ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 100–105 *Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 100–105*

УДК 539.3

В'єслав Наґурко, Ярослав Зелінські

Головна школа сільского господарства у Варшаві

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПЛАСТИНАХ, УТВОРЕНИХ ПЕРІОДИЧНО НЕОДНОРІДНИМИ ШАРАМИ

1. Вступ. Розглядатимемо пластину, яка займає у тривимірному просторі область Ω, і яку в прямокутній системі координат можна писати виразом $\Omega = \Pi \times (-h, h)$, $\Pi \subset R^2$, $(-h,\ h) \subset R$. Координати точок області Ω позначимо через $(x_1,\ x_2,\ y)$, а області Π – відповідно через (x_α), $\alpha = 1,\ 2$. Нехай переміщеннями точок пластини будуть величини $v = (v_k)$, де $v_k : \Omega \to R$, $k = 1,\ 2,\ 3$ – регулярні функції. Простір векторних функцій v позначимо через V.

Припустимо, що пластина складається з шарів Ω^c, $c = 1,\ 2,\ \ldots\ c_0 \geq 1$ таких, що $\Omega^c = \Pi \times (y_{c-1},\ y_c)$ і $-h = y_0 < y_1\ \ldots < y_{c_0} = h$ (рис. 1). Кожний шар Ω^c є періодично неоднорідним, причому у ньому можна виділити елемент періодичності $\Delta^c \times (y_{c-1},\ y_c)$ такий, що $\Delta^c \subset \Pi$ є прямокутником з паралельними до осей x_1, x_2 сторонами l_1^c, l_2^c.

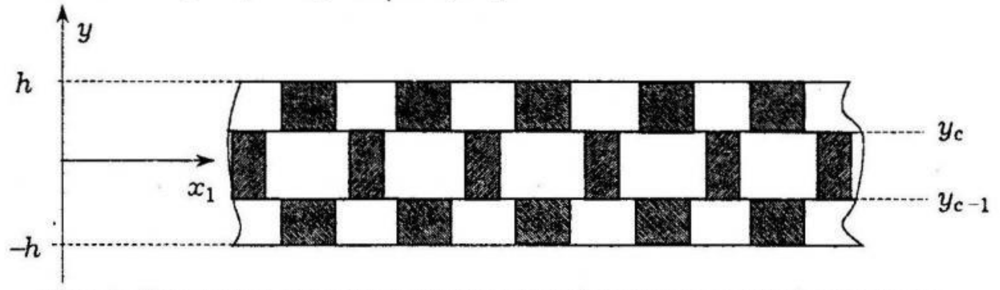

Рис. 1. Пластина, яка складається з періодично неоднорідних шарів.

Густину пластини позначимо через $\rho = \rho(x_1,\ x_2,\ y)$. Ця функція теж періодична стосовно Δ^c. Вважаємо також, що $\rho(x_1,\ x_2,\ y)\big|_{y \in (y_{c-1},\ y_c)} = \rho(x_1,\ x_2)$, тобто густина не змінюється уздовж товщини шару Ω^c.

Отже,

$$\rho(x_1,\ x_2,\ y) \equiv \rho^c(x_1,\ x_2) = \rho^c(x_1 + l_1^c,\ x_2 + l_2^c) \tag{1.1}$$

для всіх $(x_1,\ x_2) \in \Pi$ таких, що $(x_1 + l_1^c,\ x_2 + l_2^c) \in \Pi$ при $y \in (y_{c-1},\ y_c)$.

Запишемо рівняння термопружності для розглянутих пластин

$$(\forall v \in V) \int_\Omega \left(\sigma_{kl}\varepsilon_{kl} - b_k v_k + \rho \ddot{u}_k v_k\right) dv = \int_{\partial_1 \Omega} p_k v_k da\ ,$$

$$(\forall\Omega_0 \subset \Omega) \int_{\Omega_0} g dv + \int_{\partial\Omega_0} h_i n_i da = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} \rho c_p \theta dv, \qquad (1.2)$$

де напруження, деформації та потоки тепла мають вигляд

$$\sigma_{kl} = B_{klmn}\varepsilon_{mn} - \lambda_{kl}\theta, \qquad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \qquad h_k = K_{kl} \quad \theta_{,l}; \qquad (1.3)$$

θ – температура тіла; (b_k) – масові сили; (p_k) – поверхневі навантаження; g – тепло, яке утворюється всередині тіла; (n_i) – компоненти одиничного вектора, нормального до поверхні довільної підобласті Ω_0; (c_p) – теплоємність.

Величини B_{klmn} характеризують пружні властивості пластини, λ_{kl} – механічні і термічні властивості пластини, K_{kl} – її теплопровідність. Вони є тензорами відповідно четвертого і другого порядку. Скалярні функції B_{klmn}, λ_{kl}, $K_{kl} : \Omega \to R$, $k, l, m, n = 1, 2, 3$ є періодичними функціями стосовно Δ^c (аналогічно до (1.1)). Також припустимо, що в Ω^c вони не залежать від y. З залежностей (1.2) та (1.3) видно, що переміщення та температура у пластині перебувають незалежно. Тому для початку подамо спрощену модель опису переміщень, вважаючи, що поле температури $\theta(x_1, x_2, y, t)$ є відомим.

2. Двовимірна модель для переміщень. У кожному шарі Ω^c переміщення $v_k = v_k(x_1, x_2, y, t)$ в інтервалі $y \in (y_{c-1}, y_c)$ апроксимуватимемо так:

$$v_k(x_1, x_2, y, t)\big|_{y\in(y_{c-1}, y_c)} = v_k^{c-1}(x_1, x_2, t)\xi^{c-1}(y) + v_k^c(x_1, x_2, t)\xi^c(y), \quad c = 1, \ \dots \ , c_0,$$

де $v_k^a(x_1, x_2, t) \equiv v_k(x_1, x_2, y_a, t)$, $a = 0, 1, \dots, c_0$ – шукані переміщення поверхонь поділу шарів. Простір функцій $(v_k^0, \quad v_k^1, \dots, v_k^{c_0})$ позначимо через T. Функції $\xi^a(y)$ відомі. Припустимо, що вони неперервні та отримані обтинанням функції $\Xi_a(y)$ на інтервалі $(-h, h)$. Функції $\Xi_a(y)$ визначені для $y \in R$ так, що $\Xi_a(y) = 0$ для $y \le y_{a-1}$ або $y \ge y_{a+1}$, $\Xi_a(y_a) = 1$, $a = 0, 1, \dots, c_0$ та $y_{-1} = -h - 1$, $y_{c_0+1} = h + 1$ (рис. 2).

Звідси випливає, що переміщення у пластині можна подати у вигляді

$$v_k(x_1, x_2, y, t) = v_k^a(x_1, x_2, t)\xi^a(y). \qquad (2.1)$$

Такий поділ пластини можна вважати її дискретизацією на елементи, якими є шари Ω^c. Тоді функції ξ^a відіграють роль функцій форми.

Підставляючи (2.1) у $(1.3)_{1\text{-}2}$, а потім у $(1.2)_1$ та інтегруючи послідовно по інтервалах (y_{c-1}, y_c) $c = 1, 2, \dots, c_0$, одержуємо співвідношення щодо невідомих переміщень поверхонь поділу шарів. Оскільки вони залежать тільки від змінних в області Π, то запропонований опис є двовимірний.

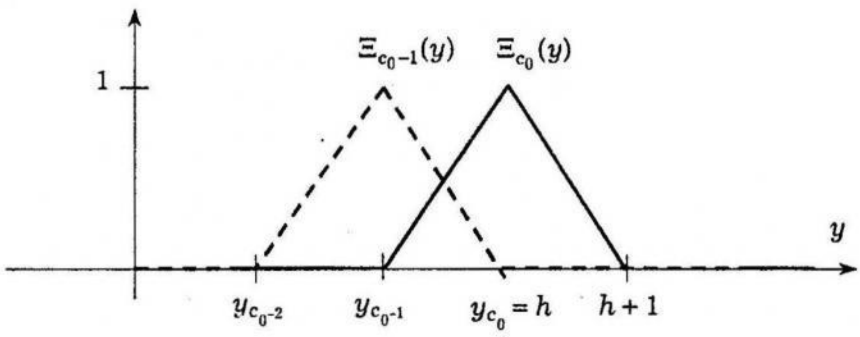

Рис. 2. Функції форми для переміщень.

3. Усереднена модель для переміщень. Згідно з нашими припущеннями, кожний з шарів пластини періодично неоднорідний. Елементом періодичності є прямокутник Δ^c з розмірами l_1^c, l_2^c. Надалі розглядатимемо пластини, для яких елемент Δ^c можна поділити на прямокутники, які вже є однорідними. Нехай ці елементи мають сторони, паралельні до осей координат. Позначимо їхні довжини через l_{1i}^c, l_{2j}^c, $i=1,\ 2,\ \dots,n_0$, $j=1,2,\ \dots,m_0$, причому $l_1^c=\sum_{i=1}^{n_0} l_{1i}^c$, $l_2^c=\sum_{j=1}^{m_0} l_{2j}^c$. Прямокутник зі сторонами l_{1i}^c, l_{2j}^c позначимо через Δ^{cij}. Згідно з нашими припущеннями кожна складова Δ_{ij}^c вже однорідна, тобто для $(x_1,\ x_2)\in\Delta_{ij}^c$ функції B_{klmn}^c є сталими:

$$B_{klmn}^c(x_1,x_2)\in B_{klmn}^c.$$

Подібні припущення приймемо також стосовно функцій λ_{kl} і K_{mn}

$$\lambda_{kl}^c(x_1,x_2)=\lambda_{kl}^{cij},\qquad\qquad K_{mn}^c(x_1,x_2)=K_{mn}^{cij}$$

для всіх $(x_1,x_2)\in\Delta_{ij}^c$.

Вирази (1.2) тепер можна записати у вигляді

$$(\forall v\in V)\ \int_\Pi\sum_{c=1}^{c_0}\int_{y_{c-1}}^{y_c}\left(B_{klmn}^c u_{m,n}v_{k,l}-\lambda_{kl}^c\theta v_{k,l}-b_k v_k+\rho^c\ddot{u}_k v_k\right)dv=$$
$$=\int_\Pi\left(p_k^+ + p_k^-\right)v_k da\,, \tag{3.1}$$

де (p_k^+), (p_k^-) – навантаження відповідно на верхній і нижній поверхнях пластини.

Метод усереднення, який пропонується застосувати, не можна використати для довільного періодичного композиту. Він потребує, щоб комірок періодичності у композиті було досить багато та, щоб їхні розміри були набагато меншими від розмірів усієї пластини. У цій праці скористаємось теорією мікролокальної гомогенізації з використанням апарату нестандартного аналізу [1].

Нехай $\tilde{\rho}^c, \tilde{B}^c_{klmn}, \tilde{\lambda}^c_{kl}$ – функції композиту, у якому розглядуваний елемент був зменшений у n разів (розміри елемента тепер є l_1^c/n, l_2^c/n), а товщина залишається без змін. Якщо такий композит далі займає конфігурацію Ω і діють ті самі масові сили b та навантаження p, то задача для такого композиту відрізняється від (3.1) тільки тим, що замість ρ^c, B^c_{klmn}, λ^c_{kl} потрібно підставити до (3.1) функції $\tilde{\rho}^c$, $\tilde{B}^c_{klmn}$, $\tilde{\lambda}^c_{kl}$. Розв'язок цієї нової задачі, який позначимо через $\tilde{u}_k$, переважно відрізняється від розв'язку u_k задачі (3.1). Вимагатимемо, щоб ці розв'язки відрізнялися між собою порівняно мало, тобто різниця

$$\tilde{u}_k(x_1,x_2,y,t)-u_k(x_1,x_2,y,t)\equiv\bar{u}_k(x_1,x_2,y,t)$$

була порівняно малою стосовно u_k для кожного $(x_1,x_2,y)\in\Omega$. Якщо це виконується для кожного n, то, розглядаючи характерний елемент безмежно малих розмірів ε_1, ε_2, матимемо, що функції $\bar{u}_k$ набувають безмежно малих значень ${}^{\varepsilon}u_k$, а u_k стають функціями ${}^{*}u_k$, визначеними в ${}^{*}\Omega$ зі значеннями в ${}^{*}R$, де ${}^{*}\Pi\subset{}^{*}R^2$; ${}^{*}R$ є множиною всіх чисел вигляду ${}^{*}x=x+\varepsilon$, $x\in R$; ε – довільне нескінченно мале число [1]. Отже,

$$\tilde{u}_k(x_1,x_2,y,t)={}^{*}u_k(x_1,x_2,y,t)\ +\ {}^{\varepsilon}u_k(x_1,x_2,y,t). \tag{3.2}$$

На нескінченно малі члени ${}^{\varepsilon}u_k$ накладаємо тепер в'язі. Приймемо, що

$${}^{\varepsilon}u_k(x_1,x_2,y,t)=\xi^a(y)h^a_s(x_1,x_2)q^{as}_k(x_1,x_2,t), \tag{3.3}$$

де підсумовування за s відбувається від 1 до s_0; q^{as}_k є стандартними функціями, визначеними в ${}^{*}\Pi$ зі значеннями у ${}^{*}R^2$. Називатимемо їх мікролокальними параметрами [2]. Функції h^a_s – відомі. Простір (q^{as}_k) позначимо через Q.

Віртуальні переміщення $\tilde{v}^a_k$ набудуть аналогічного до (3.2) і (3.3) вигляду. Мікролокальні параметри для них позначимо через r^{as}_k.

Використовуючи метод нестандартного аналізу, варіаційний принцип для згомогенізованої періодично неоднорідної пластини набуде вигляду

$$\left(\forall\left(v^0,v^1,\ldots,v^{c_0}\right)\in T\right)\left(\forall\left(r^0,r^1,\ldots,r^{s_0}\right)\in Q\right)\int\limits_{\Pi}\Big\{\Big[B^{cij}_{k\alpha m\beta}\mu^{cab}\left(\eta^c_{ij}u^a_{m,\beta}+\eta^{ca\beta}_{ijs}q^{as}_m\right)+$$

$$+B^{cij}_{k\alpha m3}\mu^{cab}_3\eta^c_{ij}u^a_m-\lambda^{cij}_{k\alpha}\theta^{cb}_{ij}\Big]v^b_{k,\alpha}+\Big[B^{cij}_{k3m\beta}\mu^{cba}_3\left(\eta^c_{ij}u^a_{k,\beta}+\eta^{ca\beta}_{ijs}q^{as}_m\right)+$$

$$+B^{cij}_{k3m3}\mu^{cab}_{33}\eta^c_{ij}u^a_m-\lambda^{cij}_{k3}\theta^{cb^3}_{ij}-b^{cb}_k+\rho^{cij}\mu^{cab}\eta^c_{ij}\ddot{u}^a_k\Big]v^b_k+$$

$$+\Big[B^{cij}_{k\alpha m\beta}\mu^{cab}\left(\eta^c_{ij}u^a_{m,\beta}+\eta^{cab\alpha\beta}_{ijst}q^{as}_m\right)+$$

$$+B^{cij}_{k\alpha m3}\mu^{cab}_{3}\eta^{ca\alpha}_{ijt}u^{a}_{m}-\lambda^{cij}_{k\alpha}\theta^{cb\alpha}_{ijt}\Big]r^{bt}_{k}\Big\}dv=\int\limits_{\Pi}\left(p^{+}_{k}v^{0}_{k}+p^{-}_{k}v^{c_0}_{k}\right)da \qquad (3.4)$$

де
$$\mu^{cab}=\int\limits_{y_{c-1}}^{y_c}\xi^a\xi^b dy\,,\qquad \mu^{cab}_{3}=\int\limits_{y_{c-1}}^{y_c}\xi^a{}_{,3}\,\xi^b dy\,,$$

$$\mu^{cab}_{33}=\int\limits_{y_{c-1}}^{y_c}\xi^a{}_{,3}\,\xi^b{}_{,3}\,dy\,,\qquad b^{cab}=\int\limits_{y_{c-1}}^{y_c}\xi^a b\,dy\,,$$

а також

$$\eta^{c}_{ij}=\frac{l^c_{1i}l^c_{2j}}{l^c_1 l^c_2},\qquad \eta^{ca\beta}_{ijs}=\frac{1}{l^c_1 l^c_2}\int\limits_{\Delta^c_{ij}}h^a_s{}_{,\beta}\,da\,,\qquad \eta^{cab\alpha\beta}_{ijst}=\frac{1}{l^c_1 l^c_2}\int\limits_{\Delta^c_{ij}}h^a_s{}_{,\alpha}\,h^b_t{}_{,\beta}\,da\,. \qquad (3.5)$$

Функції θ^{cb}_{ij}, $\theta^{cb^3}_{ij}$, $\theta^{cb\alpha}_{ijt}$ є визначені згідно з залежностями

$$\theta^{cb}_{ij}=\frac{1}{l^c_1 l^c_2}\int\limits_{\Delta^c_{ij}}\int\limits_{y_{c-1}}^{y_c}\xi^b\theta dy\,da\,,\qquad \theta^{cb^3}_{ij}=\frac{1}{l^c_1 l^c_2}\int\limits_{\Delta^c_{ij}}\int\limits_{y_{c-1}}^{y_c}\xi^b{}_{,3}\,\theta dy\,da\,,$$

$$\theta^{cb\alpha}_{ijt}=\frac{1}{l^c_1 l^c_2}\int\limits_{\Delta^c_{ij}}h^b_t{}_{,\alpha}\int\limits_{y_{c-1}}^{y_c}\xi^b\theta dy\,da\,. \qquad (3.6)$$

Співвідношення (3.4) разом з виразами (3.5), (3.6) описують поведінку пластини під впливом навантаження і температури.

4. Усереднена модель для температури. Нехай Ω^c – довільний шар у пластині. Вплив неоднорідності шару на температуру $\theta(x_1,x_2,y,t)$, $(x_1,x_2,y)\in\Omega^c$ розглядатимемо, припускаючи, що її можна подати у аналогічному до (3.2) вигляді

$$\theta(x_1,x_2,y,t)=\vartheta^c(x_1,x_2,y,t)+{}^{\varepsilon}\vartheta_c(x_1,x_2,y,t)\,,$$

де $\quad {}^{\varepsilon}\vartheta_c(x_1,x_2,y,t)=l^c_s(x_1,x_2)\gamma^c_s(x_1,x_2,y,t)\,.$

Функція $l^c_s(x_1,x_2)$ відіграє тут роль, аналогічну до $h^c_s(x_1,x_2)$ і є функцією форми; γ^c_s – невідомі функції, які є мікролокальними параметрами для температури.

Згідно з [2], усереднені рівняння на температуру набудуть вигляду

$$K^{cij}_{mn}\left(\eta^c_{ij}\vartheta^{c}_{,nm}+\eta^{cn}_{ijs}\gamma^{cs}_{,m}\right)+g^c-s^{cij}\eta^c_{ij}\dot{\vartheta}^c=0\,,$$

$$K^{cij}_{mn}\left(\eta^{cn}_{ijs}\vartheta^{c}_{,m}+\eta^{cnm}_{ijst}\gamma^{ct}\right)=0\,, \qquad (4.1)$$

де η^c_{ij} є визначеними так само, як і $(3.5)_1$, а для інших коефіцієнтів правильні залежності

$$\eta^{cn}_{ijs}=\frac{1}{l^c_1 l^c_2}\int\limits_{\Delta^c_{ij}}l^c_s{}_{,n}\,da\,,\qquad \eta^{cnm}_{ijst}=\frac{1}{l^c_1 l^c_2}\int\limits_{\Delta^c_{ij}}l^c_s{}_{,n}\,l^c_t{}_{,m}\,da\,,$$

$$s^{cij} = \rho^c c_p^c \big|_{(x_1, x_2, y) \in \Delta_{ij}^c} \tag{4.2}$$

а також $g^c = \dfrac{1}{l_1^c l_2^c h^c} \displaystyle\int\limits_{\Delta^c \times (y_{c-1},\, y_c)} h_s^a{}_{,\alpha}\, h_t^b{}_{,\beta}\, da$.

Для точок $(x_1, x_2, y) \in \partial\Omega^c - \partial\Omega \cap \partial\Omega^c$ приймаємо умови вільного притоку тепла.

Зазначимо, що всі величини, які входять у (4.2), аналогічні до величин (3.5) і є числами.

5. Висновки. Вирази (3.4) описують пластину, яка складається з періодично неоднорідних шарів. Введення в'язей (2.1) дало змогу замінити віднесене до тривимірної області переміщення функціями, визначеними на двовимірній області. В'язі (3.3) і аналогічні в'язі для температури, спричиняють те, що у співвідношення (3.4) і (4.1) вже не входять сильно осцилюючі матеріальні функції, а тільки постійні. Невідомими функціями у цій моделі є переміщення поверхонь поділу шарів у пластині, температура і мікролокальні параметри, які описують вплив неоднорідності матеріалу.

Серед введених припущень відзначимо два: одержана модель може бути використана тільки для пластин, у яких є багато комірок періодичності, а кількість шарів може бути довільною, проте не дуже великою.

---

1. *Robinson A.* Non Standard Analysis. – North Holland, Amsterdam. – 1966.
2. Woźniak Cz. A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites // Int. J. Eng. Sci. – 1987. – **5**. – P. 483–499.
3. *Nagórko W.* Two methods of modelling of periodic nonhomogeneous elastic plates // J. of Theoret. App. Mech. – 1998. – **36**. – P. 291–303.

Wyeslav Nagurko, Yaroslaw Zelins'ki

ON HEAT CONDUCTION MODELLING IN PLATES FORMED BY PERIODICALLY NONHOMOGENEOUS LAYERS

The paper deals with modelling problems of layered elastic plates. By means of the homogenization method based on the nonstandart analysis we derive homogenized model of layered elastic plate in which each layer is composed of n different homogeneous anisotropic linear-elastic elements.

Стаття надійшла до редколегії 25.08.99