Петровським систем з обмеженими гельдеровими коефіцієнтами. Ці результати узагальнювались на випадок $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем С.Д.Ейдельмана [1 – 3], в яких кожна просторова змінна може мати свою вагу стосовно часової змінної, параболічних за Петровським систем, коефіцієнти яких можуть необмежено зростати при $|x| \to \infty$ [4 – 8], і параболічних за Петровським та $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з обмеженими коефіцієнтами у випадку певних вироджень на початковій гіперплощині. Досліджуючи задачі Коші для систем із зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами було введено дисипативні параболічні системи [4,5], які узагальнювали рівняння вигляду

$$(\partial_t - \Delta + q(x))u = 0,$$

де функція $q : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ необмежено зростає при $|x| \to \infty$. Ця праця присвячена поширенню поняття дисипативності на $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи і дослідженню ФМР задачі Коші для таких систем.

1. Нехай $n, b_1, \dots, b_n, N$ – задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \dots, 2b_n)$; s – найменше спільне кратне чисел $b_1, \dots, b_n$; $m_j \equiv s/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $M \equiv \sum_{j=1}^n m_j$; T – задане додатне число. Якщо $x \in \mathbb{R}^n$, то $x_1, \dots, x_n$ – координати точки x. Користуватимемось ще такими позначеннями: $||k|| \equiv \sum_{j=1}^n m_j k_j$, якщо k – мультиіндекс; $p(x, y) \equiv (\sum_{j=1}^n |x_j - \xi_j|^{2/m_j})^{1/2}$ – спеціальна відстань між точками x і y з $\mathbb{R}^n$; $\Pi_H \equiv \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, I – одинична матриця порядку N.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$(Lu)(t, x) \equiv \left(I\partial_t - \sum_{||k|| \leqslant 2s} a_k(t, x)\partial_x^k \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де a_k, $||k|| \leqslant 2s$, – квадратні матриці порядку N.

Означення 1. *Систему (1) називатимемо дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує неперервна функція $D : \mathbb{R}^n \to [1, \infty)$, яка задовольняє такі умови:*

1) $D(x) \to \infty$ при $||x|| \to \infty$;

2) функції $b_k(t, x) \equiv a_k(t, x) D(x)^{||k|| - 2s}$, $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$, $||k|| \leqslant 2s$, обмежені;

3) система рівнянь

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,x)\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}} \right) v(t,x) = 0$$

з обмеженими коефіцієнтами та додатковою просторовою змінною x_{n+1} є рівномірно на $\Pi_{[0,T]}\times\mathbb{R}$ $\overrightarrow{2B}$-параболічною, де $\overrightarrow{2B} \equiv (2b_1, \dots, 2b_n, 2s)$, тобто p-корені рівняння

$$\det \left(Ip - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,x)(i\sigma)^k \mu^{k_{n+1}} \right) = 0$$

задовольняють умову

$$\exists\delta > 0 \quad \forall(t,x) \in \Pi_{[0,T]} \quad \forall\sigma \in \mathbb{R}^n \quad \forall\mu \in \mathbb{R}:$$

$$\mathrm{Re}\ \ p(t,x,\sigma,\mu) \leqslant -\delta \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^{2b_j} + \mu^{2s} \right).$$

Функція D називається характеристикою дисипації системи (1).

Припускатимемо, що виконуються такі умови на коефіцієнти a_k, $||k|| \leqslant \leqslant 2s$.

β_1. Система (1) є дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною в $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D.

β_2. a_k, $||k|| \leqslant 2s$, мають неперервні похідні $\partial_x^l a_k$, $||k|| \leqslant 2s$, $||l|| \leqslant 2s$, для яких правильні оцінки

$$|\partial_x^l a_k(t,x)| \leqslant C(D(x))^{2s-||k||+||l||(1-\epsilon)}, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]},$$

де $C > 0$, $\epsilon \in (0,1)$; функції b_k, $||k|| \leqslant 2s$ є неперервними за t рівномірно стосовно $x \in \mathbb{R}^n$.

β_3. $\partial_x^l a_k$, $||k|| \leqslant 2s$, $||l|| \leqslant 2s$ задовольняють умову Гельдера з показником $\alpha \in (0,1)$, тобто

$$\forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall\{x,x'\} \subset K(0,R): \quad |\partial_x^l a_k(t,x)| - \partial_{x'}^l a_k(t,x')| \leqslant C(p(x,x'))^\alpha.$$

β_4. Нехай $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – функція, яка має локально неперервні за Гельдером з показником $\alpha \in (0,1)$ похідні до порядку $4b$, які пов'язані з характеристикою дисипації D умовою

$$\exists C > 0 \quad \exists\eta > 0 \quad \exists\epsilon \in (0,1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+^n, \quad ||j|| \leqslant 4b:$$

$$|\partial_x^j g(x)| \leqslant C\eta(D(x))^{||j||(1-\epsilon)},$$

причому число η досить мале.

За умов $\beta_1 - \beta_3$ буде побудована ФМР задачі Коші та одержані її попередні оцінки. За допомогою функції g, яка задовольняє умову β_4, ці оцінки будуть уточнені.

2. Щоб побудувати ФМР задачі Коші для системи (1), скористаємось процедурою Леві. Спочатку опишемо головний член формули для ФМР.

Для цього розглянемо допоміжну систему рівнянь

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,y)\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}}\right) v(t,x,x_{n+1}) = 0,$$

$$(t,x,x_{n+1}) \in \Pi_{(0,T]} \times \mathbb{R},$$

де y – фіксована точка простору $\mathbb{R}^n$. За умов β_1 і β_2 на підставі результатів з [2] існує ФМР задачі Коші для системи (2), для якої правильні оцінки

$$\left|\partial_x^k \partial_{x_{n+1}}^{k_{n+1}} Z_0(t,x;\tau,\xi;x_{n+1}-\xi_{n+1};y)\right| \leqslant C_{kk_{n+1}} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-(M+1+||k||+k_{n+1})/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)^{1-q}|x_{n+1}-\xi_{n+1}|^q\},$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{x_{n+1},\xi_{n+1}\} \subset \mathbb{R},$$

де k і k_{n+1} довільні, $C_{kk_{n+1}} > 0$, $c > 0$ – деякі сталі; $q \equiv 2s/(2s-1)$; $E_c(t,\tau,x) \equiv \equiv \exp\left\{-c\sum\limits_{j=1}^{n}(t-\tau)^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\right\}$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^n$. Зокрема, функція $\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)$, $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}$, як функція аргументу $(t-\tau)^{-1/(2s)}z$ при фіксованих t,τ,x,ξ, є цілою функцією, для якої правильні оцінки

$$\left|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)\right| \leqslant C_k(t-\tau)^{-(M+1+||k||)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)^{1-q}|z_1|^q +$$

$$+ c'(t-\tau)^{1-q}|z_2|^q\}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

де $C_k > 0$, $c > 0$, $c' > 0$.

Нехай $\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y) \equiv F_{z\to\eta}[Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)]$. Тоді матриця $\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, є ФМР задачі Коші для системи

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,y)\eta^{k_{n+1}}\partial_x^k\right)\hat{v}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

для довільно фіксованих точок $\eta \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}^n$.

З оцінки (3) на підставі леми 1.1 з [5] випливають такі оцінки:

$$\left|\partial_x^k \hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)\right| \leqslant C_k(t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)\eta^{2s}\},$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Візьмемо

$$\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) \equiv \hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;D(y);y).$$

За допомогою оцінок (4) одержують оцінки

$$\left|\partial_x^k \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \leqslant C_k(t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^{2s}\},$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Зауважимо, що матриця $\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n$, є ФМР задачі Коші для системи

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||\leqslant 2s} a_k(t,y)\partial_x^k\right) v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6}$$

для кожної фіксованої точки $y \in \mathbb{R}^n$.

Наведемо деякі властивості ФМР задачі Коші для системи (6).

Властивість 1. *Нехай коефіцієнти системи (6) задовольняють умови* β_1 *і* β_2. *Тоді правильні оцінки*

$$\left|\partial_x^k \partial_y^l \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(M+||k||+||l||(1-\epsilon))/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times \exp\{-c(t,\tau)(D(y))^{2s}\}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi,y\} \subset \mathbb{R}^n, \quad ||k| > 0, \quad ||l|| \leqslant 2s. \tag{7}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну систему рівнянь

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||+k_{n+1}=2s} b_k(t,y)\eta^{k_{n+1}}(iz)^k\right) W(t,\tau;z,\eta;y) = 0,$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

На підставі умови β_1 для нормальної ФМР системи (8) правильна оцінка

$$|W(t,\tau;z,\eta;y)| \leqslant C\exp\{-\delta e(\sigma)(t-\tau) - \delta\eta^{2s}(t-\tau) + ce(\gamma)(t-\tau)\},$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \equiv \sigma + i\gamma \in \mathbb{C}^n, \quad \eta \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

де $C > 0$, $c > 0$, $\delta > 0$, $e(\sigma) \equiv \sum_{j=1}^n \sigma_j^{2b_j}$. Зокрема, при $\eta = D(y)$ система (8) матиме вигляд

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k||\leqslant 2s} a_k(t,y)(iz)^k\right) Q(t,\tau;z,y) = 0, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{10}$$

а оцінка (9) – вигляд

$$|Q(t,\tau;z,y)| \leqslant C\exp\{-\delta e(\sigma)(t-\tau) - \delta(D(y))^{2s}(t-\tau) + ce(\gamma)(t-\tau)\},$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{11}$$

Зауважимо, що тоді

$$\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) \equiv (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x-\xi,\sigma)\} Q(t,\tau,\sigma,y)d\sigma.$$

Диференціюючи (10) за y і використовуючи (11) та умову β_2, одержуємо

$$\left|\partial_y^l Q(t,\tau;z,y)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-||l||(1-\epsilon)/(2s)} \exp\{-\delta_1 e(\sigma)(t-\tau) -$$
$$-\delta_1(D(y))^{2s}(t-\tau) + c_1 e(\gamma)(t-\tau)\},$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad z \equiv \sigma + i\gamma \in \mathbb{C}^n, \quad ||l|| \leqslant 2s, \quad 0 < \delta_1 < \delta, \quad c_1 > c. \tag{12}$$

З оцінки (12) та леми 1.1 з [5] випливає оцінка (7).

Властивість 2. *Нехай коефіцієнти системи (6) задовольняють умови* β_1, β_2 *і* β_3. *Тоді правильні оцінки*

$$\forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall\{y,y'\} \subset K(0,R):$$

$$\left|\partial_x^k \partial_y^l \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) - \partial_x^k \partial_{y'}^l \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y')\right| \leqslant C(p(y,y'))^{\alpha}\times$$

$$\times (t-\tau)^{-(M+||k||+||l||(1-\epsilon))/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad ||k|| > 0, \quad ||l|| \leqslant 2s. \tag{13}$$

Доведення. Достатньо оцінити $Q(t,\tau;z,y) - Q(t,\tau;z,y')$. Запишемо тотожність

$$\left(I\partial_t - \sum_{||k|| \leqslant 2s} a_k(t,y)(iz)^k \right) (Q(t,\tau;z,y) - Q(t,\tau;z,y')) =$$

$$= \sum_{||k|| \leqslant 2s} (a_k(t,y) - a_k(t,y'))(iz)^k Q(t,\tau;z,y').$$

Тоді, використовуючи умови β_1 і β_2 та оцінку (11), одержуємо

$$|Q(t,\tau;z,y) - Q(t,\tau;z,y')| \leqslant C(p(y,y'))^\alpha \exp\{-\delta e(\sigma)(t-\tau)+$$

$$+ce(\gamma)(t-\tau)\}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{y,y'\} \subset K(0,R), \quad z \equiv \sigma + i\gamma \in \mathbb{C}^n.$$

Методом математичної індукції доводиться правильність оцінки

$$\left|\partial_y^l Q(t,\tau;z,y) - \partial_{y'}^l Q(t,\tau;z,y')\right| \leqslant C(p(y,y'))^\alpha (t-\tau)^{-||l||(1-\epsilon)/(2s)} \times$$

$$\times \exp\{-\delta e(\sigma)(t-\tau) + ce(\gamma)(t-\tau)\}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{y,y'\} \subset K(0,R), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

З останньоі нерівності та леми 1.1 з [5], випливає оцінка(13).

3. Наведемо основну теорему, яка стосується ФМР задачі Коші для дисипативної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи (1).

Теорема. *Нехай для коефіцієнтів системи (1) виконуються умови $\beta_1 - \beta_3$. Тоді існує ФМР $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ задачі Коші для системи (1), для якої правильні оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad ||k|| \leqslant 2s, \tag{14}$$

де $C > 0$, $c > 0$. Якщо для коефіцієнтів системи (1) і функції g виконані умови $\beta_1 - \beta_4$, то для ФМР задачі Коші для системи (1) правильні оцінки

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \leqslant C \sum_{p=0}^{||k||} (t-\tau)^{-(M+||k||-p)/(2s)} (D(x))^{p(1-\epsilon)} \times$$

$$\times E_c(t,\tau,x-\xi) \exp\{g(x) - g(\xi)\}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad ||k|| \leqslant 2s. \tag{15}$$

4. ФМР задачі Коші для системи (1) шукатимемо у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;x) + \int_\tau^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{Z}(t,x;\theta,y;x)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{16}$$

де $\varphi(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ – невідома матриця порядку N, яку підберемо так, щоб функція $Z(\cdot,\cdot;\tau,\xi)$ була розв'язком системи (1) для будь-якої фіксованої точки $(\tau,\xi) \in \Pi_{[0,T]}$.

Припускатимемо, що шукана функція φ є неперервною і для неї правильні оцінки

$$|\varphi(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-\lambda)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi); \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\forall R>0 \quad \exists \alpha_1 \in (0,1), \quad \alpha_1 < \lambda, \quad \forall \{x,x'\} \subset K(0,R): \quad |\Delta_x^{x'} \varphi(t,x;\tau,\xi)| \leqslant \\ \leqslant C(p(x,x'))^{\alpha_1} (t-\tau)^{-1-(M-\alpha_2)/(2s)} (E_c(t,\tau,x-\xi) + E_c(t,\tau,x'-\xi)), \\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha_2 \equiv \lambda - \alpha_1. \end{gathered} \tag{18}$$

Застосувавши диференціальний вираз L з (1) до функції (16) і використавши припущення стосовно φ, одержимо для φ інтегральне рівняння

$$\begin{gathered}\varphi(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi) + \int_\tau^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy, \\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{19}$$

де

$$K(t,x;\tau,\xi) = \sum_{||k|| \leqslant 2s} a_k(t,x) \sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_z^{k-j} \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;z) \mid_{z=x}. \tag{20}$$

Оцінимо ядро K, використовуючи (7), (20) та умови β_2. Маємо

$$\begin{gathered}|K(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-\lambda)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi), \\ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \equiv \min_{1 \leqslant j \leqslant n} (m_j \epsilon). \end{gathered} \tag{21}$$

На підставі оцінки (21) рівняння (19) розв'язують методом послідовних наближень і φ визначають формулою

$$\varphi(t,x;\tau,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{22}$$

де $K_1 \equiv K$, а для $m \geqslant 2$

$$K_m(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\theta,y) K_{m-1}(\theta,y;\tau,\xi)dy. \tag{23}$$

Оцінимо ядра K_m, $m \geqslant 2$. З (21) і (23) маємо

$$|K_2(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C_2(t-\tau)^{-1-(M-2\lambda)/(2s)} E_{c(1-\epsilon)}(t,\tau,x-\xi).$$

Методом математичної індукції доведено оцінку

$$|K_m(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C_m(t-\tau)^{-1-(M-m\lambda)/(2s)} E_{c(1-(m-1)\epsilon)}(t,\tau,x-\xi).$$

Виберемо натуральне число m_0 так, щоб $m_0 = \left[\frac{M-2s}{2s}\right] + 1$. Тоді

$$|K_{m_0}(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C_* E_{c_*}(t,\tau,x-\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{24}$$

де $C_* > 0$, $c_* \equiv c(1-\epsilon_0)$, $\epsilon_0 \equiv \epsilon(m_0 - 1)$, $\epsilon_0 < 1/2$.

Ядра K_m з $m > m_0$ оцінюємо так. Спочатку на підставі нерівностей (21) і (24) маємо

$$|K_{m_0+1}(t,x;\tau,\xi)| \leqslant CC_* LB\left(\frac{\lambda}{2s}, 1\right)(t-\tau)^{\lambda/(2s)} E_{c_*}(t,\tau,x-\xi),$$

де

$$L \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ -c\epsilon_0 \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{q_j} \right\} dz,$$

B – бета-функція Ейлера. Далі методом математичної індукції доводимо оцінку для будь-якого $k > 1$

$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)| \leqslant (CL)^k C_* \prod_{j=1}^{k} B\left(\frac{\lambda}{2s}, 1 + \frac{(j-1)\lambda}{2s}\right) \times$$

$$\times (t-\tau)^{k\lambda/(2s)} E_{c_*}(t,\tau,x-\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{25}$$

За допомогою формули

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

в якій Γ – гама-функція Ейлера, оцінка (25) набуває вигляду

$$|K_{m_0+k}(t,x;\tau,\xi)| \leqslant C_* \frac{(CL\Gamma(\frac{\lambda}{2s})(t-\tau)^{\lambda/(2s)})^k}{\Gamma(1+\frac{k\lambda}{2s})} E_{c_*}(t,\tau,x-\xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

З одержаних оцінок ядер K_m випливає, що ряд (22) мажорується збіжним рядом

$$C\left(\sum_{m=1}^{m_0} (t-\tau)^{-1-(M-m\lambda/(2s)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Gamma(\frac{\lambda}{2s}))^k (t-\tau)^{k\lambda/(2s)}}{\Gamma(1+\frac{k\lambda}{2s})}\right) \times$$

$$\times E_{c_*}(t,\tau,x-\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Отже, ряд (23) при t, τ, x, ξ таких, що $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $t-\tau \geqslant \delta$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, де δ – довільна досить мала додатна стала, збігається абсолютно й рівномірно і для його суми φ правильна оцінка (17).

Тепер доведемо правильність оцінки (18). При $(p(x,x'))^{2s} > \frac{1}{2}(t-\tau)$ оцінка (18) випливає з (17). Тому достатньо розглянути випадок, коли $(p(x,x'))^{2s} \leqslant \frac{1}{2}(t-\tau)$. Використовуючи (19), запишемо

$$\Delta_x^{x'} \varphi(t,x;\tau,\xi) = \Delta_x^{x'} K(t,x;\tau,\xi) + \int\limits_{\tau}^{\eta} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^{x'} K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau.\xi)dy +$$

$$+ \int\limits_{\eta}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy + \int\limits_{\eta}^{t} d\theta \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(t,x';\theta,y)\varphi(\theta,y;\tau.\xi)dy \equiv \sum_{j=1}^{4} J_j, \tag{26}$$

де величина η така, що $t-\eta = (p(x,x'))^{2s}$.

На підставі (20) маємо

$$\Delta_x^{x'} K(t,x;\tau,\xi) = \sum_{||k|| \leqslant 2s} (a_k(t,x) - a_k(t,x')) \sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_y^{k-j} \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) \,|_{y=x} +$$

$$+\sum_{\|k\|\leqslant 2s} a_k(t,x')\Delta_x^{x'}\left(\sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_y^{k-j}\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\mid_{y=x}\right),$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \{x,x'\}\subset K(0,R). \tag{27}$$

[ля оцінки другого доданка з (27) оцінимо спочатку різницю

$$\left|\partial_x^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)|_{y=x}-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x'}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\partial_x^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)|_{y=x}-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x}\right|+$$

$$+\left|\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x}-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x'}\right|. \tag{28}$$

Скориставшись теоремою про середнє та оцінкою (7), одержимо

$$\left|\partial_x^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)\right|\leqslant C(p(x,x'))^{\lambda_0}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-(M+\|m\|+\|l\|(1-\epsilon)+\lambda_0)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi)\exp\{-c(t-\tau)(D(y))^{2s}\},$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \{x,x',\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n,\quad (p(x,x'))^{2s}\leqslant\frac{1}{2}(t-\tau),\quad \lambda_0\in(0,1]. \tag{29}$$

З (13), (29), взявши $\lambda_0=\alpha$, та (28) випливає оцінка

$$\forall R>0\quad \exists C>0\quad \forall\{x,x'\}\subset K(0,R),\quad (p(x,x'))^{2s}\leqslant\frac{1}{2}(t-\tau):$$

$$\left|\partial_x^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)|_{y=x}-\partial_{x'}^m\partial_y^l\hat{Z}(t,x';\tau,\xi;y)|_{y=x'}\right|\leqslant C(p(x,x'))^{\alpha}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-(M+\|m\|+\|l\|(1-\epsilon)+\alpha)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{30}$$

Використовуючи (7), (27), (30) та умови β_2 і β_3, одержимо

$$\forall R>0\quad \exists\alpha_1\in(0,1),\quad \alpha_1<\lambda,\quad \forall\{x,x'\}\subset K(0,R),\quad (p(x,x'))^{2s}\leqslant\frac{1}{2}(t-\tau):$$

$$|\Delta_x^{x'}K(t,x;\tau,\xi)|\leqslant C(p(x,x'))^{\alpha_1}(t-\tau)^{-1-(M-\alpha_2)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha_2\equiv\lambda-\alpha_1. \tag{31}$$

Оскільки в інтегралі J_2 $t-\theta\geqslant(p(x,x'))^{2s}$, то, використовуючи (17) та (31),)держимо

$$|J_2|\leqslant C(p(x,x'))^{\alpha_1}(t-\tau)^{-1-(M-\alpha_2-\lambda)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi).$$

$$0\leqslant\tau<t\leqslant T,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \{x,x'\}\subset K(0,R). \tag{32}$$

Інтеграли J_3 і J_4 оцінюємо однаково. Оцінимо, наприклад, перший з них. На підставі оцінок (17), (21) і того, що

$$\int_\eta^t(t-\theta)^{\frac{\lambda}{2s}-1}(\theta-\tau)^{\frac{\lambda}{2s}-1}d\theta\leqslant\frac{2s}{\lambda}\left(\frac{1}{2}(t-\tau)\right)^{\frac{\lambda}{2s}-1}\int_\eta^t(t-\theta)^{\frac{\lambda}{2s}-1}d\theta=$$

$$= \frac{2s}{\lambda}\left(\frac{1}{2}(t-\tau)\right)^{\frac{\lambda}{2s}-1}(p(x,x'))^{\lambda},$$

одержимо

$$|J_3| \leqslant C(p(x,x'))^{\alpha_1}(t-\tau)^{-(M-\alpha_2)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,x',\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (p(x,x'))^{2s} \leqslant \frac{1}{2}(t-\tau). \tag{33}$$

З оцінок (31) – (33) випливає правильність оцінки (18).

Тепер доведемо правильність для Z оцінок (14). Для першого доданка з (16) маємо оцінку

$$\left|\partial_x^k \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;x)\right| = \left|\sum_{j\leqslant k} C_k^j \partial_x^j \partial_y^{k-j}\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\ |_{y=x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C(t-\tau)^{-(M+||k||)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$t \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad ||k|| \leqslant 2s. \tag{34}$$

Оцінимо похідні від другого доданка

$$W(t,x;\tau,\xi) \equiv \int_\tau^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \hat{Z}(t,x;\theta,y;x)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy,$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Якщо $||k|| < 2s$, то за допомогою властивості, аналогічної властивості 5 з [2], та оцінок (17) і (34) одержимо

$$\left|\partial_x^k W(t,x;\tau,\xi)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(M+||k||-\lambda)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi),$$

$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{35}$$

У випадку, коли $||k|| = 2s$, запишемо

$$\left|\partial_x^k W(t,x;\tau,\xi)\right| = \int_\tau^{t_1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t,x;\theta,y;x)\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy+$$

$$+\int_{t_1}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t,x;\theta,y;x)(\varphi(\theta,y;\tau,\xi)dy - \varphi(\theta,x;\tau,\xi))dy+$$

$$\int_{t_1}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t,x;\theta,y;x)dy\right)\varphi(\theta,x;\tau,\xi)d\theta \equiv L_1 + L_2 + L_3, \tag{36}$$

де число t_1 таке, що $t - t_1 = \frac{1}{2}(t-\tau)$.

Використовуючи (17) та (34) і те, що для будь-якого $\theta \in [\tau, t_1]$ $t - \theta \geqslant t - t_1 = \frac{1}{2}(t-\tau)$ одержимо

$$|L_1| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-\lambda)/(2s)}E_c(t,\tau,x-\xi). \tag{37}$$

Для оцінки L_2 розглянемо $x \in K\left(0, \frac{R}{2}\right)$, де R – будь-яке фіксоване додатне число. Запишемо L_2 у вигляді

$$L_2 = \int_{t_1}^{t} d\theta \int_{K(0,R)} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; x)(\varphi(\theta, y; \tau, \xi)dy - \varphi(\theta, x; \tau, \xi))dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\theta \int_{\mathbb{R}^n \setminus K(0,R)} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; x)(\varphi(\theta, y; \tau, \xi) - \varphi(\theta, x; \tau, \xi))dy \equiv L_2' + L_2''. \quad (38)$$

За допомогою (18) та (34) маємо

$$|L_2'| \leqslant C \int_{t_1}^{t} (t-\theta)^{\frac{\alpha_1}{2s}-1}(\theta-\tau)^{\frac{\alpha_2}{2s}-1} d\theta \int_{\mathbb{R}^n} E_c(t, \theta, x-y) \times$$
$$\times (E_c(\theta, \tau, y-\xi) + E_c(\theta, \tau, x-\xi))((t-\theta)(\theta-\tau))^{-\frac{M}{2s}} dy \leqslant$$
$$\leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-\alpha_1-\alpha_2)/(2s)} E_c(t, \tau, x-\xi),$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in K\left(0, \frac{R}{2}\right). \quad (39)$$

Для оцінки L_2'' за допомогою (17) запишемо

$$|\varphi(\theta, y; \tau, \xi) - \varphi(\theta, x; \tau, \xi)| \leqslant |\varphi(\theta, y; \tau, \xi)| + |\varphi(\theta, x; \tau, \xi)| \leqslant$$
$$\leqslant C(\theta-\tau)^{-1-(M-\lambda)/(2s)}(E_c(\theta, \tau, y-\xi) + E_c(\theta, \tau, x-\xi)). \quad (40)$$

Скориставшись нерівністю

$$|x_j - y_j|^{q_j} \geqslant ||x_j| - |y_j||^{q_j} \geqslant \left(\frac{R}{2}\right)^{q_j},$$
$$1 \leqslant j \leqslant n, \quad x \in K\left(0, \frac{R}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus K(0, R),$$

та оцінкою (5), одержимо

$$|L_2''| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-2\lambda)/(2s)} E_c(t, \tau, x-\xi),$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in K\left(0, \frac{R}{2}\right). \quad (41)$$

Для оцінки L_3 запишемо

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; x)dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_z^{k-j} \hat{Z}(t, x; \theta, y; z)\mid_{z=x} +$$
$$+ \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; z)\mid_{y=x})dy = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j<k} C_k^j \partial_x^j \partial_z^{k-j} \hat{Z}(t, x; \theta, y; z)|_{z=x} dy.$$

Використавши оцінку (7), одержимо

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^k \hat{Z}(t, x; \theta, y; x)dy \right| \leqslant C \sum_{j<k} (t-\theta)^{-(||j||+||k-j||(1-\epsilon))/(2s)} \leqslant$$

$$\leqslant C(t-\theta)^{-(||k||-\lambda)/(2s)}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 < ||k|| \leqslant 2s.$$

Тоді

$$|L_3| \leqslant C(t-\tau)^{-1-(M-2\lambda)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi), \quad t \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (42)$$

З (35) – (39), (41) і (42) одержуємо оцінку

$$\left|\partial_x^k W(t,x;\tau,\xi)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(M+||k||-\lambda)/(2s)} E_c(t,\tau,x-\xi),$$
$$0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad ||k|| \leqslant 2s. \quad (43)$$

З оцінок (34) та (43) випливає оцінка (14).

Зауважимо, що в оцінці (14) нема характеристики дисипації. Тому вона потребує уточнення. Для одержання оцінки (15) введемо нову невідому векторфункцію u_1 за допомогою рівності

$$u(t,x) = e^{g(x)} u_1(t,x), (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

де g задовольняє умову β_4. Тоді стосовно u_1 з (1) одержимо рівняння

$$\partial_t u_1(t,x) = \sum_{||j|| \leqslant 2s} \left(\sum_{\substack{k \geqslant j, \\ ||k||2s}} C_k^j e^{-g(x)} a_k(t,x) \partial_x^{k-j} e^{g(x)} \right) \partial_x^j u_1(t,x) = 0,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \quad (44)$$

Коефіцієнти системи (44) задовольняють умови β_1 – β_3. Тому існує ФМР $Z_1(t,x;\tau,\xi)$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, задачі Коші для системи (44), для якої правильна оцінка (14). Тоді ФМР задачі Коші для системи (1) матиме вигляд

$$Z(t,x;\tau,\xi) \doteq \exp\{g(x)-g(\xi)\} Z_1(t,x;\tau,\xi), \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (45)$$

З (45) безпосереднім диференціюванням одержуємо оцінку (15).

1. *Ейдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем // Докл.АН СССР. – 1966. – Т.133. – N 1. – С. 40-43.
2. *Ивасишен С.Д. Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$–параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – К., 1968. – Вып.1. – С. 3-175, 271-273.
3. *Ивасишен С.Д.* Интегральные представления и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – Т.42. – N 4. – С. 500-506.
4. *Эйдельман С.Д.* О задаче Коши для параболических систем с растущими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1959. – Т.127. – N 4. – С. 760-763.
5. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М., 1964.
6. *Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О.* О поведении решений параболических уравнений второго порядка с диссипацией // Дифференциальные уравнения. – 1971. – Т.7. – N 9. – С. 1684-1695.
7. *Эйдельман С.Д., Порпер Ф.О.* Исследование поведения L_2–норм решений сильно параболических систем с диссипацией // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – Т.37. – N 3. – С. 676-690.

8. *Эйдельман С.Д.* Параболические уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Т.63. – М., 1990. – С. 201-316.

Pasichnyk G.

ON FUNDAMENTAL MATRIX OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM OF DESIPATIVE $\overrightarrow{2b}$-PARABOLIC SYSTEMS

The definition of desipative $\overrightarrow{2b}$-parabolic system was introduced. The fundamental matrix of solutions of the Cauchy problem for such system was constructed, it was established the estimations of elements of this matrix and derivatives of the elements.

Стаття надійшла до редколегії 19.05.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 152–158 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 152–158*

УДК 517.5

Михайло Півкач

АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ ЗОВНІ МАЛИХ МНОЖИН АНАЛІТИЧНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ФУНКЦІЙ

Вступ. Розглянемо аналітичні в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функції, зображувані лакунарними степеневими рядами вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\lambda_n}, \tag{1}$$

де $\lambda_0 = 0$, $\{\lambda_n : n \geqslant 1\} \subset \mathbb{N}$, $\lambda_n \uparrow +\infty (n \to +\infty)$. Для $r \in (0,1)$ позначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^{\lambda_n} : n \geqslant 0\}$, $\nu_f(r) = \max\{\lambda_n : \mu_f(r) = |a_n| r^{\lambda_n}\}$.

Обмеження на (λ_n) разом з умовою на зростання $\mu_f(r)$ знизу (тобто, на можливу мінімальну швидкість зростання) забезпечують здебільшого певну регулярність у поводженні аналітичної функції вигляду (1). Наведемо теорему А. Зауважимо, що вона є частковим випадком одного результату з [1] і посилює теорему А. Вімана [2].

Теорема А. *Для того щоб для кожної функції f вигляду (1) і такої, що*

$$\varlimsup_{r \to 1-0} (1-r)^{\rho} \ln M_f(r) > 0, \rho > 0, \tag{2}$$

виконувались при $r \to 1-0$, $(r \in [0;1) \setminus E,\ dE = 0)$ співвідношення

$$M_f(r) \sim m_f(r) \sim \mu_f(r) \tag{3}$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\lambda_n^{\frac{1}{\rho+1}} \sum_{k \geqslant n} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = o(1),\ (n \to +\infty), \tag{4}$$

де $dE = \varlimsup\limits_{r \to 1-0} \frac{1}{1-r} \int_{E \cap [r,1)} \frac{dt}{t}$.

Звідси безпосередньо випливає, що $|f(z)| \sim \mu_f(|z|)$ при $|z| \to 1$, $|z| \notin E$, тобто зовні виняткової множини, яка має вигляд об'єднання кілець $\{z : r_j < |z| < R_j\}$. Ця обставина якраз є характерною особливістю більшості результатів стосовно асимптотичного поводження лакунарних степеневих рядів, на відміну від подібних теорем для цілих функцій з відомими нулями, де виняткові множини мають вигляд об'єднання малих кругів з центрами в цих нулях.

Хоч теорема А і містить умови правильності досить сильного співвідношення (3), з якого, зокрема, за теоремою Руше маємо для лічильної функції нулів функції f точне співвідношення

$$n(r,0,f)=\nu_f(r),\ (r\to 1-0,\ r\notin E),$$

однак з неї безпосередньо не випливає, наприклад, що нескінченність є в кожній точці $\xi\in\partial\mathbb{D}$ асимптотичним значенням навіть у випадку адамарівських лакун

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\geqslant\vartheta>1\ (n\geqslant 1). \tag{5}$$

Відзначимо, що за виконання умови (5) для функції f вигляду (1) з необмеженими коефіцієнтами (тим паче такої, що виконується (2)) за теоремою з [3] нескінченність є асимптотичним значенням у кожній точці $\xi\in\partial\mathbb{D}$. Посиленням цього твердження є теорема Б.

Теорема Б [4]. *Нехай для аналітичної в* $\mathbb{D}$ *функції* f *вигляду (1) виконується умова (5) і* $\sup\{|a_n|:n\geqslant 0\}=+\infty$. *Тоді для кожної точки* $\xi\in\partial\mathbb{D}$ *існує Жорданова крива* Γ *з кінцями в точках* 0 *і* ξ *така, що для всіх* $z\in\Gamma$

$$|f(z)|\geqslant\alpha\mu_f(|z|),$$

де $\alpha=\alpha(\vartheta)>0$ *- деяка стала.*

З огляду на наведені вище аргументи, а також на цитовані теореми, є цікавим одержати результати, які враховують лакунарність аналітичних функцій вигляду (1), і які є правильними зовні виняткової множини, що має вигляд об'єднання малих кругів. У цій статті, використовуючи працю [5], одержимо деякі результати такого характеру.

Для $0<\vartheta<1-r$ визначимо

$$k(r,\vartheta)=\max\left\{\nu_f(r+\vartheta),\frac{r}{\vartheta}\right\},\quad k(r)=\inf\{k(r,\vartheta):0<\vartheta<1-r\}.$$

Будемо вважати, що всюди виконується умова

$$\nu_f(r)>\frac{r}{1-r}\ (r_0\leqslant r<1). \tag{6}$$

Зауважимо, що для кожного $\varepsilon>0$ і для деякого $\vartheta\in(0,1-r)$ за означенням $k(r)$ і з монотонності $\nu_f(r)$ одержуємо $\nu_f(r)\leqslant\nu_f(r+\vartheta_0)\leqslant k(r,\vartheta_0)<k(r)+\varepsilon$, звідки, завдяки довільності $\varepsilon>0$, маємо $\nu_f(r)\leqslant k_f(r)$. Далі, оскільки для кожного $\vartheta>0$, $k(r)\leqslant k(r,\vartheta)$, то при $\vartheta=\frac{r}{\nu_f(r)}$, враховуючи (6), одержуємо $k(r)\leqslant\nu_f\big(r+\frac{r}{\nu_f(r)}\big)$. Тобто для всіх $r\in[r_0,1)$ правильні нерівності

$$\nu_f(r)\leqslant k(r)\leqslant\nu_f\left(r+\frac{r}{\nu_f(r)}\right). \tag{7}$$

Подібно як і в [6] доводимо, що для кожного $a>1$ існує таке $r_0<1$, що

$$k(r+\frac{r}{ak(r)})\leqslant\frac{a+1}{a-1}k(r)\ (r_0<r<1). \tag{8}$$

Нехай $K(a,r)=\{z:|z-a|<r\}$. У цій статті доведемо таку теорему.

Теорема. *Нехай для аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f вигляду (1) виконуються умови (6) і*

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{\ln \lambda_n}{\ln n} = \alpha > 2. \tag{9}$$

Тоді для будь-яких $\beta \in (\frac{1}{\alpha-1}; 1)$ і $\delta \in (0; \beta - \frac{1}{\alpha-1})$, існує $r_0 = r_0(\beta, \delta)$ таке, що для довільного $r > r_0$ і для всіх $z \in \partial K(0,r) \setminus E(r)$ справджується нерівність

$$|f(z)| > \exp(-(k(r))^\beta)\mu_f(r), \tag{10}$$

де $E(r)$ - об'єднання скінченної кількості дуг кола $\partial K(0,r)$, сума довжин яких не більша, ніж $\exp\{-k^\delta(r)\}$.

Легко бачити, що з теореми випливає наслідок.

Наслідок. *За виконання умов теореми площа підмножини кільця $\{z : r_0 < |z| < 1\}$, на якій не виконується оцінка (10), не більша, ніж $(1-r_0)\exp\{-k^\delta(r_0)\}$, де $r_0 \in (0;1)$ - довільне досить близьке до 1.*

Допоміжні твердження та доведення теореми. Виберемо число γ таке, що $\frac{1}{\alpha-1} < \gamma < \beta < 1$. Нехай за означенням

$$\varkappa(r) = [(k(r))^{1+\gamma}].$$

Зрозуміло, що $\varkappa$ - неспадна функція від r. Виберемо $q(r) = n(\varkappa(r))$, де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ - лічильна функція послідовності (λ_n). Умову (9) можна записати у вигляді

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln q(r)}{\ln \varkappa(r)} = \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\varlimsup_{r\to 1} \frac{\ln q(r)}{\ln k(r)} = \frac{1+\gamma}{\alpha} < \gamma.$$

Зауважимо, що знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що при $r \to 1-0$ $q(r) < (k(r))^{\gamma-2\varepsilon}$. Звідси одержуємо $\varkappa^{q+1} \leqslant e^{(k(r))^{\gamma-\varepsilon}}$ $(r \to 1-0)$.

Лема 1. *Якщо для функції f виконуються умови теореми 1, то для $q = q(r)$, $0 \leqslant p \leqslant q$, $a > 1$ при $r \to 1-0$ правильні нерівності*

$$\sum_{\lambda_n \geqslant \varkappa(r)+1} \lambda_n^q |a_n| r^{\lambda_n} \leqslant \varkappa^{q+1}(r) \exp\left(-\frac{\varkappa(r)}{2k(r)}\right)\mu(r),$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n^p |a_n| r^{\lambda_n} \leqslant \varkappa^{p+1}(r)\mu(r),$$

$$\mu\left(r + \frac{r}{ak(r)}\right) \leqslant \mu(r)\left(1 + \frac{1}{ak(r)}\right)^{ck(r)} \leqslant c_1\mu(r).$$

Доведення леми 1 використовує лише властивості $k(r)$, зокрема нерівності (7) і (8), і є повністю подібним до доведення відповідної леми в [5].

Нехай $I = \{\lambda_n : n = 1, ..., q\}$, визначимо оператор D_I рівністю

$$D_I f(z) = \left(\prod_{\lambda_i \in I} d_{\lambda_i}\right) f(z),$$

де для $\lambda \in \mathbb{N}$, $d_\lambda f(z) = z^{\lambda+1}\dfrac{d}{dz}(z^{-\lambda}f(z))$.

Лема 2, по суті, міститься в статті [5, с.469].

Лема 2. *Для деякої аналітичної в $\mathbb{D}$ функції f і для зростаючої множини I маємо*

$$|D_I f(z)| \leqslant \sum_0^q C_{q,i}|z^i f^{(i)}(z)|,$$

де $C_{q,i}$ додатні цілі, що визначаються рівністю

$$\sum_0^q C_{q,i}t^i = \prod_{\lambda_i\in I}(\lambda_i + t).$$

Лема 3. *Якщо для функції $f(z)$ виконуються умови теореми 1 і якщо $\gamma \in \left(\frac{1}{\alpha-1};\beta\right)$, $q = q(r)$, $\varkappa = \varkappa(r)$, то для довільної точки $z \in \mathbb{D}$ такої, що $|z| = r > r_0$, знайдеться $p = p(z) \leqslant q(|z|) < (k(r))^\gamma$ таке, що $|f^{(p)}(z)| \geqslant \frac{1}{2}([\frac{1}{2}q]!)^2\varkappa^{-q}\mu(r)$.*

Доведення. Нехай $I = \{\lambda_i : \lambda_i \leqslant \varkappa, \lambda_i \neq \nu\}$. З визначення оператора $D_I f(z)$ одержуємо формулу

$$D_I f(z) = \prod_{\lambda_i\in I}(\nu - \lambda_i)a_i z^\nu + \sum_{\lambda_n \geqslant \varkappa+1}\prod_{\lambda_i\in I}(\lambda_n - \lambda_i)a_n z^{\lambda_n},$$

де $\nu = \nu_f(|z|)$ і за лемою 1

$$|D_I f(z)| \geqslant ([q/2]!)^2\mu(r) - \sum_{\lambda_n\geqslant\varkappa+1}\lambda_n^q|a_n|r^{\lambda_n} \geqslant \frac{1}{2}([q/2]!)^2\mu(r).$$

Нехай максимальне значення $|f^{(i)}(z)|$ досягається при $i = p \leqslant q$, тоді

$$|D_I f(z)| \leqslant |f^{(p)}(z)|\sum_0^q C_{q,i}r^i = |f^{(p)}(z)|\prod_{\lambda_i\in I}(\lambda_i + r).$$

Тому

$$|f^{(p)}(z)| \geqslant \frac{1}{2}([q/2]!)^2\varkappa^{-q}\mu(r).$$

Отже, лема 3 доведена.

Зауваження 1. *У випадку цілих функцій в [5] одержано слабшу нерівність, ніж нерівність у лемі 3. Повторюючи міркування з доведення леми 3, для цілих функцій отримуємо подібну нерівність. Відзначимо, що в [5] доведення відповідного твердження (лема 4 [5]) є неправильним.*

Лема 4. *Нехай z таке як в лемі 3, $|z| = r$. Тоді знайдеться $\xi_1 \in \partial K(z, k^{-2}(r))$ таке, що*

$$|f(\xi_1)| \geqslant \exp(-k(r)^\gamma)\mu(r).$$

Кількість нулів функції f в крузі $K(z, \frac{r}{2ak(r)})$, $a > 1$ не перевищує $C(k(r))^\gamma$, де C додатна константа.

Доведення. За інтегральною формулою Коші

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int\limits_{\partial K(z,k^{-2}(r))}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{p+1}}d\xi.$$

Знайдеться $\xi_1 \in \partial K(z, k^{-2}(r))$ таке, що $|f^{(p)}(z)| \leqslant \frac{p!}{2\pi i}|f(\xi_1)|k^{2p}(r)$. Отже,

$$|f(\xi_1)| \geqslant \frac{([\frac{1}{2}q]!)^2}{2q!}k^{-2q}(r)\varkappa^{-q}(r)\mu(r) \geqslant 2^{-q}k^{-2q}\varkappa^{-q}\mu(r) \geqslant \exp\{-k^{\gamma}(r)\}\mu(r).$$

Нехай $\rho_1 = \frac{r}{2ak(r)}$, $\rho_2 = \frac{r}{2ak(r)} + k^{-2}(r)$, $\rho_3 = \frac{r}{ak(r)}$. Розглянемо функцію f в кругах $K(z, \rho_1)$, $K(\xi_1, \rho_2)$, $K(\xi_1, \rho_3)$. Відзначимо, що $\overline{K}(z, \rho_1) \subset K(\xi_1, \rho_2)$, $\overline{K}(\xi_1, \rho_2) \subset K(\xi_1, \rho_3)$, $(r \to +\infty)$. Нехай $n(\xi, t)$ позначає кількість нулів f в крузі $\overline{K}(\xi, t)$, тоді

$$n(\xi_1, \rho_2) \leqslant \frac{1}{\ln \frac{\rho_3}{\rho_2}} \int\limits_{\rho_2}^{\rho_3} \frac{n(\xi_1, t)}{t} dt,$$

і далі за теоремою Єнсена

$$n(\xi_1, \rho_2) \leqslant \frac{C_1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\frac{f(\xi_1 + \rho_3 e^{i\vartheta})}{f(\xi_1)}\right| d\vartheta.$$

За лемою 1

$$|f(\xi_1 + \rho_3 e^{i\vartheta})| \leqslant \varkappa(|\xi_1| + \rho_3)\mu(|\xi_1| + \rho_3) \leqslant \varkappa(r + k^{-2}(r) + \rho_3)\mu(r + k^{-2}(r) + \rho_3) \leqslant$$

$$\leqslant \left(k(r + \frac{r}{bk})\right)^{\gamma+1} \mu\left(r + \frac{r}{bk}\right) \leqslant \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^{\gamma+1} (k(r))^{\gamma+1} \left(1 + \frac{1}{bk}\right)^{\frac{b+1}{b-1}k} \mu(r),$$

де $a > b > 1$. Отже, $n(\xi_1, \rho_3) \leqslant C(k(r))^{\gamma}$.

Круг $K(\xi_1, \rho_3)$ містить круг $K\left(z, \dfrac{r}{ak}\right)$, тому лема 4 доведена повністю.

Лема 5. *Якщо* $\sigma = \dfrac{r}{2k}$ *і якщо* $\alpha_1, ..., \alpha_s$ *– нулі функції* $f(z)$ *в крузі* $\overline{K}(z, 7\sigma/8)$, *тоді в крузі* $\overline{K}(z, \sigma/2)$

$$|f(\xi)| \geqslant \exp(-k^{\gamma_1}(r))\mu(r)(2\sigma)^{-s}|\prod_{i=1}^{s}(\xi - \alpha_i)|,$$

де $s \leqslant (k(r))^{\gamma_1}$, $\gamma_1 \in (\gamma; \beta)$.

Доведення. Нехай $\prod(\xi, \alpha_i)$– добуток Бляшке від нулів $\{\alpha_i\}$ в крузі $\overline{K}(z, 7\sigma/8)$, і $f(\xi) = \phi(\xi)\prod(\xi, \alpha)$ Тоді на колі $\partial K(z, 7\sigma/8)$, $|\phi(\xi)| = |f(\xi)|$ і в крузі $\overline{K}(z, 7\sigma/8)$, $|\phi(\xi)| \geqslant |f(\xi)|$. За принципом максимуму модуля та лемою 1 $|\phi(\xi)| \leqslant C_1 k^{1+\gamma}(r)\mu(r)$, а за лемою 4 $|\phi(\xi_1)| \geqslant |f(\xi_1)| \geqslant \exp(-k^{\gamma}(r))\mu(r)$. Розглянемо $f(\xi), \phi(\xi)$ в кругах

$$\overline{K}(z, \sigma/2) \subset \overline{K}(\xi_1, 5\sigma/8) \subset \overline{K}(\xi_1, 3\sigma/4) \subset \overline{K}(z, 7\sigma/8).$$

Функція $\phi(\xi)$ не має нулів у крузі $\overline{K}(z, 7\sigma/8)$ і $\dfrac{\phi(\xi)}{\phi(\xi_1)} = \exp\{\varphi(\xi)\}$.

Позначимо $M = \sup\{|\varphi(\xi)|, \ \xi \in \overline{K}(\xi_1, 5\sigma/8)\}$. За нерівністю Каратеодорі ([8]) застосованою до кільця $5\sigma/8 \leqslant |\xi - \xi_1| \leqslant 3\sigma/4$, маємо

$$M \leqslant 10 \sup\{Re\varphi(\xi), \ |\xi - \xi_1| \leqslant 3\sigma/4\} \leqslant Ck^{\gamma}(r).$$

У крузі $\overline{K}(\xi_1, 5\sigma/8)$ $Re\varphi(\xi) \geqslant -M$. Тоді в цьому ж крузі

$$\left|\frac{\phi(\xi)}{\phi(\xi_1)}\right| = \exp\{Re\varphi(\xi)\} \geqslant \exp\{-M\} \geqslant \exp\{-Ck^{\gamma}(r)\},$$

$$|\phi(\xi)| \geqslant \exp\{-(C+1)k^{\gamma}(r)\}\mu(r) \geqslant \exp\{-k^{\gamma_1}(r)\}\mu(r).$$

Цей круг містить круг $\overline{K}(z, \sigma/2)$ і тому

$$|f(\xi)| \geqslant \exp\{-k^{\gamma_1}(r)\}\mu(r)|\prod(\xi,\alpha)|,\ \xi \in \overline{K}(z, \sigma/2).$$

Для добутку Бляшке правильна нерівність

$$|\prod(\xi,\alpha)| \geqslant (\sigma)^{-s}\prod|\xi - \alpha_i|,$$

і лема доведена.

Зауваження 2. *У випадку цілих функцій в [5] доведення подібних тверджень містять у випадку леми 5 [5] неусувні, а у випадку леми 6 [5] усувні пробіли.*

Доведення теореми.

За лемою Картана ([8]) для довільного $h > 0$ і для $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \mathbb{C}$ можна знайти таку систему кружків, загальною сумою діаметрів $4h$, що для будь-якої точки ξ, яка лежить поза цими кружками, виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^{s}|\xi - \alpha_i| > \left(\frac{h}{e}\right)^s. \tag{11}$$

Нехай $\alpha_1, ..., \alpha_s$– нулі f в крузі $\overline{K}(z, \frac{7}{\sigma}/8)$, $\sigma = \frac{r}{2k(r)}$. Тоді в крузі $|\xi - z| \leqslant \frac{1}{2}\sigma$

$$|f(\xi)| \geqslant \exp\{-k^{\gamma_1}(r)\}\mu(r)(2\sigma)^{-s}|\prod_{i=1}^{s}(\xi - \alpha_i)|.$$

Знайдеться система кружків, яка містить $\alpha_1, ..., \alpha_s$ така, що поза цими кружками виконується (11) для довільного $h > 0$. Візьмемо $h = \exp\{-k^{\delta_1}(r) + 1\}$, де $\delta_1 \in (0, \beta - \gamma_1)$. Тоді $|\prod\limits_{i=1}^{s}(\xi - \alpha_i)| > \exp\{-sk^{\delta_1}(r)\} > \exp\{-k^{\gamma_1+\delta_1}(r)\}$. Сума діаметрів цих кружків не перевищує $4\exp\{-k^{\delta_1}(r) + 1\} \leqslant \exp\{-k^{\delta_2}(r)\}$, $0 < \delta_2 < \delta_1$. У крузі $K(z, \sigma/2)$ поза системою кружків $\bigcup\limits_{i=1}^{s} K(\alpha_i, \rho_i)$ виконується

$$|f(\xi)| \geqslant \exp\{-k^{\gamma_1}(r) - k^{\gamma_1+\delta_1}(r)\}\mu(r) > \exp\{-k^{\beta}(r)\}\mu(r).$$

Кружки $K(\alpha_i, \rho_i)$ можуть перетинати коло $\partial K(0, r)$. Оскільки загальна сума діаметрів цих кружків не більша $\exp\{-k^{\delta_2}(r)\}$, то перетинати коло $\partial K(0, r)$ може лише той кружок, центр якого віддалений від $\partial K(0, r)$ менше ніж на $\frac{1}{2}\exp\{-k^{\delta_2}(r)\}$. Кожен такий кружок відтинає на колі $\partial K(0, r)$ дугу, довжина якої менша за $2\exp\{-k^{\delta_2}(r)\}$. Існує скінченне покриття кола $\partial K(0, r)$ кругами радіуса $\frac{1}{2}\sigma(r)$ кількістю кругів, не більшою за $2\dfrac{2\pi r}{\frac{1}{2}\sigma} = 16\pi k(r)$. У цій покритій області нулів менше за $16\pi k^{1+\beta}(r)$. Отже, загальна сума довжин дуг, поза якими виконується (10) менша, ніж

$$\frac{32\pi k^{1+\beta}(r)}{\exp\{k^{\delta_2}(r)\}} < \exp\{-k^{\delta}(r)\},$$

де $\delta \in (0, \delta_2)$. Теорему доведено.

---

1. *Скаскив О.Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции// Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1989. - Т.53. - N4. - С.833-850.
2. *Wiman A.* Uber der Zuzammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grossten betrage beigegebenen Argumente der Funktion// Acta. Math. - 1916. - Vol.41. - P.1-28.
3. *Murai T.* The boundary behaviour of Hadamard lacunary serias// Nagoja Math. J. - 1983. - Vol.89. - P.65-76.
4. *Gnuschke D., Pomerenke Ch.* On the growth of functions with Hadamard gaps// J. London Math. Soc.(2) - 1984. - Vol.30. - P.441-450.
5. *Offord A.C* The pits property of entire function// J. London Math. Soc. (2) - 1991. - Vol.44. - P.463-475.
6. *Offord A.C.* The distribution of the values of an entire functiion whose coeficients are independent random variables// Proc. London. Math. Soc. (3). - 1965. - Vol.14. - P.199-238.
7. *Gnuschke D., Pomerenke Ch.* On the radial limits of functions with Hadamard gaps// Michigan. Math. J. - 1985. - Vol.32. - P.21-31.
8. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. - М., 1956.

Pivkach M.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF FUNCTIONS ANALITIC IN THE UNIT DISK OUTSIDE SMALL DISKS

This paper contains following result. Let an analytic in the unit disk function of the form $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{\lambda_n}$ satisfies conditions $\nu_f(r) > \frac{r}{1-r}$ $(r_0 \leqslant r < 1)$ and $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \dfrac{\ln \lambda_n}{\ln n} = \alpha > 2$. Then for any $\beta \in (\alpha; 1)$ and $\delta \in (0; \beta - \frac{1}{\alpha-1})$ exists $r_0 = r_0(\beta, \delta)$ such that for every $r > r_0$ and for all $z \in \partial K(a, p(a)) \setminus E(r)$ the inequality

$$|f(z)| > \exp(-(k(r))^{\beta})\mu_f(r)$$

is valid, where $E(r)$ is the union of finite number of arcs of the circle $\partial K(0, r)$, the sum of which lengths is not greater then $\exp\{-(k(r))^{\delta}\}$, $k(r) = \inf\{\max\{\nu_f(r + \vartheta), \frac{r}{\vartheta}\} : 0 < \vartheta < 1 - r\}$, $\mu_f(r)$ and $n_f(r)$ are respectively maximal term and central index.

Стаття надійшла до редколегії 23.12.98

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 159–170 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 159–170*

УДК 517.95

Наталія Процах

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ З ВИРОДЖЕННЯМ

Мішані задачі для еволюційних рівнянь та систем, що вироджуються на площині задання початкових даних сьогодні є досить повно вивчені. Зокрема, для параболічних рівнянь та систем задача Коші та мішані задачі були предметом дослідження в працях [1–4]. Гіперболічні рівняння та системи з виродженням розглянуто в працях [5–10]. У цій статті досліджено існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для однієї еволюційної системи з виродженням в нециліндричній області. Зауважимо, що частинним випадком таких систем є певні системи параболічного типу. Єдиність розв'язку для зазначеної системи доведено у працях [11,12].

1. Мішана задача для еволюційної системи з виродженням в області, що розширюється з часом. Нехай Q – обмежена область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Omega_\tau = Q\bigcap\{t=\tau\}$ така, що mes $\Omega_\tau > 0$; $\Omega_{\tau_1} \subset \Omega_{\tau_2}$ якщо $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Позначимо $S = \bigcup\limits_{\tau\in(0,T)} \partial\Omega_\tau$, ν_t – кут між поверхнею S і віссю t. Припустимо, що $S \in C^1$, $\nu_t \neq 0$.

Розглянемо в області Q систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t) \tag{1.1}$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u\Big|_S = 0, \quad |\alpha| \leqslant l-1, \qquad D^\alpha u_t\Big|_S = 0, \quad |\alpha| = l-1, \tag{1.2}$$

де $l \geqslant m$; $m \geqslant 1$; $0 \leqslant p \leqslant m$; $\Phi(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t)$, $|\alpha|=|\beta|\leqslant m$, $B_{\alpha\beta}(x,t)$, $|\alpha|=|\beta|\leqslant l$, $G_\alpha(x,t)$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant m$, $C_\alpha(x,t)$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant l$ – квадратні матриці порядку N; $u = \mathrm{colon}(u_1,...,u_N)$; $F_\alpha = \mathrm{colon}(F_{\alpha_1},...,F_{\alpha_N})$, $|\alpha|\leqslant p$; $x=(x_1,...,x_n)$;

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (1.1) виконуються такі умови.

Умова (Φ_0). $\Phi \in L^\infty(Q)$; $(\Phi(x,t)\xi,\xi) \geqslant \varphi(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^N$, де $\varphi \in C([0,T])$; $\varphi(0)=0$; $\varphi(t)>0$, $t\in(0,T]$; $\varphi' \in C((0,T])$; $\varphi'(t)\geqslant 0$, $t\in(0,T]$, $\Phi(x,t)=\Phi^*(x,t)$, для майже всіх $(x,t)\in Q$.

Умова (Φ_1). $\Phi_t \in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$ $\forall\varepsilon > 0$; $(\Phi_t(x,t)\xi,\xi) \geqslant \varphi_1(t)|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $\forall\xi \in \mathbb{R}^N$, де $\varphi_1 \in C((0,T])$; $\varphi_1(t) \geqslant 0$, $t \in (0,T]$.

Умова (A_0). $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta_t} \in L^\infty(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant a_0 \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad a_0 > 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t)$; $A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q$, $|\beta| = |\alpha| \leqslant m$.

Умова (B_0). $B_{\alpha\beta} \in L^\infty(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant b_0\psi(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad b_0 > 0$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_t)$; $\psi \in C([0,T])$; $\psi(0) \geqslant 0$; $\psi(t) > 0$, $\forall t \in (0,T]$.

Тут $\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega_t)$ – замикання простору функцій $C_0^\infty(\Omega_t)$ за нормою простору $H^k(\Omega_t)$.

Введемо простір функцій $H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q)$ як замикання множини нескінченно диференційовних функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі S за нормою

$$||u||^2 = \int\limits_Q \left(\varphi(t)|u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t|^2\right) dx\,dt.$$

Розглянемо початкові умови

$$\lim_{t\to+0} u(x,t) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \sqrt{\varphi(t)}u_t(x,t) = 0. \tag{1.3}$$

Означення 1.1. Функція $u(x,t)$, яка задовольняє включення $u \in H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}(Q) \bigcap C([0,T]; L^2(\Omega_t))$; $u_t \in C((0,T]; L^2(\Omega_t))$, рівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \Bigg[-(\Phi(x,t)u_t, v_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u, D^\alpha v) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t, D^\alpha v) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u, v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t, v) + \sum_{|\alpha|\leqslant p} (F_\alpha(x,t), D^\alpha v)\Bigg]\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{t_2}} (\Phi(x,t)u_t, v)\,dx - \int\limits_{\Omega_{t_1}} (\Phi(x,t)u_t, v)\,dx = 0,$$

для довільної функції $v \in C_0^\infty(Q)$ і всіх t_1, t_2, $0 < t_1 < t_2 \leqslant T$, та початкові умови (1.3) називається узагальненим розв'язком задачі (1.1)-(1.3).

Тут $Q_{t_1,t_2} = Q \bigcap \{t_1 < t < t_2\}$.

Будемо використовувати оцінку Фрідріхса

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=j} |D^\alpha v|^2\,dx \leqslant \gamma_{k,j}(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha v|^2\,dx, \quad j = 0, ..., k,$$

яка справджується для функцій $v \in \overset{\circ}{H}{}^k(\Omega_t)$.

Позначимо:

$$\alpha_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)}; \quad \beta_0 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \frac{\Gamma_l(t)c_0(t)}{2b_0}; \quad \Gamma_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{k,j}(t);$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{якщо } \alpha_0 = 0 \\ \varphi_1(t), & \text{якщо } \alpha_0 > 0 \end{cases}; \quad \nu_1 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \left[\beta_0 \omega(t) - \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)}\right];$$

$$c_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta| \leqslant l} \frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)\omega(\tau)\psi(\tau)}; \quad g_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta| \leqslant m} \frac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\varphi'(\tau)};$$

$$c_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta| \leqslant l} \frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\psi(\tau)}; \quad g_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta| \leqslant m} \frac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)},$$

$$\varkappa_1 = \begin{cases} \nu_1 + \delta_0, & \text{якщо } \nu_1 \geqslant 0 \\ 0, & \text{якщо } \nu_1 < 0 \end{cases}, \qquad \delta_0 > 0.$$

Теорема 1. *Нехай коефіцієнти системи (1.1) задовольняють умови* $(\Phi_0), (\Phi_1)$, (A_0), (B_0), G_α $(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m)$, $C_\alpha (1 \leqslant |\alpha| \leqslant l) \in L^\infty(Q_{\varepsilon,\tau})$, $\forall \varepsilon > 0$; *виконується одна з умов;*

1. $\alpha_0 > 0$, c_0, $g_0 \in L^\infty(0,T)$; $\nu_1 < +\infty$,
$$\int_Q \frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}\, dxdt < \infty, \tag{1.4}$$

2. $\alpha_0 = 0 : c_{01}$, $g_{01} \in L^\infty(0,T)$; $\nu_1 < +\infty$,
$$\inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \sqrt{\Gamma_l(t) c_0(t) \gamma_{l,0}(t)} < b_0, \qquad \int_Q \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}\, dxdt < \infty.$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1.1)–(1.3).

Доведення. I. Нехай Q – циліндрична область в $\mathbb{R}^{n+1}$. У просторі $(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_\tau) \bigcap H^{2l}(\Omega_\tau))^N$ виберемо послідовність функцій $\{\varphi^k(x)\}$ таких, що для всіх $j \in \mathbb{N}$ елементи $\varphi^1, ..., \varphi^j$ лінійно незалежні і лінійна оболонка цієї послідовності є всюди щільна в $(\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega_\tau) \bigcap H^{2l}(\Omega_\tau))^N$. Розглянемо функції

$$u^j(x,t) = \sum_{k=1}^{j} c_k^j(t) \varphi^k(x), \qquad j = 1, 2, ...,$$

де $c_1^j(t), ..., c_j^j(t)$ є розв'язками задачі Коші

$$\int_{\Omega_\tau} \Big[((\Phi(x,\tau)u_t)_t, \varphi^k) + \sum_{|\alpha|=|\beta| \leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,\tau) D^\beta u, D^\alpha \varphi^k) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta| \leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,\tau) D^\beta u_t, D^\alpha \varphi^k) + \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (G_\alpha(x,\tau) D^\alpha u, \varphi^k) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant l} (C_\alpha(x,\tau) D^\alpha u_t, \varphi^k) \Big]\, dx = \int_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha| \leqslant p} (F_\alpha(x,\tau), D^\alpha \varphi^k)\, dx, \tag{1.5}$$

$c_k^j(\varepsilon) = 0$, $c_{kt}^j(\varepsilon) = 0$, $k = 1, ..., j$, $\varepsilon > 0$. Домножимо обидві частини цієї системи рівнянь відповідно на функцію $c_{kt}(t)e^{-\nu t}$, $\nu > 0$, підсумуємо за k від 1 до j і зінтегруємо по проміжку $[\varepsilon, \tau]$:

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \Bigg[((\Phi(x,t)u_t^j)_t, u_t^j) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j, D^\alpha u_t^j) + \tag{1.6}$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^j, D^\alpha u_t^j) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u^j, u_t^j) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j, u_t^j)\Bigg] e^{-\nu t} dx dt = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} (F_\alpha(x,t), D^\alpha u_t^j)\, e^{-\nu t} dx dt.$$

Оцінимо кожний доданок цієї рівності:

$$\tau_1 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} ((\Phi(x,t)u_t^j)_t, u_t^j)e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \varphi(\tau)|u_t^j|^2 e^{-\nu\tau}\, dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi_1(t)|u_t^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt + \frac{\nu}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi(t)|u_t^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt.$$

$$\tau_2 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \Big(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^j, D^\alpha u_t^j\Big) e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(\nu a_0 - a_1) \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt + \frac{a_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 e^{-\nu\tau}\, dx.$$

$$\tau_3 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^j, D^\alpha u_t^j)e^{-\nu t}\, dx\, dt \geqslant b_0 \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2 e^{-\nu t}\, dx\, dt.$$

$$\tau_4 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u^j, u_t^j)e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left[\frac{\Gamma_m(t)g_0(t)}{\delta_1} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + \delta_1\varphi'(t)\omega(t)|u_t^j|^2\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt, \quad \delta_1 > 0.$$

$$\tau_5 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j, u_t^j)\, e^{-\nu t} dx dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \Bigg[\frac{\psi(t)}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2 +$$
$$+ \delta_2\varphi'(t)\omega(t)|u_t^j|^2\Bigg] e^{-\nu t}\, dx\, dt.$$

$$\tau_6 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} (F_\alpha(x,t), D^\alpha u_t^j)\, e^{-\nu t} dx dt \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \Bigg(\sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{1}{\delta_3}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} +$$
$$+ \delta_3\psi(t)\Gamma_p(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2\Bigg) e^{-\nu t}\, dx\, dt.$$

Тут використано те, що $l \geqslant m,\ m \geqslant 1,\ 0 \leqslant p \leqslant m$. З цих оцінок одержимо:

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \varphi(\tau)|u_t^j|^2 e^{-\nu\tau}\,dx + a_0 \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 e^{-\nu\tau}\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \Bigg[\bigg(-a_0\nu + a_1 +$$

$$+ \frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_0(t)\bigg) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + \bigg(-2b_0 + \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t) + \delta_3\Gamma_p(t)\bigg) \times$$

$$\times\, \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2 + \bigg((\delta_1+\delta_2)\omega(t) - \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\nu\varphi_1(t)}{\varphi'(t)}\bigg)\varphi'(t)|u_t^j|^2\Bigg] e^{-\nu t}\,dx\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\delta_3} \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\,dx\,dt. \tag{1.7}$$

Виберемо $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ з умов:

$$-\,a_0\nu + a_1 + \frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_0(t) \leqslant -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0;$$

$$-\,2b_0 + \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t) + \delta_3\Gamma_p(t) < 0;$$

$$(\delta_1+\delta_2)\omega(t) - \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} - \frac{\nu\varphi_1(t)}{\varphi'(t)} < \nu_1 + \delta_0. \tag{1.8}$$

Згідно з умовами теореми існують такі числа $\delta_1 > 0,\ \delta_2 > 0,\ \delta_3 > 0,\ \delta_0 > 0,$ $\tau_0 > 0$, що на $[0,\tau_0]$ виконуються нерівності (1.8).

Позначимо $\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi'(t)|u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt = y(\tau)$. Тоді $\int\limits_{\Omega_\tau} \varphi(\tau)|u_t^j|^2 e^{-\nu\tau}\,dx = \dfrac{\varphi(\tau)y'(\tau)}{\varphi'(\tau)}$.

Розв'язавши нерівність (1.7), одержимо:

$$\|u^j\|^2_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}} = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \bigg(\varphi(t)|u_t^j|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + \psi(t)\sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2\bigg) e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant M_3[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1} \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \frac{1}{[\varphi(t)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\,dx\,dt. \tag{1.9}$$

Стала M_3 не залежить від ε і j.

Нехай $\alpha_0 = 0$. Тоді

$$\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} |u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \gamma_{l,0}(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt. \tag{1.10}$$

Оцінимо кожний доданок рівності (1.6):

$$\tau_1 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} ((\Phi(x,t)u_t^j)_t, u_t^j) e^{-\nu t}\,dx\,dt \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} \varphi(\tau)|u_t^j|^2 e^{-\nu\tau}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi_1(t)|u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt + \frac{\nu}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \varphi(t)|u_t^j|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

$$\tau_4 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u^j, u_t^j)e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\frac{\Gamma_m(t)g_{01}(t)}{\delta_1}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 + \delta_1\omega(t)|u_t^j|^2\right]e^{-\nu t}\,dx\,dt, \qquad \delta_1 > 0.$$
$$\tau_5 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j, u_t^j)\,e^{-\nu t}dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\left[\frac{\psi(t)}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_{01}(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2 + \delta_2\omega(t)|u_t^j|^2\right]e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

Оцінки τ_2, τ_3, τ_6 такі ж як для випадку $\alpha_0 \geqslant 0$. З цих оцінок одержимо нерівність:

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\varphi(\tau)|u_t^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx + a_0\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Bigg[\Bigg(-a_0\nu + a_1 +$$
$$+\frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_{01}(t)\Bigg)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 + \Bigg(-2b_0 + \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_{01}(t) + \delta_3\Gamma_p(t)\Bigg)\times$$
$$\times\,\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2 + \Bigg((\delta_1+\delta_2)\frac{\omega(t)}{\psi(t)} - \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)} - \frac{\nu\varphi_1(t)}{\psi(t)}\Bigg)\psi(t)|u_t^j|^2\Bigg]e^{-\nu t}\,dx\,dt +$$
$$+\frac{1}{\delta_3}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt.$$

Використавши (1.10), матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\varphi(\tau)|u_t^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx + a_0\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2e^{-\nu\tau}\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\Bigg[\Bigg(-a_0\nu + a_1 +$$
$$+\frac{1}{\delta_1}\Gamma_m(t)g_{01}(t)\Bigg)\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u^j|^2 + \Bigg(-2b_0 + \frac{1}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_{01}(t) + \delta_3\Gamma_p(t) +$$
$$+\gamma_{l,0}(t)\Bigg((\delta_1+\delta_2)\frac{\omega(t)}{\psi(t)} - \frac{\varphi_1(t)}{\psi(t)} - \frac{\nu\varphi_1(t)}{\psi(t)}\Bigg)\Bigg)\psi(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2\Bigg]e^{-\nu t}\,dx\,dt +$$
$$+\frac{1}{\delta_3}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}}\sum_{|\alpha|\leqslant p}\frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)}e^{-\nu t}\,dx\,dt. \tag{1.11}$$

Аналогічно як і у випадку $\alpha_0 \geqslant 0$, за умови, що

$$\sup_{[0,\tau_0]}\sqrt{\Gamma_l(t)c_{01}(t)\gamma_{l,0}(t)} < b_0. \tag{1.12}$$

з нерівності (1.11) можна одержати оцінку

$$\|u^j\|^2_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}} = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left(\varphi(\tau)|u^j_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + \psi(t) \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u^j_t|^2\right) e^{-\nu t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_4 \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\, dx\, dt. \tag{1.13}$$

Отже, одержано оцінку $\|u^j\|_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}}$ сталою, яка не залежить від ε і j. Таку оцінку можна отримати в Q . Продовжимо функції u^j нулем в область Q і виберемо $\varepsilon = \frac{1}{j}$. Тоді оцінки (1.9), (1.13) будуть виконуватися в Q.

Оскільки виконуються (1.9, 1.13), то з послідовності $\{u^j\}$ можна вибрати підпослідовність $\{u^s\}$ таку, що $\{u^s\} \to u\ *-$ слабко в $L^\infty((0,T); \overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))$; $\sqrt{\varphi(t)}u^s_t \to \sqrt{\varphi(t)}u_t$ $*-$слабко в $L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$, коли $s \to \infty$.

Можна показати, що послідовність $\{u^j\}$ буде збігатися до узагальненого розв'язку задачі (1.1) – (1.3) [13].

II. Нехай Q – нециліндрична область, описана при формулюванні задачі. Застосуємо метод штрафу [14] для знаходження розв'язку задачі (1.1)-(1.3) в Q.

Виберемо O – обмежену область в $\mathbb{R}^n$ таку, що $Q \subset O \times (0,T)$. Позначимо $O_\tau = (O \times (0,T)) \bigcap \{t = \tau\}$; $M \in L^\infty(O \times (0,T))$, причому

$$M = \begin{cases} 0, & \text{на Q} \\ 1, & \text{в } O \times (0,T) \setminus Q. \end{cases}$$

Продовжимо F_α, Φ, $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, C_α, G_α на $O \times (0,T)$ так, щоб виконувалися умови (Φ_0), (Φ_1), (A_0), (B_0) і збережемо для них ті самі позначення.

У циліндрі $Ц = O \times (0,T)$ розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned}&(\Phi(x,t)u^\varepsilon_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u^\varepsilon) + \\ &+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t) D^\beta u^\varepsilon_t) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t) D^\alpha u^\varepsilon) + \\ &+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t) D^\alpha u^\varepsilon_t + \frac{1}{\varepsilon} M \varphi(t) u^\varepsilon_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t),\end{aligned} \tag{1.14}$$

з крайовими та початковими умовами

$$D^\alpha u^\varepsilon\Big|_{\partial O \times (0,T)} = 0,\ |\alpha| \leqslant l-1, \qquad D^\alpha u^\varepsilon_t\Big|_{\partial O \times (0,T)} = 0,\ |\alpha| = l-1, \tag{1.15}$$

$$\lim_{t\to+0} u^\varepsilon(x,t) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} \sqrt{\varphi(t)}u^\varepsilon_t(x,t) = 0,\ x \in O. \tag{1.16}$$

Тут $\varepsilon > 0$.

Аналогічно, як і у випадку циліндричної області Q, можна одержати оцінки

$$\|u^{j,\varepsilon}\|^2_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}} \leqslant M_3 \int\limits_{Ц_{\varepsilon,\tau}} \frac{1}{[\varphi(\tau)]^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\,dx\,dt, \qquad \text{при } \alpha_0 \geqslant 0,$$

$$\|u^{j,\varepsilon}\|^2_{H^{l,1}_{0,\varphi,\psi}} \leqslant M_3 \int\limits_{Ц_{\varepsilon,\tau}} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \frac{|F_\alpha(x,t)|^2}{\psi(t)} e^{-\nu t}\,dx\,dt, \qquad \text{при } \alpha_0 = 0.$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{Ц_{\varepsilon,\tau}} M\varphi(t)|u^{j,\varepsilon}|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant C_4.$$

Тоді, враховуючи вигляд M, одержимо:

$$\int\limits_{Ц_{\varepsilon,\tau}\setminus Q} M\varphi(\tau)|u^{j,\varepsilon}|^2 e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant C_4\varepsilon. \tag{1.17}$$

З послідовності $\{u^{j,\varepsilon}\}$ можна виділити підпослідовність, яка збігається $*$-слабко в $L^\infty((0,T);\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))$; $\sqrt{\varphi(t)}u_t^{s,\varepsilon} \to \sqrt{\varphi(t)}u_t^\varepsilon$ $*$-слабко в $L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$, коли $s \to \infty$.

Оскільки виконується (1.17), то $\sqrt{\varphi(t)}u_t^\varepsilon(x,t) = 0$ майже всюди в $Ц \setminus Q$, $u_t^\varepsilon(x,t) = 0$ майже всюди в $Ц \setminus Q$.

Оскільки $\lim\limits_{t\to 0} u^\varepsilon(x,t) = 0$ в $Ц_{\varepsilon,\tau}$, то $\lim\limits_{t\to 0} u^\varepsilon(x,t) = 0$ в $Ц_{\varepsilon,\tau}\setminus Q$. З умов $u_t^\varepsilon(x,t) = 0$ майже всюди в $Ц \setminus Q$, $\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2}$, $t_1 \leqslant t_2$, $\lim\limits_{t\to 0} u^\varepsilon(x,t) = 0$ в $Ц \setminus Q$, отримаємо

$$u^\varepsilon(x,t) = 0 \text{ майже всюди в } Ц \setminus Q.$$

Перейшовши до звуження на Q, одержимо:

$$\begin{aligned}&(\Phi(x,t)u_t^\varepsilon)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^\varepsilon) + \\ &+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^\varepsilon) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u^\varepsilon) + \\ &+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^\varepsilon = \sum_{|\alpha|\leqslant p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x,t), \qquad (x,t)\in Q.\end{aligned}$$

Так само, як і у випадку циліндричної області Q, перейшовши до границі при $\varepsilon \to 0$, використавши умову (1.18), можна показати, що u буде розв'язком поставленої задачі. Теорему 1 доведено.

Зауваження. Якщо в доведенні теореми взяти

$$\begin{aligned}\tau_4 &= \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_\alpha(x,t)D^\alpha u^j, u_t^j) e^{-\nu t}\,dx\,dt \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left[\frac{\Gamma_m(t)g_0(t)}{\delta_1} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u^j|^2 + \delta_1 \varphi'(t)|u_t^j|^2 \right] e^{-\nu t}\,dx\,dt, \qquad \delta_1 > 0,\end{aligned}$$

де $$g_0(t) = \sup_{Q_t} \frac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)};$$

$$\tau_5 = \int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t^j, u_t^j)\, e^{-\nu t} dx dt \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{\varepsilon,\tau}} \left[\frac{\psi(t)}{\delta_2}\Gamma_l(t)c_0(t)\sum_{|\alpha|=l}|D^\alpha u_t^j|^2 + \right.$$

$$\left. + \delta_2\varphi'(t)|u_t^j|^2\right] e^{-\nu t}\, dx\, dt, \qquad \delta_2 > 0, \text{ де } c_0(t) = \sup_{Q_t}\frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\varphi'(\tau)},$$

то в нерівності (1.5)

$$\nu_1 = \inf_{[0,T]}\sup_{[0,\tau]}\left[\beta_0 - \frac{\varphi_1(t)}{\varphi'(t)}\right].$$

і теорема 1 правильна при такому ν_1.

2. Мішана задача для еволюційної системи з виродженням в області, що звужується з часом. Нехай Q – обмежена область простору $\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_t$, $\Omega_\tau = Q\bigcap\{t=\tau\}$, $S = \bigcup\limits_{\tau\in[0,T]}\partial\Omega_\tau$, $\operatorname{mes}\Omega_\tau > 0$, $\tau\in[0,T]$, $Q_\tau = Q\bigcap\{0<t<\tau\}$, $\tau<T$; $\forall t_1,\ t_2\in[0,T]$, $\Omega_{\tau_2}\subset\Omega_{\tau_1}$, $\tau_1<\tau_2$; ν_t – кут між поверхнею S і віссю t. Припустимо, що $S\in C^1$, $\nu_t\neq 0$.

Розглянемо в області Q систему рівнянь

$$(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha F_\alpha(x,t) \tag{2.1}$$

з крайовими умовами

$$D^\alpha u\Big|_S = 0, \qquad |\alpha|\leqslant m-1, \tag{2.2}$$

де $1\leqslant l\leqslant m$; $p\leqslant m$; $\Phi(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t)$, $|\alpha|=|\beta|\leqslant m$, $B_{\alpha\beta}(x,t)$, $|\alpha|=|\beta|\leqslant l$, $G_\alpha(x,t)$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant m$, $C_\alpha(x,t)$, $1\leqslant|\alpha|\leqslant m$ – квадратні матриці порядку N; $u=\operatorname{colon}(u_1,..,u_N)$; $F_\alpha=\operatorname{colon}(F_{\alpha 1},...,F_{\alpha N})$, $|\alpha|\leqslant p$; $x=(x_1,..,x_n)$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}, \qquad |\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n.$$

Припустимо, що для коефіцієнтів системи (2.1) виконуються такі умови:

Умова (Φ_0). $\Phi\in L^\infty(Q)$; $(\Phi(x,t)\xi,\xi)\geqslant\varphi_0 t^\lambda|\xi|^2$, $\varphi_0>0$, $\lambda>0$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^N$, $\Phi(x,t)=\Phi^*(x,t)$, для майже всіх $(x,t)\in Q$.

Умова (Φ_1). $\Phi_t\in L^\infty(Q_{\varepsilon,T})$, $\forall\varepsilon>0$; $(\Phi_t(x,t)\xi,\xi)\geqslant\varphi_1 t^{\lambda-1}|\xi|^2$ для майже всіх $(x,t)\in Q$, $\forall\xi\in\mathbb{R}^N$.

Умова (A_0). $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta_t}\in L^\infty(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta v, D^\alpha v)\,dx \geqslant a_0\int\limits_{\Omega_t}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha v|^2\,dx, \qquad a_0>0,$$

для майже всіх $t\in(0,T)$, $\forall v\in(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega_t))^N$; $A_{\alpha\beta}(x,t)=A_{\beta\alpha}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A^*_{\beta\alpha}(x,t)$, для майже всіх $(x,t)\in Q$, $|\beta|=|\alpha|\leqslant m$.

Умова (B_0). $B_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(Q)$;

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}v, D^{\alpha}v)\,dx \geqslant \psi(t) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}v|^2\,dx,$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, $\forall v \in (\overset{\circ}{H}{}^{l}(\Omega_t))^N; \psi \in C([0,T])$; $\psi(0) \geqslant 0$; $\psi(t) > 0$, $\forall t \in (0,T]$.

Введемо простір вектор-функцій $(H^{l,1}_{0,\lambda,\psi}(Q))^N$ як замикання множини нескінченно диференційовних вектор-функцій в $\overline{Q}$, які дорівнюють нулю в околі S за нормою

$$\|u\|_{m,l,1} = \left(\int\limits_{Q} \left(t^{\lambda}|u_t|^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^{\alpha}u|^2 + \psi(t)\sum_{|\alpha|=l} |D^{\alpha}u_t|^2\right) dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Розглянемо початкові умови

$$u(x,0) = 0, \qquad \lim_{t\to 0} t^{\frac{\lambda}{2}} u_t(x,t) = 0. \tag{2.3}$$

Означення 2.1. Функцію $u(x,t)$ з простору $(H^{m,l,1}_{0,\lambda,\psi}(Q))^N$ назвемо узагальненим розв'язком задачі (2.1)-(2.3), якщо вона задовольняє початкову умову $u(x,0) = 0$ і рівність

$$\int\limits_{Q} \Bigg[-(\Phi(x,t)u_t, v_t) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} (A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u, D^{\alpha}v) +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} (B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u_t, D^{\alpha}v) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m} (G_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u, v) +$$
$$+ \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l} (C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u_t, v) - \sum_{|\alpha|\leqslant p} (F_{\alpha}(x,t), D^{\alpha}v)\Bigg]\,dxdt = 0,$$

для довільної функції $v \in (C_0^{\infty}(Q))^N$ такої, що $v(x,T) = 0$.

Позначимо:

$$\alpha_0 = \inf_{[0,T]}\sup_{[0,\tau]} \frac{t^{\lambda}}{\psi(t)}; \quad \beta_0 = \inf_{[0,T]}\sup_{[0,\tau]} \frac{\Gamma_l(t)c_0(t)}{2b_0}; \quad \Gamma_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{k,j}(t);$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{якщо } \alpha_0 = 0 \\ t^{\lambda}, & \text{якщо } \alpha_0 > 0 \end{cases}; \quad \nu_1 = \inf_{[0,T]}\sup_{[0,\tau]}[\beta_0\omega(t) - \varphi_1];$$

$$c_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \frac{\|C_{\alpha}(x,\tau)\|^2}{\tau^{\lambda-1}\omega(\tau)\psi(\tau)}; \quad g_0(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \frac{\|G_{\alpha}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\tau^{\lambda-1}};$$

$$c_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l} \frac{\|C_{\alpha}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)\psi(\tau)}; \quad g_{01}(t) = \sup_{Q_t} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m} \frac{\|G_{\alpha}(x,\tau)\|^2}{\omega(\tau)};$$

$$\varkappa_1 = \begin{cases} \dfrac{\nu_1 + \delta_0}{\varphi_0}, & \text{якщо } \nu_1 \geqslant 0 \\ 0, & \text{якщо } \nu_1 < 0 \end{cases}, \qquad \delta_0 > 0.$$

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти системи (2.1) задовольняють умови* (Φ_0), (Φ_1), (A_0), (B_0), G_α $(1 \leqslant |\alpha| \leqslant m)$, C_α $(1 \leqslant |\alpha| \leqslant l) \in L^\infty(Q_{\varepsilon,\tau})$, $\forall \varepsilon > 0$; *виконується одна з умов:*

1. $\alpha_0 > 0$, c_0, $g_0 \in L^\infty(0,T)$; $\nu_1 < +\infty$,

$$\int\limits_Q \frac{1}{t^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} |F_{\alpha t}(x,t)|^2 \, dxdt + \int\limits_Q \frac{1}{t^{\varkappa_1}} \sum_{|\alpha| \leqslant p} |F_\alpha(x,t)|^2 \, dxdt < \infty. \tag{2.4}$$

2. $\alpha_0 = 0 : c_{01}$, $g_{01} \in L^\infty(0,T)$; $\nu_1 < +\infty$;

$$\inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \sqrt{\Gamma_l(t) c_0(t) \gamma_{l,0}(t)} < b_0;$$

$$\int\limits_Q \sum_{|\alpha| \leqslant p} |F_{\alpha t}(x,t)|^2 \, dxdt + \int\limits_Q \sum_{|\alpha| \leqslant p} |F_\alpha(x,t)|^2 \, dxdt < \infty.$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (2.1)-(2.3).

Зауваження. Якщо

$$g_0(t) = \sup_{Q_t} \frac{\|G_\alpha(x,\tau)\|^2}{\tau^{\lambda-1}}; \quad c_0(t) = \sup_{Q_t} \frac{\|C_\alpha(x,\tau)\|^2}{\tau^{\lambda-1}}; \quad \nu_1 = \inf_{[0,T]} \sup_{[0,\tau]} \Big[\beta_0 - \varphi_1\Big],$$

то теорема 2 правильна при такому ν_1.

1. *Калашников А.С.* Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка // Вестн. Москов. ун-та. Сер. мат., мех. – 1971. – N 2,3. – С.42-48, 3-9.

2. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1994. – N 6. – С.7-11.

3. *Возняк О.Г.* Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Матеріали міжнар. конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці, 1995. – С.42-60.

4. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.Н.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова// Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т.27. – N 3. – С.479-487.

5. *Барановский Ф.Т.* Задача Коши с видоизмененными начальными данными для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу// Мат. сб. – 1983. – Т.120. – N 2. – С.147-163.

6. *Бубнов Б.А.* Смешаная задача для одного класса некласических уравнений// Докл. АН СССР. – 1984. – Т.275. – N 3. – С.525-528.

7. *Бубнов Б.А., Врагов В.Н.* К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений// Докл. АН СССР. – 1982. – Т.264. – N 4. – С.795-800.

8. *Лавренюк С.П.* Смешанная задача для вырождающегося уравнения типа колебания пластины//Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т.25. – N 8. – С.1375-1383.

9. *Лавренюк С.П.* Змішана задача для однієї слабко виродженої системи //Доп. АН України. Мат., природозн., техн. науки. – 1993. – N 5. – С. 18-20.
10. *Лавренюк С.П.* Смешанная задача для сильно вырождающейся эволюционной системы //Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т.30. – N 8. – С.1405-1411.
11. *Лавренюк С.П.* Про єдиність розв'язку деяких еволюційних систем з виродженням// Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.51, – С. 20-25.
12. *Lavrenyuk S.P.* On the uniqueness of a solution of mixed problem for one degenerated evolutional system// Мат. студії. – 1998. – Т.9. – N 1. – С.21-28.
13. *13. Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. – М., 1973.
14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.

Protsakh N.

EXISTENCE OF A SOLUTION OF ONE DEGENERATED EVOLUTIONAL SYSTEM

In this paper is considered one linear evolutionary system with second time derivative degenerative into an elliptic system on the initial plane. The system contains, in particular, some classes of parabolic systems. There are obtained sufficient conditions of the existance of a weak solution of the mixed problem for the evolutional system

$$\begin{aligned}(\Phi(x,t)u_t)_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u) + \\ + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leqslant l}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t) + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant m}(G_\alpha(x,t)D^\alpha u) + \\ + \sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant l}C_\alpha(x,t)D^\alpha u_t = \sum_{|\alpha|\leqslant p}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha F_\alpha(x,t)\end{aligned}$$

with the boundary and initial conditions $D^\alpha u\Big|_S = 0, \qquad |\alpha| \leqslant l-1,$

$D^\alpha u_t\Big|_S = 0,\ |\alpha| = l-1,\ \lim\limits_{t\to+0} u(x,t) = 0,\ \lim\limits_{t\to 0}\sqrt{\varphi(t)}u_t(x,t) = 0$ in bounded noncylindrical domain which extends in time and in bounded noncylindrical domain which gets narrow in time.

Стаття надійшла до редколегії 24.02.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 171–174

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 171–174

УДК 517.576

Тетяна Сало, Олег Скасків

ОЦІНКИ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ В ТЕОРЕМАХ ТИПУ БОРЕЛЯ

Нехай L – клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцій. Для $\Phi \in L$ визначимо клас

$$H(\Lambda, \Phi) = \{F \in H(\Lambda) : (\exists K_F > 0)(\ln \mu(\sigma, F) \geqslant K_F \sigma \Phi(\sigma), \sigma \geqslant \sigma_0)\}.$$

У [1] одержано такий аналог теореми Бореля.

Теорема А[1]. *Для того щоб для кожної функції $F \in H(\Lambda)$ співвідношення*

$$\ln M(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, F) \tag{1}$$

справджувалось при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної міри, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\lambda_n} < +\infty. \tag{2}$$

У праці [2] в підкласі $H(\Lambda)$, який визначається умовою $\ln \mu(\sigma, F) = O(\sigma\Phi(\sigma))$ $(\sigma \to +\infty)$, умова (2) уточнюється, про виняткову множину у співвідношенні (2) можна лише стверджувати, що вона має нульову щільність. Однак твердження теореми А допускає уточнення і в частині опису виняткової множини.

Зазначимо, що доведення сформульованої нижче теореми в частині одержання асимптотичної рівності (1) в цілому повторює доведення відповідних теорем з [1, 2], а в частині оцінки величини міри виняткової множини – у певному сенсі повторює міркування, застосовані в [3] для доведення леми 1, правильної для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Нехай $h \in L$. Для множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри її h-щільністю у нескінченності називаємо величину $D_h(E) = \varlimsup_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \operatorname{meas}(E \cap [\sigma, +\infty))$. Визначимо також $L_1 = \{h \in L : h(x + \frac{1}{h(x)}) = O(h(x))\ (x \to +\infty)\}$. Правильна теорема.

Теорема. *Нехай $h \in L_1$, $\Phi \in L$. Якщо для функції $F \in H(\Lambda, \Phi)$ виконується умова*

$$(\forall b > 0) : \lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \sum_{\lambda_n > b\Phi(\sigma)} \frac{1}{n\lambda_n} = 0, \tag{3}$$

то співвідношення (1) справджується при $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E, D_h(E) = 0)$.

Доведення. Нехай $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n). Оскільки $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln n$ $(n \to +\infty)$, то умову (3) можна записати у вигляді

$$\lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma) \int_{b\Phi(\sigma)}^{+\infty} \frac{d \ln n(t)}{t} = 0,$$

Звідси випливає існування неперервної функції $C(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ такої, що для $b > 0$

$$\lim_{n \to +\infty} h(\varphi(b\lambda_n)) \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{C(t) d \ln n(2t)}{t} = 0, \tag{4}$$

де $\varphi(x)$ — функція, обернена до $\Phi(t)$.

Нехай $\alpha(t) = \int_0^t C(x) \frac{d \ln n(2x)}{x}$, $\tau_n = \alpha(\lambda_n)$, $\alpha_n = \exp\{-\int_0^{\lambda_n} \alpha(t) dt\}$. Розглянемо ряд Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{z\alpha_n}. \tag{5}$$

Зауважимо, що $\frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{\sigma\lambda_n} \leqslant |a_n| e^{(\sigma + \alpha(\lambda_n))\lambda_n} \leqslant |a_n| e^{(\sigma + A)\lambda_n}$, де $A = \int_0^{+\infty} C(t) \frac{d \ln n(2t)}{t}$. Тому $f \in H(\Lambda)$.

За умовою $F \in H(\Lambda, \Phi)$ при $\sigma \geqslant \sigma_0$ маємо $K\sigma\Phi(\sigma) \leqslant \ln \mu(\sigma, F) = \ln \mu(0, F) + \int_0^\sigma \lambda_{\nu(t,f)} dt \leqslant 2\sigma \lambda_{\nu(\sigma - 0, F)}$, де $\nu(t, f)$ – центральний індекс ряду (5). Тому

$$K\Phi(\sigma) \leqslant 2\lambda_{\nu(\sigma-0,F)} \ (\sigma \geqslant \sigma_0). \tag{6}$$

Нехай $(\varkappa_j)$ – послідовність точок стрибка $\nu(\sigma, f)$, тобто $\nu(\sigma, f) = j$ при $\sigma \in [\varkappa_j, \varkappa_{j+1})$ і, якщо $\nu(\varkappa_{j+1}, f) = j + p$, то $\varkappa_{j+1} = \cdots = \varkappa_{j+p} < \varkappa_{j+p+1}$.

Якщо $(\sigma - \tau_j) \in [\varkappa_j, \varkappa_{j+1})$, то за означенням максимального члена $\mu(\sigma, f)$ для всіх $n \geqslant 0$

$$\frac{|a_n|}{\alpha_n} e^{(\sigma - \tau_j)\lambda_n} \leqslant \frac{|a_j|}{\alpha_j} e^{(\sigma - \tau_j)\lambda_j}.$$

Звідси при $\sigma \in [\varkappa_j + \tau_j, \varkappa_{j+1} + \tau_j)$ та $n \neq j$

$$\frac{|a_n| e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j| e^{\sigma\lambda_j}} \leqslant \frac{\alpha_n}{\alpha_j} e^{\tau_j(\lambda_n - \lambda_j)} = \exp\left\{-\int_{\lambda_j}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_j)) dt\right\} < 1. \tag{7}$$

Тому для центрального індексу $\nu(\sigma, F) = j$ при $\sigma \in [\varkappa_j + \tau_j, \varkappa_{j+1} + \tau_j)$. Отже, з (7) одержуємо при $n \geqslant 0$ і $\sigma \notin \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} [\varkappa_j + \tau_{j-1}, \varkappa_j + \tau_j] \stackrel{def}{=} E$

$$\frac{|a_n| e^{\sigma\lambda_n}}{\mu(\sigma, F)} \leqslant \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_\nu)) dt\right\} = \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} (\lambda_n - t) d\alpha(t)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} C(t) d \ln n(2t)\right\} \tag{8}$$

де $\nu = \nu(\sigma, F)$.

Оскільки, не зменшуючи загальності, можна вважати $a_0 = 1$, то з (8) при $n = 0$ для $\sigma \notin E$ маємо $\ln\mu(\sigma, F) \geqslant \int_0^{\lambda_\nu} C(t)d\ln n(2t)$, тому

$$\ln n(2\lambda_\nu) = o\left(\ln\mu(\sigma, F)\right) \tag{9}$$

при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$). Нехай $m = \min\{n : \lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu\}$. Тоді при $\sigma \notin E$ з (8) одержуємо

$$\begin{aligned}
\sum(\sigma) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{\mu(\sigma, F)} \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} C(t) d\ln n(2t)\right\} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\left\{-\int_{\lambda_\nu}^{\frac{\lambda_n}{2}} C(\lambda_\nu) \frac{\lambda_n - t}{t} d\ln n(2t)\right\} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\left\{-C(\lambda_\nu)\left(\ln n(\lambda_n) - \ln n(2\lambda_\nu)\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Зауважимо, що при $\nu \to +\infty$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\left\{-C(\lambda_\nu)\ln n(\lambda_n)\right\} = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{C(\lambda_\nu)}} \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{C(\lambda_\nu)}} = \\
&= \int_m^{+\infty} \frac{dt}{t^{C(\lambda_\nu)}} = \frac{1}{C(\lambda_\nu) - 1} \frac{1}{m^{C(\lambda_\nu)-1}} = o\left(\frac{1}{(n(2\lambda_\nu) - 1)^{C(\lambda_\nu)-1}}\right)
\end{aligned}$$

Звідси і з (10) при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$) маємо $\sum(\sigma) = o(n(2\lambda_\nu))$, тому, застосовуючи (9), при $\sigma \to +\infty$ ($\sigma \notin E$) послідовно отримуємо

$$M(\sigma, F) \leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant 2\lambda_\nu} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} + \mu(\sigma, F)\sum(\sigma) \leqslant (1 + o(1)) n(2\lambda_\nu)\mu(\sigma, F)$$

та

$$\frac{\ln M(\sigma, F)}{\ln\mu(\sigma, F)} \leqslant 1 + \frac{\ln((1 + o(1))n(2\lambda_\nu))}{\ln\mu(\sigma, F)} = 1 + o(1).$$

Залишилось показати, що $D_h(E) = 0$.

Оскільки при $\varkappa_j < \varkappa_{j+1} = \cdots = \varkappa_{j+p} < \varkappa_{j+p+1}$ ($p \geqslant 1$) і $\sigma \in [\varkappa_j + \tau_j, \varkappa_{j+1} + \tau_j)$ маємо $\nu(\sigma, F) = j$, то для міри множини $E \cap [\sigma, +\infty)$ одержимо

$$\begin{aligned}
\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) &= \sum_{k=j}^{+\infty}((\varkappa_{k+1} + \tau_{k+1}) - (\varkappa_{k+1} + \tau_k)) = \\
&= \sum_{k=j}^{+\infty}(\tau_{k+1} - \tau_k) = \int_{\lambda_\nu}^{+\infty} C(t)\frac{d\ln n(2t)}{t}.
\end{aligned}$$

Якщо ж $\sigma \in [\varkappa_{j+1} + \tau_j, \varkappa_{j+1} + \tau_{j+p})$, то $\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) \leqslant \mathrm{meas}(E \cap [\varkappa_{j+1} + \tau_j, +\infty) = \int_{\lambda_j}^{+\infty} C(t)\frac{d\ln n(2t)}{t}$. Отже, при $\sigma \in [\varkappa_j + \tau_j; \varkappa_{j+1} + \tau_{j+p})$, оскільки $\nu(\varkappa_{j+1} +$

$\tau_j - 0, F) = j$ за нерівністю (6)

$$h(\sigma)\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) \leqslant h(\varkappa_{j+1} + \tau_j + (\tau_{j+p} - \tau_j)) \int_{\lambda_j}^{+\infty} C(t)\frac{d\ln n(2t)}{t} \leqslant$$

$$\leqslant h\left(\varphi\left(\frac{2}{K}\lambda_j\right) + \int_{\lambda_j}^{+\infty} \frac{C(t)d\ln n(2t)}{t}\right) \int_{\lambda_j}^{+\infty} \frac{d\ln n(2t)}{t},$$

де $\varphi(t)$ – функція обернена до $\Phi(\sigma)$. Залишилось застосувати послідовно (4) з $b = \frac{2}{K}$ і умову $h \in L_1$.

Теорему доведено.

---

1. *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию//Мат. заметки. – 1985. – Т.37. – N1. – С.41-47.
2. *Шеремета М.Н.* Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена ряда Дирихле//Мат. заметки. – 1987. – Т.42. – N2. – С.215-226.
3. *Скаскив О.Б.* К теореме Вимана о минимуме модуля аналитической в единичном круге функции// Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1989. – Т.53. – N4. – С.833–850.

Salo T., Skaskiv O.

ESTIMATES OF MEASURE OF EXPONENTIAL SET IN THE THEOREMS OF BOREL TYPE

This paper contains an investigation of conditions which an entire function $F(z)$ represented by a Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, satisfies the relation

$$\ln\sup\{|F(\sigma + i\tau)| : \tau \in \mathbb{R}\} = (1 + o(1)) \ln\max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$$

as $\sigma \to +\infty$ outside some set E with $DE = \varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty} h(\sigma)\mathrm{meas}(E \cap [\sigma, +\infty)) = 0$, where $h(\sigma)$ is nonnegative continuous increasing to $+\infty$ function on $[0, +\infty)$.

Стаття надійшла до редколегії 28.12.98

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ   VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 175–179   *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 175–179*

УДК 517.5

Олег Скасків, Оксана Трусевич

ПРО ПОВНУ ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЛОГАРИФМІВ СУМИ ТА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ДОДАТНОГО РЯДУ ТИПУ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \nearrow +\infty (1 \leqslant n \uparrow +\infty)$; $\beta = (\beta_n)$, $\beta_n \in \mathbb{R}_+ (n \geqslant 0)$, $\beta_0 = 0$, $h(\sigma)$ – невід'ємна, неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція така, що $h(\sigma) \leqslant \sigma, \sigma \geqslant 0$. Через $R(\Lambda, \beta)$ позначимо клас збіжних при $\sigma \geqslant 0$ рядів вигляду

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n), a_n \geqslant 0 (n \geqslant 1) \tag{1}$$

Задача отримання оцінок зверху для досить широкого спектра функціональних рядів (ряди Тейлора, Діріхле, Тейлора-Діріхле, ряди за системою функцій Міттаг-Леффлера, інтерполяційні ряди) зводиться до подібної задачі для рядів з класу $R(\Lambda, \beta)$ (див.[1-3]). У праці [1] для рядів, подібних до (1), введено поняття порядку та одержано формули обчислення порядку через (a_n) і показники Λ та β. В [2,3] визначені умови правильності при $\sigma \to +\infty$ зовні виняткових множин співвідношення

$$F(\sigma) = (1 + (o(1))\mu(\sigma),$$

де $\mu(\sigma) = \max\{a_n \exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n) : n \geqslant 0\}$ - максимальний член ряду(1). Визначимо умови правильності при $\sigma \to +\infty$ співвідношення

$$\ln F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma). \tag{2}$$

Нехай $\psi(t)$ - додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція. Через $R_\psi(\Lambda, \beta)$ позначимо клас функцій $F \in R(\Lambda, \beta)$ таких, що

$$|a_n| \leqslant \exp\{-(\lambda_n + \beta_n)\psi(\lambda_n + \beta_n)\} (n \geqslant n_0). \tag{3}$$

Зауважимо, що у випадку $\beta_n \equiv 0 (n \geqslant 0)$ одержуємо класи додатних рядів Діріхле $R(\Lambda, 0)$ і $R_\psi(\Lambda, 0)$. М.М.Шеремета [4, 5] для цілих рядів Діріхле довів результат, який можна сформулювати у такій рівносильній формі.

Теорема А [4]. *Для того щоб для кожної функції $F \in R_\psi(\Lambda, 0)$ виконувалось при $\sigma \to +\infty$ співвідношення (2), необхідно і достатньо, щоб*

$$\ln n = O(\psi(\lambda_n)) (n \to +\infty).$$

Правильне таке твердження.

Теорема 1. *Якщо* $F \in R_\psi(\Lambda, \beta)$ *і*

$$\ln n = O(\psi(\lambda_n + \beta_n))(n \to +\infty), \tag{4}$$

то співвідношення (2) справджується при $\sigma \to +\infty$.

Доведення. Зауважимо, що оскільки $\ln \mu(\sigma) \geqslant \ln a_n + \sigma\lambda_n$ для всіх $n \geqslant 0$, то

$$\sigma = o(\ln \mu(\sigma))(\sigma \to +\infty) \tag{5}$$

у випадку $|\{n : a_n \neq 0\}| = +\infty$. У протилежному випадку правильність (2) є очевидною. Нехай $N(\sigma)$ - найменше з тих $n_1 \geqslant n_0$, що для всіх $n \geqslant n_1$ виконується нерівність

$$\psi(\lambda_n + \beta_n) \geqslant 2\sigma, \tag{6}$$

де n_0 - визначено в (3). Тоді при $n = N(\sigma) - 1$ і $\sigma \to +\infty$

$$\psi(\lambda_n + \beta_n) < 2\sigma$$

За умовою (4) $\ln(n+1) < \tau\psi(\lambda_n + \beta_n)$ для $n \geqslant n_2$ з деякими $\tau \in (0, +\infty)$, тому при $n = N(\sigma) - 1$ і $\sigma \to +\infty$, враховуючи (5), маємо

$$\ln N(\sigma) = \ln(n+1) < 2\tau\sigma = o(\ln \mu(\sigma)). \tag{7}$$

Отже, при $\sigma \to +\infty$, використовуючи нерівність (6), одержуємо

$$F(\sigma) \leqslant \sum_{n=0}^{N(\sigma)-1} a_n \exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n) + \sum_{n=N(\sigma)}^{+\infty} \exp(-0,5(\lambda_n + \beta_n)\psi(\lambda_n + \beta_n)) \leqslant$$

$$\leqslant N(\sigma)\mu(\sigma) + O(1) \leqslant 2N(\sigma)\mu(\sigma).$$

Звідси, враховуючи (7), при $\sigma \to +\infty$ маємо

$$\ln F(\sigma) \leqslant \ln 2 + \ln N(\sigma) + \ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma).$$

Теорему 1 доведено.

Введемо також клас $\tilde{R}_\psi(\Lambda, \beta)$ функцій $F \in R(\Lambda, \beta)$ таких, що

$$|a_n| \leqslant \exp(-(\lambda_n + \beta_n)\psi(\lambda_n))(n \geqslant n_0), \tag{8}$$

і покажемо правильність такого твердження.

Теорема 2. *Якщо* $F \in \tilde{R}_\psi(\Lambda, \beta)$ *і*

$$\ln n = O(\psi(\lambda_n)), \tag{9}$$

то співвідношення (2) справджується при $\sigma \to +\infty$.

Доведення в цілому подібне до доведення теореми 1 з тією різницею, що в означенні $N(\sigma)$ замість нерівності (6) треба розглянути нерівність

$$\psi(\lambda_n) \geqslant 2\sigma,$$

звідки при $n = N(\sigma) - 1$ і $\sigma \to +\infty$ за умовою (9) одержуємо $\ln(n+1) \leqslant \tau\psi(\lambda_n)$ і, отже,

$$\ln(n+1) < 2\tau\sigma = o(\ln \mu(\sigma)).$$

Завершується доведення з використанням нерівності (8) замість нерівності (3).

З теореми А випливає, що умови як теореми 1, так і теореми 2, взагалі кажучи, покращити не можна. А у випадку $\beta_n = O(1)(n \to +\infty)$ просто отримати і необхідність умови (4) в теоремі (1) та умови (9) в теоремі 2. Справді, якщо умова (9), наприклад, не виконується, то за теоремою A, застосованою з $\psi_0(x) = 2\psi(x)$ замість $\psi(x)$, існують функція $F_0 \in R_{\psi_0}(\Lambda, 0) \equiv \tilde{R}_\psi(\Lambda, 0)$, стала $h > 0$ і послідовність $\sigma_n \to +\infty$ такі, що

$$\ln F_0(\sigma_n) \geqslant (1+h)\ln\mu(\sigma_n, F_0)(n \geqslant 1). \tag{10}$$

Треба пригадати, що $h(\sigma) \leqslant \sigma(\sigma \geqslant 0)$ і тому за виконання умови $\beta = \sup\{\beta_n : n \geqslant 0\} < +\infty$, для функції F вигляду (1) з коефіцієнтами тими ж, що й у функції F_0,

$$\ln\mu(\sigma, F_0) \leqslant \ln\mu(\sigma, F) \leqslant \beta h(\sigma) + \ln\mu(\sigma, F_0)(\sigma \geqslant 0).$$

Звідси,

$$\ln\mu(\sigma, F) = (1+o(1))\ln\mu(\sigma, F_0)(\sigma \to +\infty).$$

Отже, за допомогою (10), одержуємо при $n \to +\infty$

$$\ln F(\sigma_n) \geqslant \ln F_0(\sigma_n) \geqslant (1+h)(1+o(1))\ln\mu(\sigma, F) \geqslant (1+0,5h)\ln\mu(\sigma_n, F),$$

і необхідність умови (9) для правильності при $\sigma \to +\infty$ для кожної функції $F \in \tilde{R}_\psi(\Lambda, \beta))$ співвідношення (2) доведено, оскільки при $n \to +\infty$

$$a_n \leqslant \exp(-\lambda_n\psi_0(\lambda_n)) \leqslant \exp(-(\lambda_n + \beta_n)\psi(\lambda_n)).$$

Подібно доводимо необхідність умови (4) в теоремі 1 у випадку $\beta_n = O(1)(n \to +\infty)$ і функції ψ такої, що $\psi(2t) = O(\psi(t))(t \to +\infty)$. В загальному правильна така теорема, яка свідчить про необхідність умови (4) теореми 1.

Теорема 3. *Якою б не була послідовність $\mu_n = \lambda_n + \beta_n \nearrow (n \to +\infty)$, для якої $\tau = \sup\{\frac{\beta_n}{\lambda_n} : n \geqslant 1\} < +\infty$,*

$$\ln n = o(\mu_n\psi(\mu_n)) \quad (n \to +\infty) \tag{11}$$

і умова (4) не виконується, функція $h(\sigma)$ така, що $0 \leqslant h'(\sigma) \leqslant 1$ $(\sigma \in [0, +\infty))$ і додатна стала $b > 0$, існує функція F вигляду (1) і послідовність $\sigma_k \uparrow +\infty$ така, що для всіх $k \geqslant 1$

$$\ln F(\sigma_k) \geqslant (1+b)\ln\mu(\sigma_k). \tag{12}$$

Доведення Нехай $P = \frac{8}{3}(1+\tau)$. Позначимо $\alpha_n(\sigma) = \sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n$. Виберемо зростаючі послідовності $\{n_k\} \subset \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $m_k = 0,5n_k$ і через $\varkappa_k$ позначимо єдиний розв'язок рівняння $\alpha_{n_k}(\sigma) = \alpha\ln n_k + P\mu_{n_k}\psi(\mu_{n_k}), \alpha = \frac{1}{2b}$. Зауважимо, що при $k \geqslant 1$

$$\varkappa_k \geqslant P\psi(\mu_{n_k}), \tag{13}$$

та

$$\varkappa_k\lambda_{n_k} \leqslant \alpha\ln n_k + P\mu_{n_k}\psi(\mu_{n_k}),$$

звідси

$$\varkappa_k \leqslant P_1\psi(\mu_{n_k}), \tag{14}$$

якщо виконується перша умова вибору n_k

$$\frac{\ln n_k}{\mu_{n_k}\psi(\mu_{n_k})} \leqslant 1 \quad (k \geqslant 1), \tag{15}$$

де $P_1 = (P+\alpha)(1+\tau)$. Інші умови вибору (n_k), $n_1 = 2$ та для всіх $k \geqslant 1$

$$\frac{\ln n_k}{\lambda_{m_k}\psi(\mu_{n_k})} \leqslant \frac{P}{4\alpha}, \tag{16}$$

$$\psi(\mu_{n_{k+1}}) \geqslant \frac{2P_1\psi(\mu_{n_k})}{P}, \tag{17}$$

$$\ln n_{k+1} > 2\ln n_k, \tag{18}$$

$$\frac{\ln n_{k+1}}{\psi(\mu_{n_{k+1}})\mu_{n_k}} \geqslant \frac{4P_1}{\alpha}. \tag{19}$$

Зауважуючи, що з умови (11) випливає $\ln(2n) = o(\lambda_n\psi(\mu_{2n}))(n \to +\infty)$, а з того, що умова (4) не виконується, випливає існування послідовності $p_k \nearrow +\infty$ такої, що $\frac{\ln(2p_k)}{\psi(\mu_{2p_k})} \uparrow +\infty$, негайно одержуємо, що умови (15) - (19) вибору послідовності (n_k) є не суперечливими. Вибираємо тепер $a_{n_k} = \exp(-P\mu_{n_k}\psi(\mu_{n_k}))$, для $n_{k-1} < n < m_k$, $a_n = 0$, а для $m_k \leqslant n \leqslant n_k$ $a_n = A_{n_k}(\varkappa_k)\exp(-\alpha_n(\varkappa_k))$, де $A_n(\sigma) = a_n\exp(\alpha_n(\sigma))$. Оскільки $A_{n_k}(\varkappa_k) = n_k^\alpha$, то для $m_k \leqslant n \leqslant n_k$, $k \geqslant 1$ з нерівностей (13) та (16) отримуємо

$$\ln a_n = \alpha\ln n_k - \alpha_n(\varkappa_k) \leqslant \alpha\ln n_k - P\psi(\mu_{n_k})\lambda_n \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{3}{4}P\psi(\mu_{n_k})\lambda_n \leqslant -\frac{3}{8}P(1+\tau)\mu_n\psi(\mu_n) = -\mu_n\psi(\mu_n),$$

що разом з умовою (11) дає $F \in R_\psi(\Lambda, \beta)$.

Покажемо, що $\mu(\varkappa_k) = A_n(\varkappa_k) = n_k^\alpha$ для $m_k \leqslant n \leqslant n_k$. Для $j \geqslant 1$ та $m_{k+j} \leqslant n \leqslant n_{k+j}$, послідовно використовуючи (13), (14), (17), (16), маємо

$$\ln\frac{A_{n_k}(\varkappa_k)}{A_n(\varkappa_k)} = \alpha\ln\frac{n_k}{n_{k+j}} + (\varkappa_{k+j} - \varkappa_k)\lambda_n + (h(\varkappa_{k+j}) - h(\varkappa_k))\beta_n \geqslant$$
$$\geqslant -\alpha\ln n_{k+j} + (P\psi(\mu_{n_{k+j}}) - P_1\psi(\mu_{n_k}))\lambda_n \geqslant$$
$$\geqslant -\alpha\ln n_{k+j} + \frac{P}{2}\psi(\mu_{n_{k+j}})\lambda_n \geqslant -\alpha\ln n_{k+j} + \frac{P}{2}\psi(\mu_{n_{k+j}})\lambda_{m_{k+j}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{P}{4}\lambda_{m_{k+j}}\psi(\mu_{n_{k+j}}) > 0,$$

тобто $A_{n_k}(\varkappa_k) > A_n(\varkappa_k)$ для $m_{k+j} \leqslant n \leqslant n_{k+j}, j \geqslant 1$. Для $1 \leqslant j < k, m_{k-j} \leqslant n \leqslant n_{k-j}$, використовуючи послідовно умову (18), нерівність $h'(\sigma) \leqslant 1(\sigma > 0)$, та нерівності (14) та (19), одержуємо

$$\ln\frac{A_{n_k}(\varkappa_k)}{A_n(\varkappa_k)} = \alpha\ln\frac{n_k}{n_{k-j}} - (\varkappa_k - \varkappa_{k-j})\lambda_{n_{k-j}} - (h(\varkappa_k) - h(\varkappa_{k-j}))\beta_{n_{k-j}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{2}\ln n_k - (\varkappa_k - \varkappa_{k-j})\mu_{n_{k-j}} \geqslant \frac{\alpha}{2}\ln n_k - \varkappa_k\mu_{n_{k-j}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{2}\ln n_k - P_1\psi(\mu_{n_k})\mu_{n_{k-j}} \geqslant \frac{\alpha}{4}\ln n_k > 0,$$

тобто $A_{n_k}(\varkappa_k) > A_n(\varkappa_k)$ для $m_{k-j} \leqslant n \leqslant n_{k-j}, 1 \leqslant j < k$. Отже, $\mu(\varkappa_k) = A_n(\varkappa_k) = n_k^\alpha$ для $m_k \leqslant n \leqslant n_k$ і остаточно для $k \geqslant 2$ одержуємо

$$F(\varkappa_k) \geqslant \sum_{n=m_k}^{n_k} A_n(\varkappa_k) = (n_k - m_k + 1)n_k^\alpha \geqslant \frac{1}{2}(\mu(\varkappa_k))^{1+\frac{1}{\alpha}},$$

тобто

$$\ln F(\varkappa_k) \geqslant (1+2b)\ln\mu(\varkappa_k) - \ln 2 = (1+b)\ln\mu(\varkappa_k) + \frac{1}{2}\ln n_k - \ln 2 \geqslant (1+b)\ln\mu(\varkappa_k),$$

достатньо вибрати $\sigma_k = \varkappa_{k+1}$ і теорему 3 доведено. Подібно доводимо теорему, яка свідчить про необхідність умови (9) для правильності співвідношення (2) в класі $\tilde{R}_\psi(\Lambda,\beta)$.

Теорема 4. *Якою б не була послідовність $\mu_n = \lambda_n + \beta_n \nearrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, для якої $\tau = \sup\{\frac{\beta_n}{\lambda_n} : n \geqslant 1\} < +\infty$, $\ln n = o(\mu_n\psi(\mu_n))$ $(n \to +\infty)$ і умова (4) не виконується, функція $h(\sigma)$ така, як у теоремі 3 і додатна стала $b > 0$, існують функція $F \in \tilde{R}_\psi(\Lambda,\beta)$ і послідовність $\sigma_k \nearrow +\infty$ такі, що для всіх $k \geqslant 1$ справджується нерівність (12).*

---

1. *Осколков В.А.* О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами // Мат. сб. – 1976. – Т.100. – №2. – С.312–334.
2. *Величко С.Д., Скасків О.Б.* Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1989. – Вип.32. – С.50–51.
3. *Скасків О.Б., Трусевич О.М.* Максимальний член і сума регулярно-збіжного функціонального ряду // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.49. – С.75–79.
4. *Шеремета М.М.* О соотношениях между максимальным членом и максимумом модуля целого ряда Дирихле // Мат.заметки. – 1992. – Т.51. – №5. – С.141–148.
5. *Шеремета М.М.* Про співвідношення між максимумом модуля і максимальним членом цілого ряду Діріхле // Мат. студії. – 1991. - Вип.1. – С.33–43.

Skaskiv O., Trusevych O.

ON FULL EQUIVALENCE LOGARITHMES OF A SUM AND A MAXIMAL TERM OF POSITIVE SERIES OF TALOR-DIRICHLET TYPE

Unimproved conditions under which the asymptotic equality

$$\ln F(\sigma) \sim \ln\max\{a_n\exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n) : n \geqslant 0\}$$

holds as $\sigma \to +\infty$ are established for functional series of the form

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\exp(\sigma\lambda_n + h(\sigma)\beta_n), \quad a_n \geqslant 0 \quad (n \geqslant 0).$$

Стаття надійшла до редколегії 14.06.99

ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 54. С. 180–182 *Ser. Mech-Math. 1999. Vol. 54. P. 180–182*

УДК 517.576

Олег Скасків

ПРО КЛАСИЧНУ НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Відомо, (див., наприклад, [1, с.214]), що для кожної цілої функції $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ і для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E \subset [1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри (тобто $\int_E r^{-1}\,dr < +\infty$) така, що для всіх $r \in [1, +\infty) \setminus E$ правильна нерівність

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r)\bigl(\ln \mu_f(r)\bigr)^{1/2+\varepsilon}. \tag{1}$$

У випадку цілих рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n} \tag{2}$$

$0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leqslant n \to +\infty)$ аналоги нерівності (1) близькі до класичної знаходимо в [2–4]. Зокрема, за виконання умови $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant h > 0$ $(n \geqslant 0)$ в [2] показано, що $\forall \varepsilon > 0$, нерівність

$$M(\sigma, F) \leqslant \mu(\sigma, F)\bigl(\ln \mu(\sigma, F)\bigr)^{1/2+\varepsilon} \tag{3}$$

справджується для всіх $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, E – скінченної міри, де $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + iy)| : y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : n \geqslant 0\}$. У працях [3, 4] за виконання умови

$$|n(t) - \Delta t^\rho| \leqslant D \ (t \geqslant t_0), \quad 0 < \Delta < +\infty, \frac{1}{2} \leqslant \rho, D < +\infty, \tag{4}$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності $\Lambda = (\lambda_n)$, показано, що для кожного $\varepsilon > 0$, нерівність

$$M(\sigma, F) \leqslant \mu(\sigma, F)\bigl(\ln \mu(\sigma, F)\bigr)^{\rho-1/2+\varepsilon}$$

справджується для всіх $\sigma \in [0, +\infty) \setminus E$, E – скінченної міри.

Нехай L – клас додатних неперервних функцій таких, що $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\psi(x)} < +\infty$.

У цьому повідомленні доведемо теорему.

Теорема 1. *Нехай F має вигляд (2). Якщо для деякої функції $\psi \in L$ виконується умова*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{\ln n_1\bigl(t, \sqrt{\psi(t)}\bigr)}{\ln t} \leqslant p, \tag{5}$$

де $n_1(a,\Delta)=n(a+\Delta,a-\Delta)$, *то для кожного* $\varepsilon>0$ *і для всіх* $\sigma\in[0,+\infty)\setminus E$, *($E$ – деяка множина скінченної міри)*

$$M(\sigma,F)\leqslant \mu(\sigma,F)\big(\ln\nu(\sigma,F)\big)^{p+\varepsilon}.$$

Оскільки за виконання умови $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant h>0$ $(n\geqslant 0)$ в (5) можна вибрати $p=1/2$, а за виконання умови (4) – $p=\rho-1/2$ (при цьому в (5) існує границя), то з теореми 1 одержуємо цитовані вище результати з [2–4].

Про те, що теорему 1 не можна покращити, свідчить теорема 2.

Теорема 2. *Якщо для деякої функції* $\psi\in L$ *такої, що* $\psi(t)=O(t\ln t\ln^2\ln t)$ $(t\to+\infty)$ *виконується умова*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\ln n_1(t,\sqrt{\psi(t)})}{t^p}=p_1,\quad p>0,$$

то існує цілий ряд Діріхле F *вигляду (2), для якого*

$$\frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma,F)}\big(\ln\mu(\sigma,F)\big)^{-p}\to+\infty\quad(\sigma\to+\infty).$$

Звідси, зокрема, отримуємо, що для кожної послідовності Λ такої, що виконується умова (4) існує цілий ряд Діріхле, для якого

$$\frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma,F)}\big(\ln\mu(\sigma,F)\big)^{\rho-1/2}\to+\infty\quad(\sigma\to+\infty).$$

Доведення теореми 1. При фіксованому $\sigma\in\mathbb{R}$ нехай ξ – дискретна випадкова величина з розподілом ймовірностей

$$P\{\xi=\lambda_n\}=\frac{1}{\mathfrak{m}(\sigma)}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}\quad(n\geqslant 0),$$

де $\mathfrak{m}(\sigma)=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}$. Зауважимо, що математичне сподівання $M\xi=g'(\sigma)$ і дисперсія $D\xi=g''(\sigma)$, де $g(\sigma)=\ln\mathfrak{m}(\sigma)$.

Нехай $\psi_1\in L$ і g_1 – диференційовна додатна зростаюча функція, а $E(g_1)=\{\sigma\geqslant 0: g_1'(\sigma)\geqslant\psi_1(g_1(\sigma))\}$. Тоді, очевидно, лебегова міра $\operatorname{meas}\big(E(g_1)\big)<+\infty$. Тому при $\psi_1(t)=\frac{1}{2}\psi(t)$ і $g_1(\sigma)=g'(\sigma)$ маємо, що $E(g')$ має скінченну міру, а також при $\psi_1(t)=t(\ln^+t)^2$, $g_1(\sigma)=g(\sigma)$ – $E(g)$ має скінченну міру. Тому, одночасно, при $\sigma\notin E(g)\cup E(g')\overset{def}{=}E$ виконуються нерівності

$$g''(\sigma)\leqslant\frac{1}{2}\psi\big(g'(\sigma)\big),\quad g'(\sigma)\leqslant g(\sigma)\big(\ln^+g(\sigma)\big)^2.\tag{6}$$

Застосовуючи тепер при $\varepsilon=\sqrt{2D\xi}$ нерівність Чебишева $P\{|\xi-M\xi|\leqslant\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$, одержуємо $\mathfrak{m}(\sigma)\leqslant 2\sum_{|\lambda_n-g'(\sigma)|\leqslant\sqrt{2g''(\sigma)}}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}$. Звідки, застосовуючи послідовно першу нерівність з (6), умову (5), а потім другу нерівність з (6), отримуємо нерівність з теореми 1.

Доведення теореми 2. Припустимо, що $\ln n=o(\lambda_n)$ $(n\to+\infty)$, виберемо $\ln a_n=-\beta\lambda_n(\ln_3\lambda_n)^+$, $\beta>0$, і розглянемо функцію F вигляду (2). Позначимо $h(x)=-\beta x\ln_3^+x+\sigma x$ і $x(\sigma)$ – єдину точку максимуму $h(x)$ при $x\geqslant e^e$. Тоді при $\sigma\to+\infty$

$$\ln\mu(\sigma,F)\leqslant h\big(x(\sigma)\big)=\beta x(\sigma)/\big(\ln x(\sigma)\ln_2x(\sigma)\big).$$

Нехай $t_\pm = x(\sigma) \pm \sqrt{\psi(x(\sigma))}$. Оскільки $h''(x) \sim -\beta(x\ln x\ln_2 x)^{-1}$ $(x \to +\infty)$, то, враховуючи, що при $x \in (t_-, t_+)$

$$h(x) = h\big(x(\sigma)\big) + \frac{h''(\tilde{x})}{2}\big(x - x(\sigma)\big)^2 \geqslant$$
$$\geqslant h(x(\sigma)) - \Big(\frac{\beta}{2} + o(1)\Big)\Big(\big(x(\sigma)\ln x(\sigma)\ln_2 x(\sigma)\big)^{-1}\psi\big(x(\sigma)\big),$$

при $\sigma \to +\infty$ одержимо

$$F(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{h(x)}dn(x) \geqslant \int_{t_-}^{t_+} e^{h(x)}dn(x) \geqslant$$
$$\mu(\sigma, F)n_1\big(x(\sigma), \sqrt{\psi(x(\sigma))}\big)\exp\Big\{-\Big(\frac{\beta}{2} + o(1)\Big)\Big(\big(x(\sigma)\ln x(\sigma)\ln_2 x(\sigma)\big)^{-1}\psi\big(x(\sigma)\big)\Big\}.$$

Зважаючи на те, що $\psi(t) \leqslant Kt\ln t\ln_2^2 t$ $(t \to +\infty)$, а за умовою $n_1\big(x(\sigma), \sqrt{\psi(x(\sigma))}\big) \geqslant c_1\big(x(\sigma)\big)^p \geqslant c_2\big(\ln\mu(\sigma, F)\ln x(\sigma)\ln_2 x(\sigma)\big)^p$, де $c_1, c_2 > 0$, то, вибираючи $\beta = \varepsilon/K$, $\varepsilon \in (0, p)$, при $\sigma \to +\infty$ одержуємо

$$F(\sigma) \geqslant \mu(\sigma, F)\big(\ln\mu(\sigma, F)\big)^p\exp\Big\{\big(p - \frac{\varepsilon}{2} + o(1)\big)\ln_2 x(\sigma)\Big\} \geqslant$$
$$\geqslant \mu(\sigma, F)\big(\ln\mu(\sigma, F)\big)^p\big(\ln_2\mu(\sigma, F)\big)^{p-\varepsilon}. \quad (7)$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Насправді доведено за виконання умов теореми 2 сильнішу нерівність (7).

---

1. *Валірон Ж.* Аналитические функции. – М., 1957.
2. *Sunier i Balaguer F.* Generalizacion de metodo de Wiman-Valiron a una classe de series de Dirichlet // Publ. semin. math. fac. cient Zaragoza. – 1962. – №3. – P.43–47.
3. *Шеремета М.Н.* Метод Вимана- Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле// Докл. АН СССР. – 1978. – Т.240. – №5. – С.1036–1039.
4. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле. – К., 1993.

Skaskiv O.

ON THE CLASSICAL WIMAN INEQUALITY FORf ENTIRE DIRICHLET SERIES

We establish unimprovable conditions for entire Dirichlet series under which the classical Wiman inequality holds.

Стаття надійшла до редколегії 09.09.99

Збірник наукових праць
ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія механіко-математична

Випуск 54

Видається з 1965 р.

Комп'ютерний набір (видав. пакет $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX).
Підписано до друку 24.12.99. Формат 70×100/16. Папір друк. № 3.
Умовн. друк. арк. 8.32. Тираж 200. Зам. № 49.

Видавничий центр Львівського національного університету
імені Івана Франка. 79000 Львів, вул. Дорошенка, 41.