

УДК 539.3

Георгій Сулим, Віктор Опанасович, Володимир Драпака

Львівський національний університет ім. І. Франка

ГРАНИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ДВОХ ВЕРТИКАЛЬНО ЗСУНУТИХ ІДЕНТИЧНИХ ТРІЩИН У ПЛАСТИНІ

Досліджується розв'язок задачі про напружений стан ізотропної пластини з двома вертикально зсунутими на величину d тріщинами завдовжки $2l$ (рис. 1). Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження, пластина на нескінченності розтягується перпендикулярно до осей тріщин рівномірно розподіленими напруженнями інтенсивності $\sigma_{yy}^{\infty} = p$. З'ясуємо вплив зближення тріщин на зміну коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН).

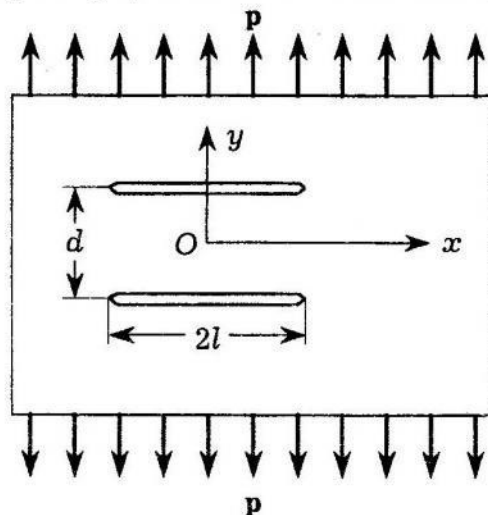


Рис. 1. Схема задачі.

У працях [1, 2] розв'язування цієї задачі зведене до сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою [1]

$$\int_{-1}^1 [\varphi(\tau) K(\tau, \varepsilon) + \overline{\varphi(\tau)} L(\tau, \varepsilon)] \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = -\pi, \quad (1)$$

$$\left(|\varepsilon| < 1, \quad \tau = \frac{t}{l}, \quad \varepsilon = \frac{x}{l} \right), \quad \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = 0,$$

де $\varphi(\tau) = p^{-1} \sqrt{1-\tau^2} g'(\lambda\tau)$,

$$K(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\tau - \varepsilon} + \frac{\lambda^2 (\tau + \varepsilon)}{\lambda^2 (\tau + \varepsilon)^2 + 4}, \quad L(\tau, \varepsilon) = L_1(\tau, \varepsilon) + i L_2(\tau, \varepsilon), \quad \lambda = \frac{2l}{d},$$

$$L_1(\tau, \varepsilon) = \frac{8\lambda^2(\tau + \varepsilon)}{[\lambda^2(\tau + \varepsilon)^2 + 4]^2}, \quad L_2(\tau, \varepsilon) = \frac{2\lambda[\lambda^2(\tau + \varepsilon)^2 - 4]}{[\lambda^2(\tau + \varepsilon)^2 + 4]^2}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2)$$

$g(x)$ – невідома функція, яка пропорційна до стрибка переміщень точок берегів тріщин.

Застосування до розв'язування рівняння (1) схеми методу механічних квадратур [1, 2] дає систему M лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_{m=1}^M [\varphi(t_m) K(t_m, x_r) + \overline{\varphi(t_m)} L(t_m, x_r)] = -M \quad (r = \overline{1, M-1}), \quad \sum_{m=1}^M \varphi(t_m) = 0, \quad (3)$$

де координати вузлів t_m і x_r задають співвідношеннями $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$,

$x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$; функція $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$.

У цьому випадку КІН обчислюють за формулами [1-3]:

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = \mp p\sqrt{l}(\varphi_1(\pm 1) + i\varphi_2(\pm 1)), \quad (4)$$

де $\varphi(\pm 1) = \mp \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+\frac{M}{2}(1\pm 1)} \varphi(t_m) \operatorname{tg} \mp \frac{2m-1}{4M} \pi$.

У працях [1-3] зазначено, що за зменшення відстані між тріщинами до нуля КІН прямують до вироджених значень. Дослідимо докладніше цей граничний перехід.

Переходячи у системі рівнянь (3) до границі при $d \rightarrow 0$ (ця ситуація відповідає явищу злиття двох тріщин), одержуємо

$$\frac{2}{M} \sum_{m=1}^M \left[\varphi(t_m) \frac{t_m}{t_m^2 - x_r^2} \right] = -1 \quad (r = \overline{1, M-1}), \quad \sum_{m=1}^M \varphi(t_m) = 0. \quad (5)$$

Оскільки $x_r = -x_{M-r}$, то визначник СЛАР (5) дорівнює нулю і КІН прямують до вироджених значень. Щоб того позбутися, видозмінимо СЛАР (3), беручи до уваги, що у функції $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$ дійсна частина є непарною, уявна – парною. Тоді система рівнянь (3) зредукується до

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{[M/2]} \varphi_1(t_m) K_{11}(t_m, x_r) + \sum_{m=1}^N \varphi_2(t_m) K_{12}(t_m, x_r) &= -M, \quad r = \overline{1, [M/2]}, \\ \sum_{m=1}^{[M/2]} \varphi_1(t_m) K_{21}(t_m, x_r) + \sum_{m=1}^N \varphi_2(t_m) K_{22}(t_m, x_r) &= 0, \quad r = \overline{1, N-1}, \\ \sum_{m=1}^N \varphi_2(t_m) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$K_{jj}(t, x) = K(t, x) - L_1(-t, x) + (-1)^j [K(-t, x) - L_1(t, x)], \quad j = 1, 2,$$

$$K_{ij}(t, x) = L_2(t, x) + (-1)^j L_2(-t, x), \quad i, j = 1, 2, \quad (i \neq j),$$

$$N = \left[\frac{M}{2} \right] + \begin{cases} 0, & \text{якщо } M - \text{парне,} \\ 1, & \text{якщо } M - \text{непарне;} \end{cases} \quad [a] - \text{ціла частина числа } a.$$

КІН знаходимо за формулами (4), враховуючи, що у цьому випадку вирази для $\varphi_j(1)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_1(1) &= \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{[M/2]} (-1)^{m+1} \varphi_1(t_m) \begin{cases} \sin^{-1}((2m-1)/(2M)\pi), & M - \text{парне,} \\ \operatorname{ctg}((2m-1)/(2M)\pi), & M - \text{непарне,} \end{cases} \\ \varphi_2(1) &= \frac{2}{M} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \varphi_2(t_m) \begin{cases} \operatorname{ctg}((2m-1)/(2M)\pi), & M - \text{парне,} \\ \delta_{m,N} \sin^{-1}((2m-1)/(2M)\pi), & M - \text{непарне,} \end{cases} \\ \delta_{m,N} &= \begin{cases} 1, & m \neq N, \\ 1/2, & m = N. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 2, 3 відображені результати числового аналізу впливу взаємного зближення тріщин (зменшення параметра q) на зміну безрозмірних КІН $K_i^* = K_i^+/(p\sqrt{l})$, $i = 1, 2$ за різних способів їх обчислення. Лінії 1, 2 побудовані з використанням розв'язку системи рівнянь (6). Лінії 3, 4 отримані з використанням традиційної схеми (3)–(5) при $M = 200$.

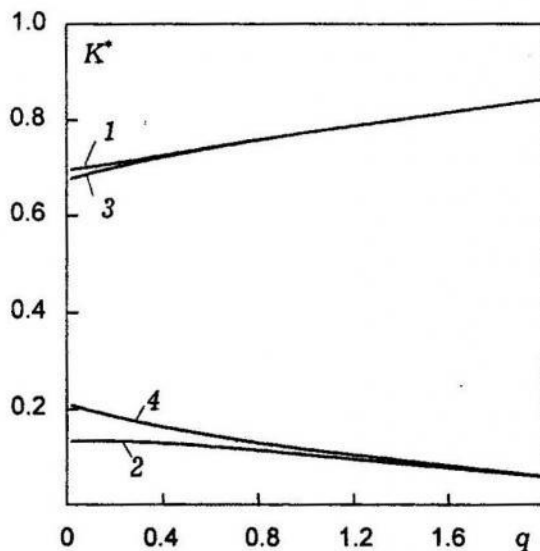


Рис. 2. Залежність зведених КІН від відносної відстані q між тріщинами і сталому навантаженні p при $M = 200$.

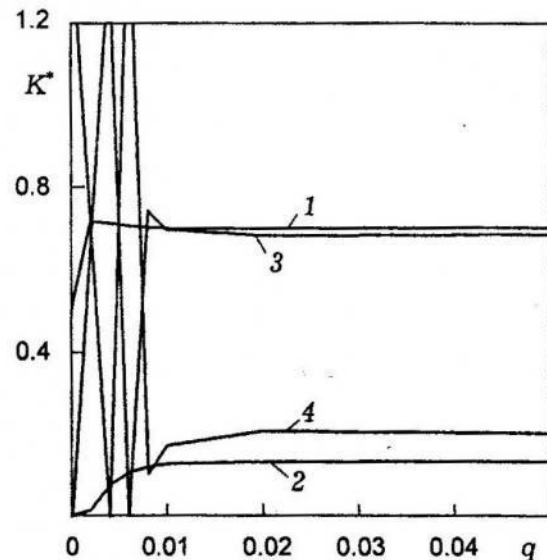


Рис. 3. Залежність зведених КІН від відносної відстані q між тріщинами для малих значень q при $M = 200$.

Стосовно КІН доходимо таких висновків.

1. Для досягнення бажаного рівня точності в обох випадках при $q \rightarrow 0$ треба збільшувати кількість M , врахованих у рядах членів.
2. Доки завдяки розрядній сітці комп'ютера вдається уникнути нагромадження похибок округлення, при $d > r$, за досить великим значенням M , обидва методи дають результати, які узгоджуються з асимптотичним розподілом [1-3] і $K_1 \rightarrow p\sqrt{l/2}$, тобто домінує явище зближення тріщин.
3. Яким би великим не було значення M , застосовуючи традиційний метод з прямуюванням q до нуля за умови $d < r$ завжди одержуємо $K_i^* \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$. Запропонована тут схема (6) дає граничні значення $K_1^* \rightarrow p\sqrt{l}/2$, $K_2^* \rightarrow 0$, властиві для «півтріщин». Тобто, вдається виловити ефект злиття двох «половинних» тріщин. Окрім того, асимптотичний розподіл напружень поблизу вершин двох тріщин при $r > d \rightarrow 0$ прямує до відповідного розподілу напружень поодинокі тріщини.

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
3. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

Heorhiy Sulym, Victor Opanasovych, Volodymyr Drapaka

THE LIMITING SIF VALUES FOR TWO VERTICALLY SHIFTED IDENTICAL CRACKS IN A PLATE

At the considering paper two different limiting transitions in the SIF determination near each of two parallel non-shifted cracks which are coming close to each other $d \rightarrow 0$ are obtained on the numerical level. The cracks are situated in a plate which is stretched on the infinity by uniformly distributed load. If $d > r$ than the effect of coming close of the cracks is dominating $K_1 \rightarrow p\sqrt{l}/\sqrt{2}$, and if $d < r$ than we obtain the effect of junction of two «half» cracks $K_1^ \rightarrow p\sqrt{l}/2$, $K_2^* \rightarrow 0$.*

Стаття надійшла до редколегії 02.09.99