

УДК 539.3

Єжи Ґолась

Академія Технічно-Рільнича ім. Я. і А. Снядецьких, Бидгощ

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ТОВСТИХ БАГАТОШАРОВИХ КОМПОЗИТНИХ ОПОРНИХ БАЛОК З ВИКОРИСТАННЯМ СХЕМИ ГІБРИДНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У НАПРУЖЕННЯХ

1. Вступ. Багатошарові композитні опорні балки з огляду на різницю механічних властивостей окремих шарів відзначаються великою поперечною деформівністю (обтисненням) поперечного перерізу. Тому під час аналізу утримувальної здатності таких балок обов'язковим стає врахування поперечного зсуву, а часто також і впливу видовження-стиску їхніх нормальних елементів [1–3]. Особливо це необхідно у випадку товстих плит з відношенням товщини до поздовжнього розміру $h/L > 0.25$. Однак це може також стосуватися тонших балок з великим відношенням ($E_x^i/E_x^{i+1} > 100$) модулів пружності шарів [8, 9]. Правильно визначити напруження та деформації, які виникають у таких опорних балках, можливого лише з використанням таких програм числових обчислень, що враховують згадані ефекти.

Нижче викладений алгоритм, на основі якого розроблено програму числового аналізу статичної задачі циліндричного згину багатошарових ламінатів та наведено приклади обчислень. Для побудови алгебричних рівнянь використано гібридну схему методу скінченних елементів у напруженнях, засновану на змодифікованому варіаційному функціоналі Райсснера [1–5].

2. Формулювання задачі. Досліджується циліндричний згин (у площині x, z) грубої багатошарової композитної опорної балки, що складається з N

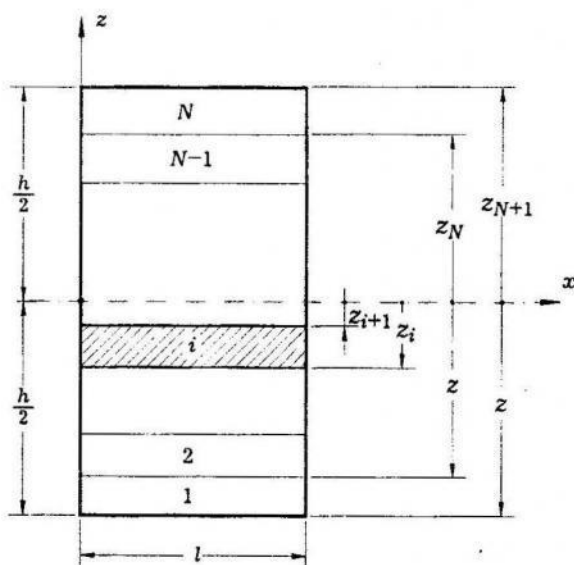


Рис. 1.

шарів різної жорсткості. Жорсткість окремих шарів у напрямі їхньої товщини стала, однак може змінюватися уздовж довжини опорної балки – у напрямі осі x . Матеріал кожного шару ортотропний та лінійно пружний. Статичне зовнішнє навантаження опорної балки прикладене до зовнішніх поверхонь $z = \pm h/2$. На внутрішніх точках діють масові сили. На краях опорної балки задані також відповідні геометричні умови.

Перпендикулярними до поздовжньої осі x перерізами поділяємо опорну балку на довільну кількість n_e шарових елементів. Характерний шаровий скінченний елемент зображено на рис. 1.

На торцьових краях $x = 0, l$ елементів справджуються крайові умови на переміщення $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}$. Змодифікований варіаційний функціонал Райсснера набуває у цьому випадку вигляду [2, 3]

$$\Pi_{mR}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{n_e} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[-\frac{1}{2} \int_{V_{ni}} \boldsymbol{\sigma}^{iT} \mathbf{S}^i \boldsymbol{\sigma}^i dV + \int_{V_{ni}} \boldsymbol{\sigma}^{iT} \mathbf{e}^i(\mathbf{u}^i) dV - \int_{V_{ni}} \hat{\mathbf{f}}_i^T \mathbf{u}^i dV - \int_{S_{\sigma ni}} \hat{\mathbf{t}}^T \mathbf{u}^i dS \right] \right\}, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{\sigma}^i, \mathbf{e}^i, \mathbf{u}^i, \mathbf{S}^i$ – відповідно вектори напружень, деформацій переміщень і матриця коефіцієнтів податності ортотропного матеріалу i -го шару; V_{ni} – об'єм i -го шару в n -му елементі; $S_{\sigma ni}$ – поверхня, на якій задано зовнішнє навантаження; $\hat{\mathbf{t}}; \hat{\mathbf{f}}_i$ – вектор масових сил.

Поле напружень $\boldsymbol{\sigma}^{iT} = \{\sigma_x^i, \sigma_z^i, \sigma_{xz}^i\}$, поле переміщень $\mathbf{u}^{iT} = \{u_i, w_i\}$ і поле деформацій $\mathbf{e}^{iT} = \{\varepsilon_x^i, \varepsilon_z^i, \gamma_{xz}^i\}$ апроксимують функції

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{P}^i \begin{Bmatrix} \bar{\beta}^i \\ \beta^i \\ \bar{\beta}^{i+1} \end{Bmatrix} = \mathbf{P}^i \beta_i, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{N}^i \mathbf{d}^i, \quad (3)$$

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{B}^i \mathbf{d}^i, \quad (4)$$

у яких $\mathbf{P}^i, \mathbf{N}^i, \mathbf{B}^i$ – матриці апроксимаційних функцій; $\mathbf{d}^i$ – вектор вузлових переміщень; β_i – вектори, що містять як приписані обсягу (внутрішності) даного шару вузлові параметри напружень β^i , так і аналогічні параметри $\bar{\beta}^i$ і $\bar{\beta}^{i+1}$, пов'язані відповідно з її нижньою і верхньою поверхнями. Умови неперервності напружень на поверхнях контакту шару i з шаром $i+1$, а саме

$$\sigma_z^i(z = z_{i+1}) = \sigma_z^{i+1}(z = z_{i+1}), \quad \sigma_{xz}^i(z = z_{i+1}) = \sigma_{xz}^{i+1}(z = z_{i+1}), \quad (5)$$

вимагають рівності відповідних параметрів $\bar{\beta}^i$ і $\bar{\beta}^{i+1}$ контактуючих шарів. Якщо на зовнішніх поверхнях крайніх шарів 1 і N задані статичні умови вигляду

$$\sigma_{xz}^1(z = z_1) = 0, \quad \sigma_z^1(z = z_1) = 0, \quad \sigma_{xz}^N(z = z_{N+1}) = 0, \quad (6)$$

то тоді

$$\bar{\beta}^1 = 0, \quad \bar{\beta}_{\sigma_{xz}}^{N+1} = 0, \quad (7)$$

де нижній індекс σ_{xz} означає вибір тільки тих параметрів $\bar{\beta}^{N+1}$, які пов'язані зі складовими дотичних напружень.

Підставляючи залежності (2), (3) і (4) у функціонал (1), після підсумовування за всіма шарами $i = 1, 2, \dots, N$, одержуємо:

$$\Pi_{mc}(\mathbf{d}_e, \beta) = \sum_{n_e} \Pi_{mc}^e = \sum_{n_e} \left(-\frac{1}{2} \beta^T \mathbf{H} \beta + \beta^T \mathbf{Q} \mathbf{d}_e - \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_e \right), \quad (8)$$

де матриці $\mathbf{H}$, $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{F}_e$, що відповідають шаровому елементу, складаються з таких підматриць:

$$\mathbf{H}^i = \int_{V_{ni}} \mathbf{P}^{iT} \mathbf{S}^i \mathbf{P}^i dV, \quad \mathbf{Q}^i = \int_{V_{ni}} \mathbf{P}^{iT} \mathbf{B}^i dV, \quad \mathbf{F}^i = \int_{V_{ni}} \mathbf{N}^{iT} \hat{\mathbf{f}}^i dV + \int_{S_{oni}} \mathbf{N}^{iT} \hat{\mathbf{t}}^i dS, \quad (9)$$

складовими векторів β і $\mathbf{d}_e$ є відповідні параметри з окремих шарів елемента. Вузли для опису переміщень обирають лише на поверхнях контакту елементів $x = \text{const}$.

За умов стаціонарності функціоналу (8) щодо взаємно незалежних параметрів β і $\mathbf{d}_e$ одержуємо

$$\beta = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{d}_e, \quad (10)$$

а також

$$\sum_{n_e} (\mathbf{k} \mathbf{d}_e - \mathbf{F}_e) = \mathbf{0} \quad \text{або} \quad \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}, \quad (11)$$

де символом

$$\mathbf{k} = \mathbf{Q}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q} \quad (12)$$

позначено матрицю жорсткості шарового елемента.

З алгебричних рівнянь рівноваги (11), що стосуються цілої системи, визначають переміщення. Далі за допомогою залежностей (10) і (2) – напруження в окремих шарах системи.

Розроблено дві версії комп'ютерної програми для скінченного елемента з N шарами. Перша – з кількістю параметрів апроксимації напружень $n_\beta = 14N - 5$ та кількістю параметрів апроксимації переміщень $n_u = 8N + 4$; друга – відповідно з кількістю параметрів $14N - 5$ та $4N + 4$.

В обох випадках двовимірне поле напружень у кожному шарі шарового елемента апроксимували залежністю

$$\sigma^i(x, z) = \underset{(3 \times 1)}{\mathbf{P}^i(x, z)} \underset{(19 \times 1)}{\beta_i}, \quad (13)$$

у якій матриця поліноміальних функцій $\mathbf{P}^i(x, z)$ містить відповідно для окремих складових: для σ_x^i – апроксимації третього степеня в обох напрямках осей координат x та z ; для σ_z^i – лінійні апроксимації у напрямі x та п'ятого степеня у напрямі осі z ; для σ_{xz}^i – квадратичну апроксимацію у напрямі осі x і четвертого степеня у напрямі осі z . Наприклад, елементи $P_{1,14}^i$, $P_{2,14}^i$ і $P_{3,14}^i$ матриці $\mathbf{P}^i(x, z)$ є такі:

$$P_{1,14}^i = F_i(z) x^3, \quad P_{2,14}^i = \frac{3}{10} K_i(z) x, \quad P_{3,14}^i = \frac{3}{20} R_i(z) x^2, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} F_i(z) &= \frac{1}{5} (z_i^3 + 4z_i^2 z_{i+1} + 4z_i z_{i+1}^2 + z_{i+1}^3) - \frac{3}{10} (3z_i^2 + 4z_i z_{i+1} + 3z_{i+1}^2) z + z^3, \\ K_i(z) &= 2(z_i^3 z_{i+1}^2 + z_i^2 z_{i+1}^3) - z(4z_i^3 z_{i+1} + 7z_i^2 z_{i+1}^2 + 4z_i z_{i+1}^3) + \\ &\quad + 2z^2(z_i^3 + 4z_i^2 z_{i+1} + 4z_i z_{i+1}^2 + z_{i+1}^3) - z^3(3z_i^2 + 4z_i z_{i+1} + 3z_{i+1}^2) + z^5, \end{aligned}$$

$$R_i(z) = (4z_i^3 z_{i+1} + 7z_i^2 z_{i+1}^2 + 4z_i z_{i+1}^3) - 4z(z_i^3 + 4z_i^2 z_{i+1} + 4z_i z_{i+1}^2 + z_{i+1}^3) + 3z^2(3z_i^2 + 4z_i z_{i+1} + 3z_{i+1}^2) - 5z^4. \quad (15)$$

Разом з тим вектор параметрів β_i має вигляд $\{\bar{\beta}_1^i, \bar{\beta}_2^i, \dots, \bar{\beta}_5^i; \beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_9^i; \bar{\beta}_1^{i+1}, \bar{\beta}_2^{i+1}, \dots, \bar{\beta}_5^{i+1}\}^T$. До того ж застосований опис напружень (13) задовольняє однорідні рівняння рівноваги в області шару та статичні умови на зовнішніх поверхнях крайніх шарів.

Для опису поля переміщень $\mathbf{u}^i(x, z) = \{u^i, w^i\}^T$ у характерному шарі елемента на краях $x = 0, L$ обрано по три вузли у першій версії програми та по два вузли у другій. У кожному з вузлів допускаються по два трансляційні ступені вільності. Тому у кожній зі смуг для розглядуваних версій програми маємо відповідно по $n_p = 9$ і $n_u = 12$ та $n_p = 9$ і $n_u = 8$ незалежних параметрів напружень та ступенів вільності переміщень.

3. Числовий аналіз та висновки. Подібно до того, як це зроблено у [3], програму протестували на прикладі тришарової балки з ламінату, для якої точний аналітичний розв'язок на основі рівнянь теорії пружності містить праця [6]. У цьому випадку для ламінату з епоксидних шарів, зміцнених вугільними волокнами, за відношення $h/L = 0.25$ та поділу на 24 шарові елементи відносна похибка прогинів та складових компонент тензора напружень перебувала у межах $1.3 \div 3.7\%$. Програма зверифікована теж за допомогою поміщених у праці [7] тестів номер 3e і 3f, що стосуються плоского напруженого стану. У розглянутому прикладі однорідної опорної плити розмірами 2.0×10.5 м, опертої на краї $x = 0$ і навантаженої зосередженою силою на вільному краї $x = 10.5$ м, одержані результати обчислень для найбільших вертикальних переміщень $w(L)$ відрізнялися відповідно на 5.7% і 3.2% при поділі на 10 і 14 чотиришарових елементів. Отримані поля переміщень і напружень σ_x зображені на рис. 2. На рис. 3 зображено відповідні результати для розглядуваної плити за рівномірного навантаження її нижньої поверхні $z = -h/2 = -1.0$ м.

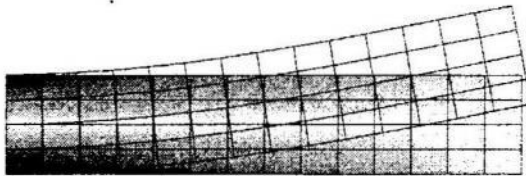


Рис. 2. Опорна плита, завантажена зосередженою силою P .

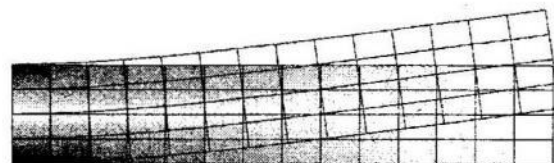


Рис. 3. Опорна плита за рівномірного навантаження.

На рисунках переміщення збільшені у десять разів стосовно до геометрії плити. Зростання міри інтенсивності затемнення фрагментів плити відповідає збільшенню величини напружень.

1. *Mau S. T., Tong P., Pian T. H. H.* Finite element solution for laminated thick plates // *J. Comp. Materials.* – 1972. – No. 6. – P. 304–311.
2. *Spilker R. L., Chou S. C., Orringer O.* Alternate hybrid-stress elements for analysis of multilayer composite plates // *J. Comp. Materials.* – 1977. – No. 11. – P. 51–70.
3. *Spilker R. L.* A hybrid-stress finite element formulation for thick multilayer laminates // *Computer and Structures.* – 1980. – No. 11. – P. 507–514.
4. *Pian T. H. H., Chen D.* Alternative ways for formulation of hybrid stress elements // *Intern. J. for Numer. Meth. in Engng.* – 1982. – **18**. – P. 1679–1684.
5. *Pian T. H. H., Chen D.* On the suppression of zero energy deformation modes // *Intern. J. for Numer. Meth. in Engng.* – 1983. – **19**. – P. 1741–1752.
6. *Pagano N. J.* Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending // *J. Comp. Materials.* – 1969. – No. 3. – P. 398–411.
7. *Kleiber M.* Wprowadzenie do MES. – Warszawa-Poznań: PWN, 1989.
8. *Golaś J.* On limits of application of Kirchhoff's hypothesis in the theory of viscoelastic fibrous composite plates // *Engng. Trans.* – 1995. – **43**, No. 4. – P. 603–626.
9. *Golaś J.* On necessity of making allowance for shear strain in cylindrical bending of fibre composite viscoelastic plates // *Arch. Civil Engng.* – 1997. – **43**, No. 2. – P. 121–147.

Jerzy Golaś

**NUMERICAL ANALYSIS OF THICK MULTILAYER LAMINATED BEAMS
WITH HYBRID-STRESS FINITE ELEMENTS APPLICATION**

At the considered paper the algorythm with the help of which the program is developed for the static calculation of cylindrically loaded multilayered laminated beams is proposed. For the construction of the algebraic equations the hybrid-stress finite elements method based on modified Raissner variational functional is used.

Стаття надійшла до редколегії 24.08.99