ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 3–6 *Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 3–6*

УДК 539.3

Віктор Божидарник, Олеся Максимович

Луцький державний технічний університет

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ ПЛАСТИНОК З ОТВОРАМИ І ТРІЩИНАМИ

У праці [1] наведено інтегральні рівняння задачі теорії пружності для анізотропних пластинок з отворами довільної форми. Нижче на основі результатів [1] розглянуто задачі про пружну рівновагу анізотропних багатозв'язних пластинок, послаблених криволінійними тріщинами. Для розв'язування рівнянь застосовано метод механічних квадратур [4]. Інші підходи до дослідження анізотропних пластинок описані у працях [2, 3, 5].

Розглянемо спочатку випадок, коли пластинка займає область D, що обмежена контурами L_0, L_1, ..., L_N, які не перетинаються. Прийнято, що область D є внутрішньою стосовно контура L_0 та пластинка перебуває під дією навантаження, яке прикладене до її межі. Віднесемо область D до декартової системи координат (x, y) та позначимо прикладені до межі пластинки зусилля через (X, Y). Розглянемо системи координат (x_1, y_1), (x_2, y_2), які одержують із системи (x, y) афінним перетворенням $x_j = x + \alpha_j y$, $y_j = y + \beta_j y$ $(j = 1, 2)$, де $s_j = \alpha_j + i\beta_j$ – корені характеристичного рівняння [2], причому $\operatorname{Im}(s_j) > 0$ $(j = 1,2)$. Позначимо в цих системах через D_1 і D_2 області, в які при афінних перетвореннях перейде область D, а L_j криві, відповідають контурам, – через $L_j^{(1,2)}$ $(j = 0,...,N)$. Поставлена задача зводиться до знаходження комплексних потенціалів $\varphi(z_1)$, $\psi(z_2)$, які на межі області задовольняють умови [2]

$$2\operatorname{Re}[\varphi(z_1) + \psi(z_2)] = -\int_0^s Y\,ds + C_1\,, \quad 2\operatorname{Re}[s_1\,\varphi(z_1) + s_2\,\psi(z_2)] = \int_0^s X\,ds + C_2\,, \tag{1}$$

де $z_1 = x + s_1 y$, $z_2 = x + s_2 y$, C_1, C_2 – дійсні сталі.

На основі [1] інтегральні зображення для комплексних потенціалів $\Phi(z) = d\varphi(z)/dz$, $\Psi(z) = d\psi(z)/dz$ запишемо у вигляді

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(1)}} \frac{Q(\tau)}{\tau - z_1}\,d\tau\,, \tag{2}$$

$$\Psi(z_2) = \frac{1}{2\pi i(s_2 - \bar{s}_2)}\Big[\int_L \frac{X + \bar{s}_2\,Y}{t_2 - z_2}\,ds - (s_1 - \bar{s}_2)\int_{L^{(1)}} \frac{Q(t_1)\,dt_1}{t_2 - z_2} - (\bar{s}_1 - \bar{s}_2)\int_{L^{(1)}} \frac{\overline{Q(t_1)}\,d\bar{t}_1}{t_2 - z_2}\Big],$$

де $Q(t_1) = \Phi(t_1) - A_j$ при $t_1 \in L_j^{(1)}$; $L^{(k)} = L_0^{(k)} + L_1^{(k)} + \ldots + L_N^{(k)}$, $(k = 1,2)$. Тут за додатний напрям обходу контурів обраний такий, область D якого залишається ліворуч та введено в розгляд комплексні сталі A_j і B_j $(j = 0,...,N)$, що задовольняють умови

$$A_j + \overline{A}_j + B_j + \overline{B}_j = 0,$$

$$s_1 A_j + \overline{s}_1 \overline{A}_j + s_2 B_j + \overline{s}_2 \overline{B}_j = 0,$$

$$s_1^2 A_j + \overline{s}_1^2 \overline{A}_j + s_2^2 B_j + \overline{s}_2^2 \overline{B}_j = 0. \tag{3}$$

Комплексні потенціали задовольняють додаткові умови, які забезпечують однозначність переміщень. Такі умови на основі [2] записані у вигляді

$$\int\limits_{L_j} Q(z_1)\, dz_1 = -\frac{C_1^{(1)}\, Y^{(j)} + C_2^{(1)}\, X^{(j)}}{C}, \qquad j = 0,\dots,N, \tag{4}$$

де $C_i^{(j)}, C$ – сталі, вирази для яких наведені в [2]; $X^{(j)}$, $Y^{(j)}$ – проекції на осі Ox і Oy головного вектора всіх сил, що прикладені до контуру L_j. Для знаходження функції Q, через яку записаний загальний розв'язок задачі, використаємо формулу для знаходження вектора зусиль на довільній кривій $\Gamma \in D$ [6]:

$$i(X + iY) = (1 + is_1)\, z_1' \,\Phi(z_1) + (1 + i\overline{s}_1)\, \overline{z}_1' \,\overline{\Phi(z_1)} + (1 + is_2)\, z_2' \,\Psi(z_2) + (1 + i\overline{s}_2)\, \overline{z}_2' \,\overline{\Psi(z_2)}, \tag{5}$$

де $z_j' = dz_j/ds$, ds – диференціал дуги на кривій Γ. Підставивши в (5) потенціали (2) і перейшовши до границі $(x, y) \to L$, одержимо граничні інтегральні рівняння для знаходження функції Q у вигляді

$$i(X + iY)/2 = (1 + is_1)\, z_1' \,\Phi(z_1) + (1 + i\overline{s}_1)\, \overline{z}_1' \,\overline{\Phi(z_1)} + (1 + is_2)\, z_2' \,\Psi(z_2) + (1 + i\overline{s}_2)\, \overline{z}_2' \,\overline{\Psi(z_2)}, \tag{6}$$

де $(x, y) \in L$. Інтеграли Коші, які входять у комплексні потенціали (2), на контурі інтегрування розглядають в сенсі головного значення.

Розглянемо випадок, коли отвори L_i $(i = M+1,\dots,N)$ вироджуються у тріщини. На основі (2) інтегральне зображення загального розв'язку задачі набуває вигляду

$$\Phi(z_1) = \Phi_0(z_1) + \Phi_T(z_1), \qquad \Psi(z_2) = \Psi_0(z_2) + \Psi_T(z_2), \tag{7}$$

де функції з індексом «0» визначаються за формулами (2) при $N = M$,

$$\Phi_T(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T^{(1)}} \frac{S(\tau)\, d\tau}{\tau - z_1}, \qquad \Psi_T(z_2) = \frac{1}{2\pi i(s_2 - \overline{s}_2)} \Bigg[\int\limits_{T} \frac{[X] + \overline{s}_2 [Y]}{t_2 - z_2}\, ds -$$

$$- (s_1 - \overline{s}_2) \int\limits_{T^{(1)}} \frac{S(t_1)\, dt_1}{t_2 - z_2} - (\overline{s}_1 - \overline{s}_2) \int\limits_{T^{(1)}} \frac{\overline{S(t_1)\, dt_1}}{t_2 - z_2} \Bigg], \tag{8}$$

де $S(t_1) = [\Phi]$. Тут прийнято позначення вигляду $[F] = F^+(t_1) - F^-(t_1)$, де F – довільна функція; $F^+(t_1), F^-(t_1)$ – граничні значення функції $F(z_1)$ у разі підходу ліворуч і праворуч до тріщини стосовно обраного напряму інтегрування; $t_1 \in T_j^{(1)}$; $T^{(k)} = T_1^{(k)} + T_2^{(k)} + \dots + T_{N-M}^{(k)}$, $(k = 1,2)$, T_j $(j = 1, \dots, N-M)$ – контури розрізів. На підставі (4) одержуємо додаткову умову, яку задовольняє функція S:

$$\int_{T_j} S(z_1)\,dz_1 = -\frac{C_1^{(1)}\,Y^{(j)} + C_2^{(1)}\,X^{(j)}}{C}, \quad j = 1, \ldots, N - M. \tag{9}$$

Співвідношення (6) при врахуванні зображень є системою сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій Q та S. Для розв'язування інтегральних рівнянь (6) використаємо метод механічних квадратур. Для цього наведемо квадратурні формули для інтегралів, які входять у зображення (2) і (8). Розглядаючи отвори, розглядатимемо випадок, коли параметричне рівняння контурів L_j записане у вигляді відрізків ряду Фур'є:

$$x = \sum_{n=-K}^{K} a_n^{(j)} e^{in\theta}, \quad y = \sum_{n=-K}^{K} b_n^{(j)} e^{in\theta}, \qquad j = \overline{0, M},$$

де $a_n^{(j)}$, $b_n^{(j)}$, K – сталі; $0 \le \theta < 2\pi$. Тоді рівняння контурів $L_j, L_j^{(1,2)}$ записуємо:

$$t_k = \omega_k^{(j)}(\sigma), \quad \text{де } t_0 = t, \quad \omega_k^{(j)}(\sigma) = \sum_{n=-K}^{K} \left(a_n^{(j)} + s_n\, b_n^{(j)}\right)\sigma^n, \quad s_0 = 1, \quad \sigma = e^{i\theta}.$$

Розглянемо інтеграл, який входить у рівняння (6)

$$Z_j(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(1)}} \frac{Q(\tau)}{\tau - z_1}\,d\tau, \quad j = 1, \ldots, M.$$

Для цього інтегралу можна застосувати відомі квадратурні формули [4]. Тоді записуємо

$$Z_j(z_1) \cong \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{Q_k^{(j)}\, t_{1k}'^{(j)}\, \sigma_k^{(j)}}{t_{1k}^{(j)} - z_1},$$

де $t_{1k}^{(j)} = \omega_1^{(j)}(\sigma_k)$, $t_{1k}'^{(j)} = \omega_1'^{(j)}(\sigma_k)$, $Q_k^{(j)} = Q(t_{1k}^{(j)})$, $\sigma_k = \exp(ih_j k)$, $h_j = 2\pi/N_j$, N_j – кількість вузлових точок на контурі L_j. Наведена формула правильна для довільних точок, що не належать контуру $L_j^{(1)}$, та для точок $z_1 = \omega_1^{(j)}(\varsigma_\nu^{(j)})$, де $\varsigma_\nu^{(j)} = \exp(i\theta_\nu^{(j)})$, $\theta_\nu^{(j)} = h_j(\nu + 0.5)$, $\nu = 1, \ldots, N_j$. Зазначимо, що в останньому випадку інтеграл розглядається в сенсі головного значення.

Аналогічно маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(1)}} \frac{Q(t_1)}{t_2 - z_2}\,dt_1 \cong \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} \frac{Q_k^{(j)}\, t_{1k}'^{(j)}\, \sigma_k^{(j)}}{t_{2k}^{(j)} - z_2}.$$

Формула правильна для довільних точок, які не належать контуру $L_j^{(2)}$, та для точок $z_2 = \omega_2^{(j)}(\varsigma_\nu^{(j)})$. В інтегральне зображення розв'язку входять також інтеграли вздовж розрізів $T_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, N - M)$ вигляду

$$W_j(z_1) = \int_{T_j^{(1)}} \frac{S(t_1)}{t_1 - z_1}\,dt_1.$$

Приймемо, що параметричне рівняння контурів $T_j, T_j^{(1)}, T_j^{(2)}$ $(j = 1, \ldots,$

$N-M$) записане у вигляді $t = g_j(\tau)$, $t_1 = g_j^{(1)}(\tau)$, $t_2 = g_j^{(2)}(\tau)$, $-1 < \tau < 1$. Функції S мають вигляд: $S(g_j^{(1)}(\tau)) = U_j(\tau)/\sqrt{1-\tau^2}$, де $U_j(\tau)$ – обмежена неперервна функція, $j = 1,\dots,N-M$. Для знаходження функції W_j використаємо квадратурні формули Лобатто. У результаті одержимо

$$W_j(z_1) = \sum_{n=1}^{N_j} A_{jn} \frac{U_{jn}\, t_{1n}^{(j)'}}{t_{1n}^{(j)} - z_1},$$

де $A_{jn} = \pi/(N_j - 1)$ при $n = 2, \dots, N_j - 1$; $A_{j1} = A_{jN_j} = 0.5\pi/(N_j - 1)$; $t_{1n}^{(j)} = g_j^{(1)}(\tau_n)$, $t_{1n}^{\prime(1)} = g_j^{\prime(1)}(\tau_{jn})$, $\tau_{jn} = \cos[\pi n/(N_j - 1)]$ при $n = 2, \dots, N_j - 1$; $\tau_{j1} = -1$; $\tau_{jN_j} = 1$; $U_{jn} = U_j(t_{1n}^{(j)})$. Ця формула правильна, якщо $z_1 \notin T_j$ та $z_1 = g_j^{(1)}(\cos[\pi(n - 0.5)/(N_j - 1)])$ при $n = 1, \dots, N_j - 1$. Підставляючи у рівняння (6) зображення (2), (8) та замінюючи в одержаних співвідношеннях інтеграли на наведені квадратурні формули, поставлену задачу зводимо до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих значень функцій Q у вузлових точках на межі отворів та функцій U на розрізах. Додаткові рівняння на тріщинах отримаємо, записавши дискретний аналог умови (9). Спосіб врахування власних розв'язків рівняння (6) на контурах L_j ($j = 0, \dots, M$) описаний у [1].

---

1. *Божидарник В. В., Максимович О. В.* Пружна рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. Львів: Каменяр. – 1999. – **2**, № 2. – С. 255–259.
2. *Божидарник В. В.* Двовимірні задачі теорії пружності і термопружності структурно-неоднорідних тіл. – Львів: Світ, 1998.– 352 с.
3. *Космодемианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев; Донецк: Выща школа, 1976. – 200 с.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. *Фильштинский А. Л.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. МТТ. – 1976. – № 5. – С. 91–97.

Victor Bozhydarnyk, Olesia Maksymovych

INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST BASE PROBLEM FOR NON-ASITROPES ELASTIC PLATES WITH HOLES AND CREAKS

The paper presents singular integral equations for non-asitrope plates weakened by holes and creaks. The paper worked out the numerical algorithm of solving of the received equations that is based on the method of mechanical quadrature.

Стаття надійшла до редколегії 10.08.99