ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 96–99 Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 96–99

УДК 539.3

**Михайло Делявський, В'єслав Наґурко, Максим Кравчук**

*Академія Технічно-Рільнича ім. Я. і А. Снядецкіх, Бидгощ*
*Головна школа сільського господарства у Варшава*
*Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України*

# МЕТОД РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ БАЛОК

Розглянемо шарувату прямокутну балку, складену з ортотропних шарів і віднесемо її до декартової системи координат $x_1Ox_3$ з початком у геометричному центрі середнього шару. Поле переміщень у $k$-му шарі такої балки $\mathbf{u}^{(\mathbf{k})} = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}\}$ описується функціями [1]

$$u_1^{(k)} = u_1(\tilde{x}_1, 0, \tilde{x}_3), \quad u_3^{(k)} = u_3(\breve{x}_1, 0, \breve{x}_3), \quad u_2^{(k)} = 0\,, \tag{1}$$

які вибираємо у вигляді

$$u_1^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{1(m)}^{[1](k)}(x_1)\, \tilde{T}_m^{*\,[3]}\left(x_3^{(k)}\right) + f_{1(m)}^{[3](k)}\left(x_3^{(k)}\right) \tilde{T}_m^{*\,[1]}(x_1) \right\},$$

$$u_3^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{3(m)}^{[1](k)}(x_1)\, \breve{T}_m^{*\,[3]}\left(x_3^{(k)}\right) + f_{3(m)}^{[3](k)}\left(x_3^{(k)}\right) \breve{T}_m^{*\,[1]}(x_1) \right\}, \tag{2}$$

враховуючи умови симетрії задачі, де символом $T_m^{*[j]}(x_j)$ позначено функції

$$\breve{T}_m^{*\,[j]}(x_j) = \cos \delta_m^{*\,[j]} x_j, \quad \tilde{T}_m^{*\,[j]}(x_j) = \sin \delta_m^{*\,[j]} x_j\,. \tag{3}$$

Символ «~» означає, що складові вектора переміщень є антисиметричними стосовно змінних $x_1$ і $x_3$, а символ «◡» належить до симетричних складових вектора переміщень. Для симетричного навантаження поле переміщень набуває вигляду

$$u_1^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{1(m)}^{[1](k)}(x_1) \sin\left(\delta_m^{*\,[3]} x_3^{(k)}\right) + f_{1(m)}^{[3](k)}\left(x_3^{(k)}\right) \sin\left(\delta_m^{*\,[1]} x_1\right) \right\},$$

$$u_3^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ f_{3(m)}^{[1](k)}(x_1) \cos\left(\delta_m^{*\,[3]} x_3^{(k)}\right) + f_{3(m)}^{[3](k)}\left(x_3^{(k)}\right) \cos\left(\delta_m^{*\,[1]} x_1\right) \right\}, \tag{4}$$

де $f_{i(m)}^{[j]}(x_j)$ невідомі функції; $\delta_m^{*[j](k)} = (2m-1)\pi/2a_j^{(k)}$, $i, j = 1, 3$. Задачу розв'язуємо окремо для кожного шару $k$, а відтак зшиваємо окремі розв'язки шляхом задоволення умов спаю на поверхнях поділу шарів. Тому надалі індекс «$k$» пропускаємо. Використовуючи геометричні співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i}\right]; \qquad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} \quad (i \neq j)\,, \tag{5}$$

фізичні співвідношення закону Гука [3]:

$$\sigma_{ij} = b_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \tag{6}$$

та рівняння рівноваги

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0, \qquad \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} = 0, \tag{7}$$

для шару з номером $k$ приходимо до системи двох диференціальних рівнянь у частинних похідних, які є рівняннями рівноваги (у переміщеннях) розглядуваного шару.

$$b_{11}\, u_{1,11} + (b_{13} + b_{55})\, u_{3,13} + b_{55}\, u_{1,33} = 0,$$

$$b_{33}\, u_{3,33} + (b_{13} + b_{55})\, u_{1,13} + b_{55}\, u_{3,11} = 0. \tag{8}$$

Підставляючи в ці рівняння представлення (4) для складових вектора переміщень і розділяючи змінні, дістанемо систему звичайних диференціальних рівнянь стосовно невідомих функцій $f_{p(m)}^{[j]}(x_j)$:

$$\sum_{r=1}^{3} \left\{ \underset{kr}{A}{}_{(m)}^{[j]}\, f_{1(m)}^{[j]\,(3-r)}(x_j) + \underset{kr}{C}{}_{(m)}^{[j]}\, f_{3(m)}^{[j]\,(3-r)}(x_j) \right\} = 0. \tag{9}$$

Коефіцієнти $\underset{kr}{A}{}_{(m)}^{[j]}$, $\underset{kr}{C}{}_{(m)}^{[j]}$ визначаються так:

$$\underset{11}{A}{}_{(m)}^{[1]} = b_{11},\ \underset{13}{A}{}_{(m)}^{[1]} = -b_{55}\delta_m^{*[3]^2},\ \underset{11}{C}{}_{(m)}^{[1]} = 0,\ \underset{13}{C}{}_{(m)}^{[1]} = 0,\ \underset{13}{A}{}_{(m)}^{[1]} = 0;$$

$$\underset{23}{C}{}_{(m)}^{[1]} = -b_{33}\,\delta_m^{*[3]^2};\quad \underset{21}{C}{}_{(m)}^{[1]} = \underset{11}{A}{}_{(m)}^{[3]};\quad \underset{13}{A}{}_{(m)}^{[3]} = -b_{11}\,\delta_m^{*[1]^2};$$

$$\underset{11}{C}{}_{(m)}^{[3]} = 0,\quad \underset{13}{C}{}_{(m)}^{[1]} = -(b_{13} + b_{55})\,\delta_m^{*[1]^2};\quad \underset{13}{C}{}_{(m)}^{[3]} = 0. \tag{10}$$

Розв'язки системи диференціальних рівнянь (9) вибираємо у вигляді

$$f_{p(m)}^{[j]} = R_{p(m)}^{[j]} \exp\left[\lambda_{(m)}^{*[j]} x_j\right], \tag{11}$$

де $R_{p(m)}^{[j]}$ і $\lambda_{(m)}^{*[j]}$ – невідомі комплексні параметри:

$$R_{p(m)}^{[j]} = C_{p(m)}^{[j]} + iS_{p(m)}^{[j]}, \qquad \lambda_{(m)}^{*[j]} = \alpha_{(m)}^{*[j]} + i\beta_{(m)}^{*[j]}. \tag{12}$$

Підставляючи розв'язки (11), в рівняння (9) приходимо до однорідної системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно невідомих коефіцієнтів $R_{p(m)}^{[j]}$. З рівності нулю їх визначників одержуємо характеристичні рівняння на параметри $\lambda_{(m)}^{*[j]}$:

$$\sum_{r=1}^{3} \underset{1r}{A}{}_{(m)}^{[j]}\, \lambda_{(m)}^{*[j]\,3-r} \sum_{s=1}^{3} \underset{2s}{C}{}_{(m)}^{[j]}\, \lambda_{(m)}^{*[j]\,3-r} - \sum_{r=1}^{3} \underset{2r}{A}{}_{(m)}^{[j]}\, \lambda_{(m)}^{*[j]\,3-r} \sum_{s=1}^{3} \underset{1s}{C}{}_{(m)}^{[j]}\, \lambda_{(m)}^{*[j]\,3-r} = 0. \tag{13}$$

Кожне з цих рівнянь є рівнянням четвертого порядку з дійсними коефіцієнтами і містить тільки парні степені параметрів $\lambda_{(m)}^{*[j]}$. Тому воно має чотири дійсні попарно рівні корені. У результаті загальний розв'язок системи (9) набуває вигляду [2]

$$f_{p(m)}^{[j]}(x_j) = \sum_{\nu=1}^{4} \underset{\nu}{R}{}_{p(m)}^{[j]} \exp\left[\lambda_{\nu(m)}^{*[j]} x_j\right]. \tag{14}$$

Коефіцієнти $R_{3(m)}^{[j]}$ і $R_{1(m)}^{[j]}$ лінійно залежні $\left(\underset{\nu}{R}{}_{3(m)}^{[j]} = \underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[j]} K_\nu^{[j]}\right)$, де

$$K_\nu^{[1]} = \frac{b_{1111}\gamma_\nu^{[1]^2} - b_{55}}{(b_{1133} + b_{55})\gamma_\nu^{[1]}}, \quad K_\nu^{[3]} = \frac{b_{1313}\gamma_\nu^{[3]^2} - b_{1111}}{(b_{1133} + b_{1313})\gamma_\nu^{[1]}}, \text{ де } \gamma_\nu^{[j]} = \lambda_{\nu(m)}^{*[j]} / \delta_m^{*[j]}. \tag{15}$$

У результаті одержуємо загальні вирази для переміщень

$$u_1 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{\underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[1]}\left[E_{\nu(m)}^{[1]}(\xi_1)\sin\delta_m^{[3]}\xi_3\right] + \underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[3]}\left[E_{\nu(m)}^{[3]}(\xi_3)\sin\delta_m^{[1]}\xi_1\right]\right\}.$$

$$u_3 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{\underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[1]}\left[K_\nu^{[1]}E_{\nu(m)}^{[1]}(\xi_1)\cos\delta_m^{[3]}\xi_3\right] + \underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[3]}\left[K_\nu^{[3]}E_{\nu(m)}^{[3]}(\xi_3)\cos\delta_m^{[1]}\xi_1\right]\right\} \tag{16}$$

і для напружень:

$$\sigma_{11} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{\underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[1]}\delta_m^{*[3]}\left(b_{1111}\gamma^{[1]} - b_{1133}K_\nu^{[1]}\right)E_{\nu(m)}^{[1]}(\xi_1)\sin\delta_m^{[3]}\xi_3 + \right.$$

$$\left. + \underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[3]}\,\delta_m^{*[1]}\left(b_{1111} + b_{1133}K_\nu^{[3]}\gamma^{[3]}\right)E_{\nu(m)}^{[3]}(\xi_3)\cos\delta_m^{[1]}\xi_1\right\},$$

$$\sigma_{33} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{\underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[1]}\,\delta_m^{*[3]}\left(b_{1133}\gamma^{[1]} - b_{3333}K_\nu^{[1]}\right)E_{\nu(m)}^{[1]}(\xi_1)\sin\delta_m^{[3]}\xi_3 + \right.$$

$$\left. + \underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[3]}\,\delta_m^{*[1]}\left(b_{1133} + b_{3333}K_\nu^{[3]}\,\gamma^{[3]}\right)E_{\nu(m)}^{[3]}(\xi_3)\cos\delta_m^{[1]}\xi_1\right\},$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}b_{1313}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{\underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[1]}\delta_m^{*[3]}\left(1 + K_\nu^{[1]}\gamma^{[1]}\right)E_{\nu(m)}^{[1]}(\xi_1)\cos\delta_m^{[3]}\xi_3 + \right.$$

$$\left. + \underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[3]}\,\delta_m^{*[1]}\left(\gamma^{[3]} - K_\nu^{[3]}\right)E_{\nu(m)}^{[3]}(\xi_3)\sin\delta_m^{[1]}\xi_1\right\}, \tag{17}$$

де $\xi_1 = \dfrac{x_1}{a_1}$, $\xi_3 = \dfrac{x_3}{a_3}$, $E_{\nu(m)}^{[j]}(\xi_j) = \exp\left[\lambda_{\nu(m)}^{[j]}\xi_j\right]$; $\lambda_{\nu(m)}^{[j]} = \gamma_\nu^{[j]}\delta_m a_j / a_{3-j}$.

Як приклад розглянемо поперечний згин тришарової вільно опертої балки. На краях $\xi_1 = \pm 1$ повинні задовольнятись умови: $u_3\big|_{\xi_1=1} = 0$, $\sigma_{11}\big|_{\xi_1=1} = 0$. Виконання цих умов призводить до рівності нулю коефіцієнтів $\underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[1]} = 0$. Наведемо кінцеві формули:

$$u_1^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{R_{1(m)}^{[3]}\left[\exp\lambda_{\nu(m)}^{[3]}(\xi_3)\sin\delta_m^{[1]}\xi_1\right]\right\},$$

$$u_3^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{R_{1(m)}^{[3]}K_\nu^{[3]}\left[\exp\lambda_{\nu(m)}^{*[3]}(\xi_3)\cos\delta_m^{[1]}\xi_1\right]\right\}; \tag{18}$$

$$\sigma_{11}^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{R_{1(m)}^{[3]^{(i)}}\delta_m^{*[1]}\underset{\nu}{C}{}_{11}^{(i)}\exp\lambda_{\nu(m)}^{[3]^{(i)}}(\xi_3)\cos\delta_m^{[1]}\xi_1\right\},$$

$$\sigma_{33}^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{R_{1(m)}^{[3]^{(i)}}\delta_m^{*[1]}\underset{\nu}{C}{}_{33}^{(i)}\exp\lambda_{\nu(m)}^{[3]^{(i)}}(\xi_3)\cos\delta_m^{[1]}\xi_1\right\}; \tag{19}$$

$$\sigma_{13}^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{4}\left\{R_{1(m)}^{[3]^{(i)}}\delta_m^{*[1]}\underset{\nu}{S}{}_{11}^{(i)}\exp\lambda_{\nu(m)}^{[3]^{(i)}}(\xi_3)\sin\delta_m^{[1]}\xi_1\right\}.$$

Тут уведені позначення:

$$\underset{\nu}{C}{}_{11}^{(i)} = b_{1111}^{[3]^{(i)}} + b_{1133}^{[3]^{(i)}}K_\nu^{[3]^{(i)}}\gamma^{[3]^{(i)}}; \quad \underset{\nu}{C}{}_{33}^{(i)} = b_{3311}^{[3]^{(i)}} + b_{3333}^{[3]^{(i)}}K_\nu^{[3]^{(i)}}\gamma^{[3]^{(i)}};$$

$$\underset{\nu}{S}{}_{13}^{(i)} = b_{1313}^{[3]^{(i)}}\left(\gamma^{[3]^{(i)}} - K_\nu^{[3]^{(i)}}\right); \tag{20}$$

$i$ – номер шару. Невідомі коефіцієнти $\underset{\nu}{R}{}_{1(m)}^{[3]}$ визначаються з граничних умов та умов спаю.

---


1. *Делявский М. В.* Анализ напряженно-деформированного состояния ортотропных плит под действием изгибающей нагрузки// Пробл. прочности. – 1995. – № 11-12. – С.45–53.
2. *Delyavskyy M., Podhorecki A., Nagorko W.* O pewnej metodzie wyznaczania odkształceń i naprężeń w prostokątnych belkach ortotropowych // XXXVIII Sympozjum PTMTiS Modelowanie w Mechanice, Politechnika Śląska, Gliwice. – 1999. – No. 9. – S. 51–56.
3. *Lehnitski S.G.* Anizotropnye płastinki. – Moskva: GITL, 1957. – 464 c.


**Mykhailo Delyavsky, Wiesław Nagórko, Maksym Kravchuk**

**THE METHOD OF STRESS-STRAIN STATE CALCULATION OF THE MULTILAYERED ORTHOTROPIC BEAMS**

*The methodology of calculation of stress-strain state of multilayered orthotropic beams that are differently loaded is developed. The problem is solved separately for every layer. The unknown parameters of the problem will be determined from the boundary conditions and conditions of perfect mechanical contact on the common surfaces of the layers.*

Стаття надійшла до редколегії 15.06.99