ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 80–85 *Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 80–85*

УДК 539.3

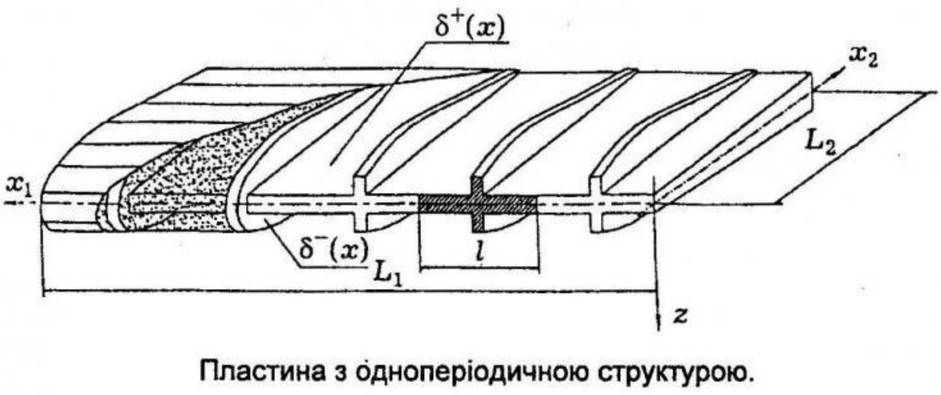
Євгеній Барон

Шльонська політехніка в Глівіцях

ДИНАМІКА ПЛАСТИН З ОДНОВІСНОЮ ПЕРІОДИЧНОЮ СТРУКТУРОЮ

1. Вступ. Пластина з періодичною структурою – це пластина яка складається з низки комірок періодичності, які мають однакову форму (зазвичай прямокутну), розміри та структуру матеріалу і повторюються у серединній площині. Розв'язування задач динаміки, а передусім аналіз коливань та розповсюдження хвиль у пластинах з такою структурою, пов'язане зі значними математичними труднощами, які є наслідком того, що товщина плити, розподіл маси і зміна механічних властивостей, є сильно осцилюючими і назагал розривними функціями. Тому в механіці пластин з періодичною структурою пропонуються спрощені моделі, у яких властивості матеріалу та змінну товщину представляють певні усереднені та сталі за величиною ефективні модулі. Такі моделі, які найчастіше вводять при застосуванні методики асимптотичної гомогенізації, призводять до рівнянь зі сталими коефіцієнтами, які апроксимують рівняння з періодичними, сильно осцилюючими функціональними коефіцієнтами. Однак застосування методики асимптотичної гомогенізації призводить до нехтування масштабним ефектом, або впливом розміру комірки періодичності на макродинамічні властивості пластинки. Оскільки в багатьох інженерних задачах цим впливом знехтувати не можна, запропоновано новий підхід до моделювання задач динаміки в тілах з періодичною структурою, яка враховує масштабний ефект, так звана модель з внутрішніми змінними (internal variable model) [2]. З використанням підходу, який враховує масштабний ефект, до цього часу розглядалися двовимірні моделі пластин зі закладеною періодичністю структури у двох характеристичних напрямах у їхніх площинах.

Ця праця стосується певних не досліджуваних досі задач динаміки, які розв'язуються методом моделювання тіл з внутрішніми змінними для пластин з періодичною структурою тільки в одному напрямі, або так званою одноперіодичною структурою (див. рис.).



Пластина з одноперіодичною структурою.

Загальні рівняння моделі пластин з одноперіодичною структурою були введені у [3]. При цьому не робилося жодних припущень про змінюваність параметрів пластини у другому характеристичному напрямі. Отримані рівняння лінійно-пружної пластини середньої товщини Рейснера – Міндліна не є частковим випадком рівнянь пластини з періодичністю у двох напрямах (порівняти з [1]), що справджується в асимптотично згомогенізованих моделях.

У праці індекси α, β, ... (i, j, ...) набувають значення 1, 2 (1, 2, 3), а індекси a, b, ... та A, B, ... значення 1, 2, ..., n і відповідно 1, 2, ..., N. Застосуємо правило підсумовування Айнштайна. Наявність пари вказівників угорі та внизу означає їхню симетризацію.

2. Вихідні припущення. Нехай $Ox_1x_2x_3$ прямокутна декартова система координат у фізичному просторі. Позначаючи $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ і $z = x_3$, область Ω, яку займає недеформована пластина середньої товщини, запишемо як

$$\Omega := \left\{(\mathbf{x}, z) : \delta^-(\mathbf{x}) < z < \delta^+(\mathbf{x}) \;\; \mathbf{x} \in \Pi\right\},$$

де $\Pi = (-L_1/2,\ L_1/2) \times (-L_2/2,\ L_2/2)$ – прямокутник з розмірами L_1 і L_2 на площині Ox_1x_2; $\delta^-(\mathbf{x}) < 0$ і $\delta^+(\mathbf{x}) > 0$ – функції, які визначають поверхні, що обмежують пластину. Припускаємо, що пластина має періодичну структуру тільки у напрямі осі x_1 з довжиною l. Отже, діапазон періодичності $(-l/2 + x_1,\ l/2 + x_1)$ має свою середину у довільній точці осі x_1. Розмір l є параметром мікроструктури (microstructure length parameter), тобто $l \ll L$, де $L = \min\{L_1, L_2\}$. Також вважається, що величина l значно більша від максимальної товщини пластини, тобто $l \gg \delta$, де $\delta = \max\{\delta^+(\mathbf{x}) - \delta^-(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Pi\}$. У загальному випадку не робилося жодних припущень про змінність параметрів пластини в напрямі осі x_2. Це відповідає зображеній на рисунку ситуації.

Функцію $f(x_1,x_2)$, визначену на серединній площині Π, надалі називатимемо одноперіодичною, якщо для довільного $x_2 \in (-L_2/2, L_2/2)$ виконується умова $f(x_1, x_2) = f(x_1 \pm l, x_2)$. Для одноперіодичної функції її середнє значення на проміжку періодичності $(x_1 - l/2,\ x_1 + l/2)$ визначає оператор

$$\langle f\rangle(x_2) \equiv \frac{1}{l}\int_{x_1-l/2}^{x_1+l/2} f(\xi, x_2)\,d\xi .$$

Ця величина не залежить від x_1.

Нехай u_i, ε_{ij}, σ_{ij} – переміщення, деформації та напруження у тривимірній теорії пластин. Крім того, нехай p^+ і p^- навантаження (уздовж осі z) на обмежуючих поверхнях відповідно $x_3 = \delta^+(\mathbf{x})$, $x_3 = \delta^-(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi$. Також нехай b означає масову силу (уздовж осі z); ρ – густину матеріалу пластини. Позначимо через A_{ijkl} тензор модулів пружності матеріалу пластини. Припускаючи, що площини $z = \mathrm{const}$ є площинами пружної симетрії, позначимо

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} := A_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta33}A_{33\gamma\delta}(A_{3333})^{-1}, \qquad B_{\alpha\beta} := A_{\alpha3\beta3}. \tag{2.1}$$

Вважаємо, що A_{ijkl} і ρ є парними функціями змінної z та одноперіодичними стосовно до змінної x_1 і стосовно до x_2 є довільними регулярними функціями.

Геометричні співвідношення описуються рівняннями Коші

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}, \tag{2.2}$$

залежність між напруженнями та деформаціями має вигляд

$$\sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}, \qquad \sigma_{\alpha 3} = 2B_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta 3}, \qquad \sigma_{33} = 0. \tag{2.3}$$

Вважаємо, що справджується кінематична гіпотеза Рейснера – Міндліна

$$u_\alpha(\mathbf{x}, z, t) = z\vartheta^\circ_\alpha(\mathbf{x}, t), \qquad u_3(\mathbf{x}, z, t) = w^\circ(\mathbf{x}, t), \tag{2.4}$$

де $w^\circ(\mathbf{x}, t)$ – переміщення точок пластини П; $\vartheta^\circ_\alpha(\mathbf{x}, t)$ – незалежні повертання; t – час.

Враховуючи результати опублікованих праць та співвідношення (2.1)–(2.4) будуємо систему різницевих рівнянь для переміщень $\vartheta^\circ_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $w^\circ(\mathbf{x}, t)$ у пластині середньої товщини. Якщо пластина матиме одноперіодичну структуру, то ця система буде системою з сильно осцилюючими функційними коефіцієнтами. Застосовуючи гіпотезу про моделювання тіл з внутрішніми змінними, одержуємо систему рівнянь зі сталими коефіцієнтами з урахуванням масштабного ефекту.

3. Гіпотеза моделювання. Спосіб моделювання тіл з внутрішніми змінними, що дає змогу врахувати масштабний ефект, використовує значення так званої повільно змінюваних функцій (slowly varying functions) та сильно осцилюючих функцій (highly oscillating functions) [2].

Нехай $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\vartheta^\circ_\alpha(\mathbf{x}, t), w^\circ(\mathbf{x}, t))$ – поле переміщень серединної площини пластини. Обмежимося випадком задач, у яких поле переміщень $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (\langle\vartheta^\circ_\alpha\rangle(\mathbf{x}, t), \langle w^\circ\rangle(\mathbf{x}, t))$ є повільно змінюваною функцією аргументу x_1, тобто функцією, яка для будь-якої інтегровної функції $\varphi(\mathbf{x})$ задовольняє залежність

$$\langle\varphi\mathbf{U}\rangle(\mathbf{x}, t) \cong \langle\varphi\rangle(\mathbf{x})\mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x} \in \Pi.$$

Знак $\cong$ означає наближення, яке пов'язане з обчисленням чисельного усереднення.

Для пластини з одноперіодичною структурою різниці між складовими векторів переміщень $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) - \mathbf{U}(\mathbf{x},t)$ є сильно осцилюючими функціями аргументу x_1. Середні значення цих різниць $\langle\mathbf{u} - \mathbf{U}\rangle(\mathbf{x}, t)$ апроксимуємо за допомогою виразу $\langle h^A\mathbf{Q}_A\rangle(\mathbf{x}, t)$, де $h^A(x_1)$ – сильно осцилюючі відомі одноперіодичні функції, так звані функції форми (mode shape function); складові полів $\mathbf{Q}_A(\mathbf{x}, t)$ є невідомі повільнозмінювані функції аргументу x_1, так звані коректори (correctors). Для сильно осцилюючої функції $h(x_1)$, повільнозмінюваної функції $\mathbf{U}(\mathbf{x},t)$, а також довільної інтегровної функції $\varphi(\mathbf{x})$ маємо залежність

$$\langle \varphi (h\mathbf{U})_{,1} \rangle (\mathbf{x},t) \cong \langle \varphi h_{,1} \rangle (\mathbf{x}) \mathbf{U}(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{x} \in \Pi .$$

Враховуючи поданий спосіб моделювання, отримуємо, що для пластини з одноперіодичною структурою переміщення $u_i(\mathbf{x},z,t)$ будь-якої точки недеформованої пластини з середньою товщиною визначені за допомогою виразів (2.4), у яких вважається, що

$$\vartheta_\alpha^o = \vartheta_\alpha(\mathbf{x},t) + h^a(x_1)\Theta_\alpha^a(\mathbf{x},t), \qquad w^o = w(\mathbf{x},t) + g^A(x_1)W^A(\mathbf{x},t), \tag{3.1}$$

де фігурують повільнозмінювані стосовно x_1 функції $\vartheta_\alpha(\cdot)$; $w(\cdot)$ (макропереміщення – grossdisplacements) та $\Theta_\alpha^a(\cdot)$; $W^A(\cdot)$ (коректори – correctors) визначальні функції запропонованої двовимірної моделі пластини; функції $h^a(x_1)$, $g^A(x_1)$ – відповідно підібрані функції форми (mode-shape functions).

Як можна зауважити, у методиці моделювання тіл зі змінними внутрішніми величинами важливе значення мають функції форми $h^a(x_1)$, $g^A(x_1)$. Ці функції є розв'язком певної задачі на власні значення за періодичних граничних умов [2] і для них виконуються залежності

$$\langle h^a \int_{\delta^-}^{\delta^+} z^2 \rho \, dz \rangle = 0 \qquad \text{та} \qquad \langle g^A \int_{\delta^-}^{\delta^+} \rho \, dz \rangle = 0 .$$

Величини функцій форми мають порядок параметра мікроструктури $h^a(x_1)$, $g^A(x_1) \in O(l)$; їхні похідні від цього параметра вже не залежать.

Під час побудови моделі у рівнянні принципу віртуальної роботи враховано залежності (2.1)–(2.4) разом з (3.1). Одержані співвідношення усереднено, використовуючи властивості повільнозмінюваних функцій, а також одноперіодичних за аргументом x_1. Після нескладних формальних перетворень отримано вигляд різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами для невідомих функцій, які входять у співвідношення (3.1).

4. Основні рівняння. Вводячи позначення

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} := \int_{\delta^-}^{\delta^+} z^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} \, dz, \qquad D_{\alpha\beta} := \int_{\delta^-}^{\delta^+} B_{\alpha\beta} \, dz ,$$

$$p := p^+ + p^- + b\langle \mu \rangle, \qquad \bar{h}^a := l^{-1} h^a, \qquad \bar{g}^A := l^{-1} g^A .$$

систему рівнянь двовимірної теорії лінійно-пружних тіл середньої товщини з одноперіодичною структурою та врахуванням масштабного ефекту можна подати у вигляді рівнянь руху

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha = 0 , \qquad Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{w} + p = 0 , \tag{4.1}$$

динамічних рівнянь еволюції

$$l^2 \langle J \bar{h}^a \bar{h}^b \rangle \ddot{\Theta}_\alpha^b + M_{1\alpha}^a - l M_{2\alpha,2}^a = 0 ,$$

$$l^2 \langle \mu \bar{g}^A \bar{g}^B \rangle \ddot{W}^B + Q_1^A - l Q_{2,2}^A - l \langle \bar{g}^A (p^+ + p^-) \rangle = 0 , \tag{4.2}$$

з урахуванням визначальних рівнянь

$$M_{\alpha\beta} = \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta}\rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)} + \langle h^a_{,1} G_{\alpha\beta 1\delta}\rangle, \Theta^a_\delta + \langle h^a G_{\alpha\beta 2\delta}\rangle \Theta^a_{\delta,2} \ ,$$

$$Q_\alpha = \langle D_{\alpha\beta}\rangle(\vartheta_\beta + w_{,\beta}) + l\langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta}\rangle, \ \ \Theta^a_\beta + \langle g^A_{,1} D_{\alpha 1}\rangle W^A + l\langle \bar{g}^A D_{\alpha 2}\rangle W^A_{,2} \ , \tag{4.3}$$

та позначень

$$M^a_{1\alpha} = \langle h^a_{,1} h^b_{,1} G_{\alpha 11\delta}\rangle \Theta^b_\delta + \langle h^a_{,1} G_{\alpha 1\gamma\delta}\rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)} + l\langle h^a_{,1} \bar{h}^b G_{\alpha 12\delta}\rangle \Theta^b_{\delta,2} +$$

$$+ l^2 \langle \bar{h}^a \bar{h}^b D_{\alpha\beta}\rangle \Theta^b_\beta + l\langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta}\rangle(\vartheta_\beta + w_{,\beta}) +$$

$$+ l\langle \bar{h}^a g^A_{,1} D_{\alpha 1}\rangle W^A + l^2 \langle \bar{h}^a \bar{g}^A D_{\alpha 2}\rangle W^A_{,2} \ ,$$

$$M^a_{2\alpha} = \langle \bar{h}^a h^b_{,1} G_{\alpha 21\delta}\rangle \Theta^b_\delta + \langle \bar{h}^a G_{\alpha 2\gamma\delta}\rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)} + l\langle \bar{h}^a \bar{h}^b G_{\alpha 22\delta}\rangle \Theta^b_{\delta,2} \ ,$$

$$Q^A_1 = \langle g^A_{,1} g^B_{,1} D_{11}\rangle W^B + \langle g^A_{,1} D_{1\beta}\rangle(\vartheta_\beta + w_{,\beta}) +$$

$$+ \ l\langle g^A_{,1} \bar{h}^a D_{1\beta}\rangle \Theta^a_\beta + l\langle g^A_{,1} \bar{g}^B D_{12}\rangle W^B_{,2} \ ,$$

$$Q^A_2 = \langle \bar{g}^A g^B_{,1} D_{21}\rangle W^B + \langle \bar{g}^A D_{2\beta}\rangle(\vartheta_\beta + w_{,\beta}) +$$

$$+ l\langle \bar{g}^A \bar{h}^a D_{2\beta}\rangle \Theta^a_\beta + l\langle \bar{g}^A \bar{g}^B D_{22}\rangle W^B_{,2} \ . \tag{4.4}$$

Рівняння (4.1)–(4.4) є системою рівнянь щодо невідомих макропереміщень та коректорів ϑ_α, w, Θ^a_α, W^A. Ці рівняння не можна отримати як частковий випадок наведених у [1] рівнянь стосовно пластини з періодичністю у двох напрямах. У [1] рівняння для коректорів є звичайними різницевими рівняннями. Для пластини з одноперіодичною структурою вони є рівняннями у частинних похідних, причому у них входять частинні похідні від коректорів за змінною x_2. Одночасно формуються додаткові крайові умови для коректорів на берегах $x_2 = \pm L_2 / 2$ (порівняти з [3]).

5. Висновки. У статті запропоновано нову усереднену двовимірну модель прямокутної пластини середньої товщини з одноперіодичною структурою (тобто періодичною в одному напрямі). Ця модель враховує масштабний ефект, тобто вплив величини мікроструктури на макродинамічні властивості пластини. Пластини з такою структурою аналізувалися до цього часу, наприклад, з використанням методу асимптотичної гомогенізації, який цим ефектом нехтує. Показано, що при застосуванні запропонованого методу, який враховує масштабний ефект, пластину з одноперіодичною структурою не можна трактувати як частковий випадок пластини з двоперіодичною структурою, як це можна робити в асимптотично згомогенізованій моделі. Одержані у праці рівняння моделі відрізняються якісно – вони складніші (зроблено слабші припущення). На відміну від рівняннь для пластини з подвійною періодичністю, рівняння щодо коригуючих функцій, які є додатковими кінематичними невідомими, є рівняннями у частинних похідних, тоді коли для пластини з подвійною періодичністю це є звичайні диференціальні рівняння.

З'ясовано, що при закладанні однорідності й сталої товщини пластини та при однорідних початкових умовах динамічні рівняння еволюції (4.2) виконуються тотожно, а рівняння (4.1) та (4.3) дають класичні рівняння руху пластини Рейснера – Міндліна. Аналогічна ситуація спостерігається у випадку моделі пластини з періодичністю у двох напрямах з урахуванням масштабного ефекту, описаної у [1].

У запропонованому способі моделювання з урахуванням масштабного ефекту розв'язок залежить від вибору так званих функцій форми. За означенням ці функції дають вигляд власних коливань окремої комірки періодичності. Тому вони не є довільними, а випливають з попередньо розв'язаної задачі на власні значення при періодичних граничних умовах (порівняти [2]).

Пластини з одноперіодичною структурою мають велике практичне застосування, особливо у будівельних конструкціях. Вже навіть частковий випадок (задача для смуги плит) запропонованої у роботі моделі, може бути використаний для динамічних обчислень періодично оребрених стальних та залізобетонних плит, у яких ребра смуги плит є несучими елементами, які розміщені перпендикулярно до опор. Це істотно розширює діапазон динамічного аналізу плит середньої товщини з періодичною структурою порівняно з запропонованій у праці [1] моделлю.

---

1. *Baron E., Woźniak Cz.* On the microdynamics of composite plates // Arch. Appl. Mech. – 1995. – **66**. – P. 126–133.
2. *Woźniak Cz.* Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure // Arch. Mech. – 1977. – **49**. – P. 421–441.
3. *Baron E.* Dynamic behaviour of plates with a uniperiodic structure (в друці).

Yevheniy Baron

THE DYNAMICS OF PLATES WITH UNIAXIAL PERIODICAL STRUCTURE

The new two-paramertuical model of an elastic rectangular plate with uniaxial periodical structure is proposed. This model is applicable to plates with variable width (according to Raisner-Midlin hipotesis) and takes into account the scoring effect on macrodynamic characteristics of plates. This effect is usually neglected at known asymptotical homogenized models of periodical plates.

Стаття надійшла до редколегії 23.09.99