ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 17–21 Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 17–21

УДК 539.3

Михайло Делявський[1], **Віктор Опанасович**[2], **Адам Подхорецкі**[1]

[1]*Академія Технічно-Рільнича ім. Я. і А. Снядецкіх, Бидгощ*
[2]*Львівський національний університет ім. І. Франка*

МІЦНІСТЬ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРІДНОГО МАТЕРІАЛУ ЗІ СТОХАСТИЧНО РОЗПОДІЛЕНИМИ НЕІДЕАЛЬНО ГОСТРИМИ ТРІЩИНАМИ

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку, послаблену криволінійним дефектом з малим, ненульовим радіусом кривини у вершинах. Такі дефекти можна трактувати як неідеально гострі тріщини. Назвемо їх тріщиноподібними дефектами. Введемо декартову систему координат xOy з початком у геометричному центрі дефекту та віссю Ox, проведеною через одну з його вершин z_{0j} $(j = 1, 2)$. Контур дефекту незавантажений, а на безмежності діють постійні взаємноперпендикулярні розтягувальні зусилля p і q. Компоненти вектора переміщень u_x, u_y для такої пластини визначаються в афінній площині $z = \omega(\xi)$ через комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ так [5]:

$$u_x + iu_y = \kappa\,\varphi(\xi) - \omega(\xi)\frac{\overline{\varphi'(\xi)}}{\overline{\omega'(\xi)}} + \varphi(1/\xi) + \frac{\omega(1/\xi)}{\overline{\omega'(\xi)}}\overline{\varphi'(\xi)}, \tag{1}$$

де κ – стала Мусхелішвілі; $\omega(\xi)$ – відображувальна функція. Щоб одержати асимптотичну формулу розподілу напружень в околі j-ї вершини тріщиноподібного дефекту, перейдемо до локальної системи координат $r, \theta^{(j)}$ згідно з

$$z = z_{0j} + z_j\, e^{i\tau_j} = \omega\left[\xi_{0j} + \xi_j\, e^{i\gamma_j}\right], \tag{2}$$

де ξ_{0j} – точки одиничного кола в площині ξ, які відповідають вершинам z_{0j} дефекту в площині z: τ_j – кут між j-вершиною дефекту і віссю Ox. Розкладемо всі функції, що входять у формули (1), (2), в ряди Тейлора в околі точки ξ_{0j}.

$$\varphi(\xi) = \varphi(\xi_{oj}) + \varphi'(\xi_{oj})\xi_j e^{i\gamma_j} + \tfrac{1}{2!}\varphi''(\xi_{oj})\xi_j^2 e^{2i\gamma_j} + \tfrac{1}{3!}\varphi'''(\xi_{oj})\xi_j^3 e^{3i\gamma_j} + \ldots,$$

$$\omega(\xi) = \omega(\xi_{oj}) + \omega'(\xi_{oj})\xi_j\, e^{i\gamma_j} + \tfrac{1}{2!}\omega''(\xi_{oj})\xi_j^2\, e^{2i\gamma_j} + \tfrac{1}{3!}\omega'''(\xi_{oj})\xi_j^3\, e^{3i\gamma_j} + \ldots,$$

$$\omega'(\xi) = \omega'(\xi_{oj}) + \omega''(\xi_{oj})\xi_j\, e^{i\gamma_j} + \tfrac{1}{2!}\omega'''(\xi_{oj})\xi_j^2\, e^{2i\gamma_j} + \ldots,$$

$$\varphi(\xi^{-1}) = \varphi(\xi_{oj}) + \tfrac{1}{2!}\varphi'(\xi_{oj})\left[\bar{\xi}^{-1} - \xi_{0j}\right] + \tfrac{1}{2!}\varphi''(\xi_{oj})\left[\bar{\xi}^{-1} - \xi_{0j}\right]^2 + \ldots \tag{3}$$

Оскільки вершини дефекту заокруглені, то значення першої похідної від відображувальної функції у вершині не дорівнює нулю $\left[\omega'(\xi_{0j}) \neq 0\right]$. Ця умова суттєво відрізняє розглядуваний підхід від відомих підходів класичної механіки руйнування, де виконання умови рівності нулю першої похідної від відображувальної функції є необхідним, оскільки забезпечує наявність на контурі дефекту точок звороту (мікротріщин). Вирази в квадратних дужках у співвідношеннях (4) можна подати у вигляді

$$\frac{1}{\bar{\xi}} - \xi_{0j} = -\frac{\xi_{0j}\bar{\xi}_j e^{-i\gamma_j}}{\bar{\xi}_{0j}}\left[1 - \xi_{0j}\,\bar{\xi}_j\, e^{-i\gamma_j}\right] + \dots;$$

$$\left[\frac{1}{\bar{\xi}} - \xi_{0j}\right]^2 = \frac{\xi_{0j}^2\,\xi_j^2\, e^{-2i\gamma_j}}{\bar{\xi}_{0j}^2}\left[1 - 2\xi_{0j}\,\bar{\xi}_j\, e^{-i\gamma_j}\right] + \dots,\quad \left[\frac{1}{\bar{\xi}} - \xi_{0j}\right]^3 = -\frac{\xi_{0j}^3\,\bar{\xi}_j^{\,3}}{\bar{\xi}_{0j}^3} e^{-3i\gamma_j} + \dots \quad (4)$$

Оскільки розподіл напружень біля кожної вершини дефекту описується у фізичній площині z, то необхідно з'ясувати зв'язок між локальними змінними z_j і ξ_j. Виберемо першу вершину дефекту $(\tau_1 = 0)$. Враховуючи співвідношення (3) одержуємо квадратне рівняння

$$z_1 = z - z_{01} = [\omega(\xi) - \omega(\xi_{01})] = \omega'(\xi_{01})\xi_1 + \omega''(\xi_{01})\xi_1^2/2 + \dots, \quad (5)$$

з розв'язку якого виведемо співвідношення, що зв'язує змінні ξ_1 і z_1

$$\xi_1 = -\frac{\omega'(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})} + \sqrt{\frac{2z_1}{\omega''(\xi_{01})} + \left[\frac{\omega'(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})}\right]^2}\,. \quad (6)$$

Увівши позначення

$$Z_1 = z_1 + \frac{\omega'(\xi_{01})^2}{2\omega''(\xi_{01})}, \quad (7)$$

зобразимо співвідношення (6) у вигляді

$$\xi_1 = -\frac{\omega'(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})} + \sqrt{\frac{2Z_1}{\omega''(\xi_{01})}}\,. \quad (8)$$

Якщо радіус кривини у вершині дефекту $\rho < 10^{-2}l$, то його з точністю до 5% можна визначати так [2]:

$$\rho = \frac{\omega'^2(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})}\,. \quad (9)$$

Тоді співвідношення (7) набуває вигляду $2Z_1 = \rho + 2z_1 = \rho + 2r\exp(i\theta_j)$. Підставляючи розклади (3), (4) у формулу (1) і враховуючи співвідношення (9), знаходимо [4] розподіли складових вектора переміщень в околі вершини розглядуваного дефекту:

$$u_x + iu_y = -\left(K_{\mathrm{I}}^* - iK_{\mathrm{II}}^*\right)\left(-\kappa\sqrt{2Z_1} + \sqrt{2\bar{Z}_1}\right) + \tfrac{1}{2}\left(K_{\mathrm{I}}^* + iK_{\mathrm{II}}^*\right)\left(2Z_1/\sqrt{2\bar{Z}_1} - \sqrt{2Z_1}\right). \quad (10)$$

В узагальнених полярних координатах $r_* = |Z_1|$, $\theta_* = \arg Z_1$ співвідношення (10) збігаються з відомими асимптотичними формулами для тріщини нульової ширини; $K_{\mathrm{I}}^*, K_{\mathrm{II}}^*$ – узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень:

$$K_{\mathrm{I}}^* - iK_{\mathrm{II}}^* = 2\frac{\varphi'(\xi_{01})}{\sqrt{\omega''(\xi_{01})}} - \frac{\omega'(\xi_{01})}{\sqrt{\omega''(\xi_{01})}}\frac{\varphi''(\xi_{01})}{\omega''(\xi_{01})} \quad (11)$$

Складові тензора напружень знаходимо на основі закону Гука:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{4G(1-\mu)}{1-2\mu}\operatorname{Re}\frac{d}{d\bar{z}}(u_x - iu_y); \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = -4G\frac{d}{dz}(u_x - iu_y), \quad (12)$$

де $$\frac{d}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx} - i\frac{d}{dy}\right) \quad (13)$$

У результаті одержуємо

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{-4G(1-\mu)}{1-2\mu}\operatorname{Re}\left\{\frac{K_{\mathrm{I}}^* - iK_{\mathrm{II}}^*}{\sqrt{2\bar{Z}_1}} - \frac{K_{\mathrm{I}}^* + iK_{\mathrm{II}}^*}{\sqrt{2Z_1}}\frac{Z_1}{\bar{Z}_1}\right\} + O(1),$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2G\left[-\kappa\frac{K_{\mathrm{I}}^* - iK_{\mathrm{II}}^*}{\sqrt{2Z_1}} + \left(K_{\mathrm{I}}^* + iK_{\mathrm{II}}^*\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\bar{Z}_1}} - \frac{1}{2\sqrt{2Z_1}}\right)\right] + O(1). \quad (14)$$

Тут G – модуль зсуву; μ – коефіцієнт Пуассона матеріалу. Структура співвідношень (14) не залежить від конфігурації дефекту і величини зовнішнього навантаження. Ці характеристики враховані в узагальнених коефіцієнтах інтенсивності напружень (11).

Розглянемо для прикладу дефект у вигляді тонкого еліптичного надрізу з півосями l, b. Для такого дефекту маємо

$$\varphi(\xi) = R\left(\Gamma\xi + C\xi^{-1}\right); \quad \omega(\xi) = R\left(\Gamma\xi + m\xi^{-1}\right), \quad (15)$$

де $C = -\left(\overline{\Gamma'} + m\Gamma\right)$; $R = (l+b)/2$ – масштабний множник; $m = (l-b)/(l+b)$ – параметр еліптичності; Γ і Γ' – сталі, що визначають напружений стан пластини на безмежності:

$$\Gamma = \frac{(1+\eta)}{4}p, \quad \Gamma' = -\frac{(1-\eta)\exp(-2i\alpha)}{2}p; \quad \eta = q/p. \quad (16)$$

Підставляючи функції (13) у формули (11), при $\xi_{01} = 1$, отримуємо

$$K_{\mathrm{I}}^* - iK_{\mathrm{II}}^* = \sqrt{\frac{R}{2m}}\left[(\Gamma - C) - \frac{1-m}{m}C\right] \quad (17)$$

Звідси, враховуючи значення параметрів R, m, C, знаходимо

$$K_{\mathrm{I}}^* - iK_{\mathrm{II}}^* = \sqrt{a}\left[2\Gamma k - \Gamma' k' e^{-2i\alpha}\right],$$

$$k = \sqrt{\frac{1+\xi}{m}}; \quad k' = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{1+\xi}{m}}; \quad m = \frac{1-\xi}{1+\xi}; \quad \xi = \frac{l}{b}; \quad 0 \le \xi \le 1. \quad (18)$$

Після розділення дійсної та уявної частин одержуємо

$$K_{\mathrm{I}}^* = \frac{p\sqrt{a}}{2}\left[(1+\eta)k - (1-\eta)k'\cos 2\alpha\right]; \quad K_{\mathrm{II}}^* = \frac{p\sqrt{a}}{2}(1-\eta)k'\sin 2\alpha. \quad (19)$$

Із співвідношень (19) бачимо, що узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень K_{I}^*, K_{II}^* можна трактувати як коефіцієнти інтенсивності біля вершини тріщини у пластині під дією деякого приведеного навантаження $\tilde{p}, \tilde{q}$. Справді, ввівши позначення

$$k\Gamma = \tilde{\Gamma} = \frac{(1+\tilde{\eta})}{4}\tilde{p}, \quad k'\Gamma' = \tilde{\Gamma}' = -\frac{(1-\tilde{\eta})\exp(2i\alpha)}{2}, \quad (20)$$

подамо співвідношення (18) у вигляді

$$K_{\mathrm{I}}^{*}=\frac{\tilde{p}\sqrt{a}}{2}\left[(1+\tilde{\eta})-(1-\tilde{\eta})\cos 2\alpha\right];\qquad K_{\mathrm{II}}^{*}=\frac{\tilde{p}\sqrt{a}}{2}(1-\tilde{\eta})\sin 2\alpha, \tag{21}$$

що відповідає випадку тріщини нульової ширини в безмежній пластині під дією зусиль $\tilde{p}, \tilde{q}$ [1]. Ці зусилля визначаємо зі співвідношень (17)

$$\tilde{p}=\frac{1}{2}\left[(1+\eta)k+(1-\eta)k'\right]p;\qquad \tilde{\eta}=\frac{(1+\eta)k-(1-\eta)k'}{(1+\eta)k+(1-\eta)k'}. \tag{22}$$

Отже, маємо аналогію: узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень біля тріщиноподібного дефекту в ізотропній пластині під дією зовнішніх навантажень p і η дорівнюють коефіцієнтам інтенсивності напружень для тріщини тієї ж довжини в пластині під дією навантажень $\tilde{p}, \tilde{q}$. Оскільки коефіцієнти k і k' є монотонно зростаючі функції параметра ξ (для всіх $\xi>0$), то $\tilde{p}$ буде більше p, якщо $\eta<1$, а також при $\eta>1$, якщо $\dfrac{k}{k'}>\dfrac{1-\eta}{1+\eta}$.

Для коефіцієнта інтенсивності напружень K_{I}^{*} біля вершини заокругленого дефекту справджуються протилежні умови: $K_{\mathrm{I}}^{*}>K_{\mathrm{I}}^{cr}$ при $\eta>1$, а також при $\eta<1$ якщо $\dfrac{k}{k'}>\dfrac{(1-\eta)\cos 2\alpha}{1+\eta}$.

Нехай розглядувана пластина містить систему стохастично розподілених тріщиноподібних дефектів.

Виділимо біля вершини дефекту окіл $r<\rho$ і розглянемо розподіл напружень за межами цього околу, тобто в області $r>\rho$. Розподіл напружень у цій області за структурою збігається з відомим розподілом напружень біля вершини тріщини нульової ширини. Приймемо, що в області $0\le r\le\rho$ відбувається локальне руйнування матеріалу, якщо на відстані $r=\rho$ від вершини тріщини виконується умова

$$\sqrt{\rho}\,\sigma_{\beta}(r,\alpha,\beta_{*})\big|_{r=\rho}=\sigma_0, \tag{23}$$

де σ_0 – опір матеріалу локальному руйнуванню; β_* – напрям початкового поширення тріщини. Оскільки розглядаються дефекти з малим радіусом кривини у вершинах ($\rho/l<10^{-2}$), то величинами порядку $\sqrt{\rho}\,O(1)$ у формулі (19) нехтуємо порівняно з першим доданком. Вважаємо, для спрощення, що локальне руйнування відбувається в площині первинної тріщини ($\beta_*=\alpha$). Тоді на підставі співвідношень (18) і критерію (21) одержуємо формулу для знаходження величини критичного навантаження, що спричиняє локальне руйнування матеріалу зі щілиноподібним дефектом:

$$p_{*}=\frac{\sigma_0}{\sqrt{l}\,\Psi(\rho,\alpha)}, \tag{24}$$

де
$$\Psi(\rho,\alpha)=\frac{1}{8\sqrt{2}}\{[(1+\eta)k-(1-\eta)k'\cos 2\alpha](3\cos\alpha/2)+\cos 3\alpha/2)$$
$$-3(1-\eta)k'\sin 2\alpha\,(\sin\alpha/2+\sin 3\alpha/2)\}. \tag{25}$$

Звідси одержуємо значення випадкової довжини l:

$$l = \frac{\sigma_0^2}{p_*^2 \Psi^2(\rho,\alpha)}; \quad l_1 \le l \le l_2. \tag{26}$$

Приймаючи, що випадкова довжина l дефекту і його випадкова орієнтація α є незалежними величинами і використовуючи результати праці [3], отримуємо формулу для визначення ймовірності руйнування пластини з n дефектами:

$$F_n(\eta, p_*) = 1 - \left[1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int_{-l}^{l} \frac{(s-1)a^{s-1}}{(l+a)^s}\,dl\,d\alpha\right]^n, \qquad s > 1,\ a > 0. \tag{27}$$

Середнє значення величини руйнівного навантаження визначається так:

$$\langle p \rangle = p_{\min} + \int_{p_{\min}(\eta)}^{p_{\max}(\eta)} F_n(p,\eta)\,dp. \tag{28}$$

Оцінка ймовірності руйнування пластини зі стохастично розподіленими дефектами на основі одержаної аналогії та результатів монографії [3] свідчить про те, що за умови $(\tilde{p} > p,\ \eta < 1)$ ймовірність руйнування такої пластини є меншою, ніж ймовірність руйнування пластини зі системою тріщин довільної довжини та орієнтації.

---

1. *Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В.В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – К.: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. *Бережницький Л. Т., Качур П. С., Мазурак Л. П.* До теорії концентраторів напружень із заокругленими вершинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1989. – № 5. – С. 28–41.
3. *Витвицкий П. М., Попина С. Ю.* Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. – К.: Наук. думка. – 1980. – 186 с.
4. *Делявский М. В.* О напряженно-деформируемом состоянии пластины, ослабленной сквозным дефектом с малым радиусом кривизны в вершине // Физ. - хим. механика материалов. – 1983. – № 1. – С. 106–108.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

Myhkailo Delyavsky, Victor Opanasovych, Adam Podhorecki

THE STRENGTH OF STUCTURALLY-NONHOMOGENEOUS MATERIAL WITH THE STOCHASTICALLY DISTRIBUTED IMPERFECTLY SHARP CRACKS

The approach to the determination of the asymptotical stresses and displacements fields in an isotropic material with curvilinear hole with small curvature at tips is proposed. The analogy between SIF for cracks and imperfectly sharp defects is developed. Basing on this the calculation of the critical load for material with stochastically distributed defects is performed.

Стаття надійшла до редколегії 16.05.99