ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 26–29 *Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 26–29*

УДК 539.3

Віктор Опанасович

Львівський національний університет ім. І. Франка

ПРО КОМПЛЕКСНІ ПОТЕНЦІАЛИ АНТИПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІЗОТРОПНОГО ТІЛА З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ ПРЯМОЛІНІЙНИХ ТРІЩИН

Дослідимо напружений стан тіла, що перебуває в умовах антиплоскої деформації з періодичною системою колінеарних (випадок а) або паралельних не зсунутих (випадок б) прямолінійних тунельних тріщин завдовжки $2l$. Відстань між тріщинами позначимо через d. Оберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з початком у центрі тріщини, з осями координат Ox і $O\tilde{z}$, що лежать в її площині, причому $O\tilde{z}$ напрямлена по її тунельній осі симетрії. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене до берегів тріщин або ж на них задані переміщення. При цьому відомий головний вектор зусиль, прикладених до берегів тріщини. Припускаємо, що на нескінченності заданий однорідний напружений стан, причому розрізняємо нескінченності при $y \to \pm\infty$ і $x \to \pm\infty$ і маємо різні ситуації залежно від задачі а) чи задачі б).У задачі а) при $y \to \pm\infty$ компоненти тензора напружень $\tau_{y\tilde{z}}^{+\infty}$ $(y \to +\infty)$ і $\tau_{y\tilde{z}}^{-\infty}$ $(y \to -\infty)$ можуть різнитися між собою, якщо головний вектор сил, прикладених до берегів тріщини, не дорівнює нулю, а $\tau_{x\tilde{z}}^{+\infty} = \tau_{x\tilde{z}}^{-\infty} = \tau_{x\tilde{z}}^{\infty}$. У задачі б) все навпаки, $\tau_{x\tilde{z}}^{+\infty}$ і $\tau_{x\tilde{z}}^{-\infty}$ можуть різнитися, а $\tau_{y\tilde{z}}^{+\infty} = \tau_{y\tilde{z}}^{-\infty} = \tau_{y\tilde{z}}^{\infty}$ при $x \to \pm\infty$.

Потрібно знайти напружено-деформований стан тіла.

Введемо в розгляд комплексний потенціал $F(z)$ [1, 3]. Тоді компоненти тензора напружень $\tau_{x\tilde{z}}, \tau_{y\tilde{z}}$ і компоненту вектора переміщення w знайдемо за формулами

$$\tau_{x\tilde{z}} - i\tau_{y\tilde{z}} = F(z), \qquad w(x,y) = \mu^{-1}\operatorname{Re}[f(z)], \tag{1}$$

де $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$, $f'(z) = F(z)$, μ – модуль зсуву.

Зауважимо, що розподіл напружень біля вершини неоднорідності наведено в статті [6] через коефіцієнти інтенсивності напружень: K_3^T для першої і K_3^G для другої основної задачі.

Розглянемо можливі випадки.

1. *Перша основна задача.* У цьому випадку згідно з постановкою задачі маємо такі граничні умови:

$$\tau^{\pm}{}_{y\tilde{z}} = \tau^{\pm}(x), \qquad |x| < l, \tag{2}$$

де $\tau^{\pm}(x)$ – відомі функції; тут і далі «+» і «–» позначені відповідні значення величин при $y \to \pm 0$.

© Опанасович Віктор, 1999

Розглянемо спочатку випадок а).

Враховуючи (1), на основі (2) приходимо до крайових задач для визначення функції $F(x)$:

$$\left[F(x) + \overline{F}(x)\right]^{+} - \left[F(x) + \overline{F}(x)\right]^{-} = -4i\rho(x), \qquad |x| < l,$$
$$\left[F(x) - \overline{F}(x)\right]^{+} + \left[F(x) - \overline{F}(x)\right]^{+} = -4i\tau(x), \qquad |x| < l, \qquad (3)$$

де $\rho(x) = 0.5\,(\tau^{+}(x) - \tau^{-}(x)), \quad \tau(x) = 0.5\,(\tau^{+}(x) + \tau^{-}(x))$.

Використовуючи результати [4] та розв'язуючи задачі лінійного спряження (4), після перетворень одержуємо

$$F(z) = C + \frac{iY(z)}{2X(z)} - \frac{1}{d}\int_{-l}^{l}\rho(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt - \frac{1}{dX(z)}\int_{-l}^{l}X^{+}(t)\,\tau(t)\operatorname{cosec}\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt\,, \qquad (4)$$

де C, A і B − невідомі дійсні сталі,

$$Y(Z) = A\sin\frac{\pi z}{d} + B\cos\frac{\pi z}{d}, \qquad X(z) = \sqrt{\sin^2\frac{\pi z}{d} - \sin^2\frac{\pi l}{d}}\,.$$

Беручи до уваги вираз для функції напружень $F(z)$ (4) та умову однозначності переміщень, знаходимо, що $B = 0$. Крім того, можемо записати

$$\tau_{x\tilde{z}} - i\tau_{y\tilde{z}} \underset{y\to\pm\infty}{=} C + 0.5Ai \mp id^{-1}\int_{-l}^{l}\rho(t)\,dt,$$

звідки отримуємо

$$C = \tau_{x\tilde{z}}^{\infty}, \quad \tau_{y\tilde{z}}^{\pm\infty} = -0.5\,A \pm d^{-1}\int_{-l}^{l}\rho(t)\,dt,$$

тобто, задаючи напруження $\tau_{y\tilde{z}}^{+\infty}$ ($\tau_{y\tilde{z}}^{-\infty}$), знаходимо сталу A. Тоді напруження $\tau_{y\tilde{z}}^{-\infty}$ ($\tau_{y\tilde{z}}^{+\infty}$) довільними бути не можуть, вони визначаються з останнього рівняння.

Маючи вираз для функції $F(z)$, можемо знайти коефіцієнти інтенсивності напружень за формулою

$$K_3^T = -\frac{A}{2}\sqrt{\frac{d}{\pi}\,tg\,\frac{\pi l}{d}} - \sqrt{\frac{2}{\pi d\sin\frac{2\pi l}{d}}}\int_{-l}^{l}\tau(t)\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi(t+l)}{d}}{\sin\frac{\pi(l-t)}{d}}}\,dt. \qquad (5)$$

У часткових випадках із (5) одержуємо відомі результати статті [1] та монографій [2, 3].

Зауважимо, що випадок б) отримаємо з випадку а), якщо зробимо заміну $d \to id$. Комплексний потенціал $F(x)$ набуде вигляду

$$F(z) = C + \frac{i\,A\operatorname{sh}\pi z/d}{2\tilde{X}(z)} - \frac{1}{d}\int_{-l}^{l}\rho(t)\operatorname{cth}\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt - \frac{1}{d\tilde{X}(z)}\int_{-l}^{l}\tilde{X}^{+}(t)\,\tau(t)\operatorname{sh}^{-1}\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt,$$

а коефіцієнт інтенсивності напружень знайдемо за формулою

$$K_3^T = -\frac{A}{2}\sqrt{\frac{d}{\pi}\operatorname{th}\frac{\pi l}{d}} - \sqrt{\frac{2}{\pi d\operatorname{sh}2\pi l/d}}\int_{-l}^{l}\tau(t)\sqrt{\frac{\operatorname{sh}\pi(t+l)/d}{\operatorname{sh}\pi(l-t)/d}}\,dt,$$

$$\tilde{X}(z) = \sqrt{\text{sh}^2 \pi z/d - \text{sh}^2 \pi l/d}\,. \tag{6}$$

У часткових випадках з (6) одержимо відомі в літературі результати [5].

Крім того, при великих x можемо записати

$$\tau_{x\tilde{z}} - i\tau_{y\tilde{z}} \underset{x\to\pm\infty}{=} C + 0.5\,Ai \mp d^{-1}\int_{-l}^{l}\rho(t)\,dt,$$

звідки дістанемо

$$A = -2\tau_{y\tilde{z}}^{\infty}, \qquad \tau_{x\tilde{z}}^{\pm\infty} = C \mp d^{-1}\int_{-l}^{l}\rho(t)\,dt, \tag{7}$$

тобто, задаючи напруження $\tau_{x\tilde{z}}^{+\infty}$ ($\tau_{x\tilde{z}}^{-\infty}$), знаходимо сталу C. Тоді напруження $\tau_{x\tilde{z}}^{-\infty}$ ($\tau_{x\tilde{z}}^{+\infty}$) довільними бути не можуть, вони визначаються з рівності (7).

Зауважимо, що на відміну від випадку а), значення коефіцієнта інтенсивності напружень не залежить від того, чи навантаження на берегах тріщини самозрівноважене чи ні, позаяк від цього, як бачимо з (7), не змінюється значення постійної A, через яку він виражається.

2. *Друга основна задача.* Випадок а). Як і в першій основній задачі, комплексний потенціал $F(x)$ матиме вигляд

$$F(z) = -i\,C + \frac{1}{2id}\int_{-l}^{l}\rho(t)\,\text{ctg}\,\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt + \frac{1}{2idX(z)}\int_{-l}^{l}\frac{X^{+}(t)\,\tau(t)\,dt}{\sin\pi(t-z)/d} + \frac{Y(z)}{2X(z)}, \tag{8}$$

де C, A і B – дійсні сталі; $w^{\pm}$ – відомі переміщення берегів тріщини,

$$\rho(x) = \mu\left(\frac{\partial w^{+}}{\partial x} - \frac{\partial w^{-}}{\partial x}\right), \quad \tau(x) = \mu\left(\frac{\partial w^{+}}{\partial x} + \frac{\partial w^{-}}{\partial x}\right).$$

Вважатимемо, що відомий головний вектор зусиль R, прикладених до берегів тріщини. Тоді $B = R/d$.

На основі (1) та (8) при великих y можемо записати

$$\tau_{x\tilde{z}} - i\tau_{y\tilde{z}} = -i\,C + 0.5\,A \mp 0.5i\,B,$$

звідки одержуємо $A = 2\tau_{x\tilde{z}}^{\infty}$, $\tau_{y\tilde{z}}^{\pm\infty} = C \pm R/2d$, тобто, задаючи напруження $\tau_{y\tilde{z}}^{+\infty}$ ($\tau_{y\tilde{z}}^{-\infty}$), знаходимо сталу C. Тоді напруження $\tau_{y\tilde{z}}^{-\infty}$ ($\tau_{y\tilde{z}}^{+\infty}$) довільними бути не можуть, вони визначаються з останнього рівняння.

Коефіцієнт інтенсивності напружень K_3^G визначаємо за формулою

$$K_3^G = \frac{1}{\sqrt{2\pi/d\,\sin 2\pi l/d}}\left(\frac{1}{d}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{\sin^2\pi l/d - \sin^2\pi t/d}}{\sin\pi(t-l)/d}\,\tau(t)\,dt + Y(l)\right). \tag{9}$$

Випадок паралельних не зсунутих тріщин одержуємо як і в першій основній задачі. Тому з формул (8) і (9) маємо

$$F(z) = -iC + \frac{1}{2id}\int_{-l}^{l}\rho(t)\,\text{cth}\,\frac{\pi(t-z)}{d}\,dt + \frac{1}{2id\tilde{X}(z)}\int_{-l}^{l}\frac{\tilde{X}^{+}(t)\,\tau(t)}{\text{sh}\,\pi(t-z)/d}\,dt + \frac{\tilde{Y}(z)}{2\tilde{X}(z)},$$

$$K_3^G = \frac{1}{\sqrt{2\pi\, d^{-1} \operatorname{sh} 2\pi l/d}} \left(\frac{1}{d} \int_{-l}^{l} \sqrt{\frac{\operatorname{th} \pi l/d + \operatorname{th} \pi t/d}{\operatorname{th} \pi l/d - \operatorname{th} \pi t/d}}\, \tau(t)\, dt + \tilde{Y}(l) \right),$$

$$\tilde{Y}(z) = A \operatorname{sh} \pi z/d + R d^{-1} \operatorname{ch} \pi z/d. \tag{9}$$

На основі формул (1) і (9) знаходимо $\tau_{x\tilde{z}}^{\pm\infty} = A \pm R/d$, $C = 2\tau_{y\tilde{z}}^{\infty}$, де сталу A визначаємо, вважаючи відомими напруження $\tau_{x\tilde{z}}^{+\infty}$ ($\tau_{x\tilde{z}}^{-\infty}$). Тоді напруження $\tau_{x\tilde{z}}^{-\infty}$ ($\tau_{x\tilde{z}}^{+\infty}$) довільними бути не можуть, вони визначаються як і в попередніх випадках.

Маючи систему жорстких включень, доходимо висновку, якщо на нескінченності діють тільки напруження $\tau_{y\tilde{z}}^{\infty}$, то наявність системи жорстких включень не впливає на напружений стан тіла за умови, що $R = 0$.

---

1. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О хрупких трещинах продольного сдвига // Прикладная математика и механика. – 1961. – **25**, № 6. – С. 1110–1119.
2. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
3. *Саврук М. П* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
4. *Опанасович В. К.* Комплексні потенціали періодичної задачі коленіарних тріщин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 49. – С. 130–137.
5. *Механика* разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под ред. В.В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / М.П. Саврук. – 1988. – 620 с.
6. *Опанасович В. К., Драган М. С.* Антиплоска деформація тіла з тонкостінним пружним включенням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1981. – Вип. 17. – С. 69–73.

Victor Opanasovych

ON COMPLEX POTENTIALS OF ANTIPLANE PROBLEMS FOR ISOTROPIC BODY WITH PERIODIC SYSTEM OF RECTILINEAR CRACKS

The first and second main problem for the body staying under the conditions of antiplane deformation with periodic system of collinear and parallel nonshifted tunnel cracks has been investigated. The analytical formulae for complex potential and for stress intensity factors are set. The case of system of rigid inclusions are considered too. In the partial cases the known results are obtained.

Стаття надійшла до редколегії 24.08.99