ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 1999. Вип. 55. С. 119–122 *Ser. mech.-math. 1999. No. 55. P. 119–122*

УДК 539.3

Ольга Турчин

Львівський національний університет ім. І. Франка

ПЕРЕХІДНІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У БАГАТОШАРОВОМУ ПІВПРОСТОРІ

Дослідження нестаціонарного процесу теплопровідності в неоднорідних тілах та фізико-механічних явищ, що його супроводжують, є актуальним з огляду на численні проблеми у вирішенні сучасних технологічних завдань [1]. Сьогодні у літературі практично відсутні аналітичні розв'язки такого класу задач. У цій праці на основі методу інтегрального перетворення Лагерра [2] розроблено методику побудови розв'язку квазістатичних двовимірних задач термопружності для плоскошаруватих композитів.

Розглянемо композит, віднесений до циліндричної системи координат r, z $(0 \le r < \infty;\ 0 \le z < \infty)$, який складається з M шарів різної товщини та з різними фізико-механічними властивостями (елемент з номером M – півпростір). У момент часу $t = 0$ на його граничній поверхні починає діяти джерело тепла інтенсивності $q^*(r,t)$. Вважаючи, що початкова температура композита дорівнює нулю, температурне поле в ньому визначимо розв'язком початково-крайової задачі, яка в безрозмірних змінних ρ, γ, τ буде мати вигляд

$$\partial^2_{\rho\rho} T^{(i)} + \rho^{-1}\partial_\rho T^{(i)} + \partial^2_{\gamma\gamma} T^{(i)} = \tilde{a}_i^{-1}\partial_\tau T^{(i)},\ i = \overline{1,M}; \tag{1}$$

$$T^{(i)} = 0, \quad \tau = 0, \quad i = \overline{1,M}; \tag{2}$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)}\,\partial_\gamma T^{(1)} = -q^*(\rho,\tau), \quad \gamma = 0; \quad \partial_\gamma T^{(M)} = T^{(M)} = 0, \quad \gamma \to \infty; \tag{3}$$

$$T^{(i)} = T^{(i+1)}, \quad \tilde{\lambda}_T^{(i)}\partial_\gamma T^{(i)} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\,\partial_\gamma T^{(i+1)}, \ \gamma = \gamma_i, \ \ i = \overline{1, M-1}, \tag{4}$$

де $\rho = \dfrac{r}{d}$, $\gamma = \dfrac{z}{d}$, $\tau = \dfrac{a_0 t}{d^2}$, $\tilde{a}_i = \dfrac{a_i}{a_0}$, $\tilde{\lambda}_T^{(i)} = \dfrac{\lambda_T^{(i)}}{\lambda_T^{(0)}}$, $\gamma_i = \sum\limits_{k=1}^{i}\tilde{h}_i$, $\tilde{h}_i = \dfrac{h_i}{d}$; d – деякий лінійний розмір; $\lambda_T^{(i)}$, a_i – відповідно, коефіцієнти тепло- і температуропровідності; h_i – товщина i-го шару.

Застосовуючи до рівнянь (1), крайових умов (3) та умов спряження (4) інтегральне перетворення Ґанкеля – Лагерра, після врахування початкових умов (2) одержимо трикутну послідовність крайових задач:

$$d^2_{\gamma\gamma}\,\overline{T}_n^{(i)} - \omega_i^2\,\overline{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \overline{T}_m^{(i)}, \quad i = \overline{1,M}; \tag{5}$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(1)}\,d_\gamma\,\overline{T}_n^{(1)}\Big|_{\gamma=0} = -\overline{q}_n(\xi), \quad \overline{T}_n^{(M)}\Big|_{\gamma\to\infty} = 0; \tag{6}$$

$$\overline{T}_n^{(i)} = \overline{T}_n^{(i+1)}, \ \gamma = \gamma_i, \ \ i = \overline{1, M-1},$$

$$\tilde{\lambda}_T^{(i)}\, d_\gamma\, \overline{T}_n^{(i)} = \tilde{\lambda}_T^{(i+1)}\, d_\gamma\, \overline{T}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}\,, \tag{7}$$

у формулах (5)-(7) $n = 0,1,2,\ldots$, $\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma) = \int\limits_0^\infty \rho \left[\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)\, L_n(\lambda\tau)\, d\tau \right] J_0(\rho\xi)\, d\rho$ – зображення за Лагерром і Ґанкелем, $L_n(\cdot)$ – поліноми Лагерра, $\omega_i^2 = \xi^2 + \beta_i$, $\beta_i = \lambda/\tilde{a}_i$, λ – масштабний множник.

Загальний розв'язок трикутної послідовності (5) подамо у вигляді алгебричної згортки:

$$\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma) = \sum_{j=0}^{n} \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi)\, G_j^{(i)}(\xi,\gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi)\, W_j^{(i)}(\xi,\gamma) \right], \quad i = \overline{1,M}, \ n = 0,1,2,\ldots, \tag{8}$$

де

$$G_j(\gamma,\omega_i) = \exp(-\omega_i\gamma) \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^i \frac{(\omega_i\gamma)^k}{k!}; \quad W_j(\gamma,\omega_i) = \exp(\omega_i\gamma) \sum_{k=0}^{j} a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i\gamma)^k}{k!}, \tag{9}$$

а коефіцієнти $a_{j,k}^i$ задовольняють рекурентні співвідношення:

$$a_{j,k+1}^i = \frac{1}{2}\left(a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right). \tag{10}$$

Задовольняючи крайові умови, умови спряження шарів та умови на безмежності, одержуємо трикутну послідовність функційних рівнянь:

$$\left[b_{k,l} \right] \left\{ A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, \ \ldots, A_n^{(l)}, B_n^{(l)}, \ldots, A_n^{(M)} \right\}^{\mathbf{T}} = \left\{ c_n^k \right\}, \quad B_n^{(M)} \equiv 0, \ \ n = 0,1,2,\ldots. \tag{11}$$

У системах (11) коефіцієнти матриці $b_{k,l}$ не залежать від n і є значеннями фундаментальних розв'язків $G_j(\gamma,\omega_i)$ та $W_j(\gamma,\omega_i)$ та їхніх похідних на граничній поверхні $\gamma = 0$ та на лініях поділу шарів $\gamma = \gamma_i$. Стовпець вільних членів c_n^k складається з комбінації невідомих $A_m^{(i)}$, $B_m^{(i)}$, $m = \overline{0, n-1}$, одержаних за попередніх значень n.

Знайшовши всі $A_n^{(i)}$ і $B_n^{(i)}$, а отже, і $\overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)$ за формулою (8), розв'язок задачі (1)-(4) подамо у вигляді

$$T^{(i)}(\rho,\gamma,\tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int\limits_0^\infty \xi\, \overline{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma)\, J_0(\xi\rho)\, d\xi \right] L_n(\lambda\tau). \tag{12}$$

Визначимо напружено-деформований стан у композиті, спричинений температурним полем (12), припустивши, що його гранична поверхня $\gamma = 0$ вільна від навантажень, а на поверхнях поділу шарів виконуються умови ідеального механічного контакту.

У термінах ключових функцій $\theta^{(i)}(\rho,\gamma,\tau) = \operatorname{div} \vec{\mathbf{U}}^{(i)}$ і $w^{(i)}(\rho,\gamma,\tau)$, де $\vec{\mathbf{U}}^{(i)} = (u^{(i)}, w^{(i)})^T$ – вектор пружних переміщень в i-му шарі, задача полягає у відшуканні для кожного шару розв'язку $2M$ рівнянь Пуассона:

$$\Delta\theta^{(i)} = \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \Delta T^{(i)}, \quad \Delta w^{(i)} = -\frac{1}{1-2\nu_i} \partial_\gamma \theta^{(i)} + \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{2(1+\nu_i)}{1-2\nu_i} \partial_\gamma T^{(i)}, \quad i = \overline{1,M} \tag{13}$$

за нульових початкових умов:

$$\theta^{(i)}(\rho,\gamma,0) = w^{(i)}(\rho,\gamma,0) = 0, \quad i = \overline{1,M}, \tag{14}$$

крайових умов:

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)} = \sigma_{\rho\gamma}^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0; \quad u^{(M)} = w^{(M)} = 0, \quad \gamma \to \infty \tag{15}$$

та умов спряження шарів:

$$u^{(i)} = u^{(i+1)}, \quad w^{(i)} = w^{(i+1)}, \quad \sigma_{\rho\gamma}^{(i)} = \sigma_{\rho\gamma}^{(i+1)}, \quad \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)} = \sigma_{\gamma\gamma}^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}. \tag{16}$$

Тут, $\tilde{\alpha}_T^{(i)} = \alpha_T^{(i)} / \alpha_T^{(i)}$, $\tilde{E}_i = E_i / E_0$, $\Delta = \partial_{\rho\rho}^2 + \rho^{-1}\partial_\rho + \partial_{\gamma\gamma}^2$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Розв'язок рівнянь (13) у просторі зображень за Ґанкелем – Лагерром знайдемо у вигляді

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi,\gamma) = C_n^{(i)}(\xi) e^{\xi\gamma} + D_n^{(i)}(\xi) e^{-\xi\gamma} + \tilde{\alpha}_T^{(i)} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \bar{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma); \tag{17}$$

$$\bar{w}_n^{(i)}(\xi,\gamma) = F_n^{(i)}(\xi) e^{\xi\gamma} + H_n^{(i)}(\xi) e^{-\xi\gamma} - \frac{\gamma}{2(1-2\nu_i)} \left[C_n^{(i)}(\xi)\operatorname{ch}(\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi)\operatorname{sh}(\xi\gamma) \right] +$$

$$+ \frac{\tilde{\alpha}_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} d_\gamma \tilde{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma), \tag{18}$$

де $\tilde{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma) = \bar{T}_n^{(i)}(\xi,\gamma) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\xi,\gamma)$, $n = 1,2,\ldots$; $\tilde{T}_0^{(i)}(\xi,\gamma) = \bar{T}_0^{(i)}(\xi,\gamma)$.

З крайових умов та умов спряження одержимо системи функційних рівнянь для визначення невідомих $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}$:

$$\left[d_{k,\,l} \right] \left\{ C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, \ldots, C_n^{(l)}, D_n^{(l)}, F_n^{(l)}, H_n^{(l)}, \ldots, \right.$$

$$\left. C_n^{(l)}, D_n^{(M)}, F_n^{(M)}, H_n^{(M)} \right\}^T = \left\{ f_{k,n} \right\}. \tag{19}$$

Кінцевий розв'язок задачі подаємо у вигляді

$$\begin{Bmatrix} w^{(i)} & (\rho,\gamma,\tau) \\ \theta^{(i)} & (\rho,\gamma,\tau) \end{Bmatrix} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \xi \begin{Bmatrix} \bar{w}_n^{(i)} & (\xi,\gamma) \\ \bar{\theta}_n^{(i)} & (\xi,\gamma) \end{Bmatrix} \bar{w}_n^{(i)}(\xi,\gamma) J_0(\xi\rho)\, d\xi \right] L_n(\lambda\tau); \tag{20}$$

$$u^{(i)}(\rho,\gamma,\tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^\infty \left(\bar{\theta}_n^{(i)} - \partial_\gamma \bar{w}_n^{(i)} \right) J_1(\xi\rho)\, d\xi \right] L_n(\lambda\tau). \tag{21}$$

Компоненти тензора напружень у разі відомих переміщень одержуємо за законом Гука.

Числовий аналіз виконували для семишарового періодичного композиту, перший, третій, п'ятий і сьомий (півпростір) елементи якого виготовлені з алюмінієвого стопу, а другий, четвертий і шостий – з Al_2O_3. Під час обезрозмірювання за базові величини $\lambda_T^{(0)}$, a_0, $\alpha_T^{(0)}$, E_0 взяли відповідні параметри алюмінієвого стопу.

За формулою (12) розрахували температурне поле в композиті. Виявилось, що в разі утримання 30 членів ряду за Лагерром відносна похибка в розрахунках не перевищує 1%. На рис. 1 зображено результат розрахунку безрозмірного температурного поля по осі $\alpha = 0$ для різних значень змінної τ. Як бачимо, зміна температури за глибиною в кожному шарі зі збільшенням часу набуває майже лінійного характеру, що пояснюється невеликою відносною товщиною шарів. На рис. 2 зображено результати розрахунку безрозмірних радіальних напружень у різних точках осі $\alpha = 0$ залежно від змінної τ. Можемо простежити, що тривалість перехідного процесу зі збільшенням глибини зменшується, хоча абсолютне значення радіальних напружень для деяких ділянок композиту зі збільшенням значень змінної γ зростає.

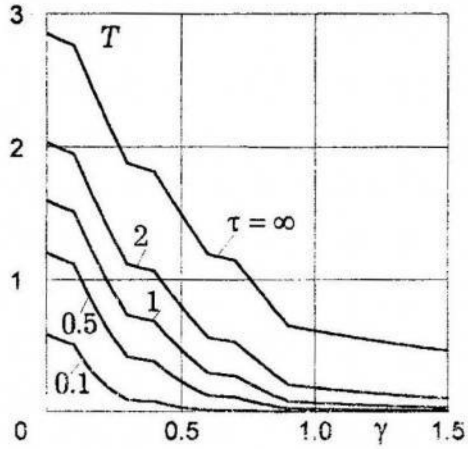

Рис. 1.

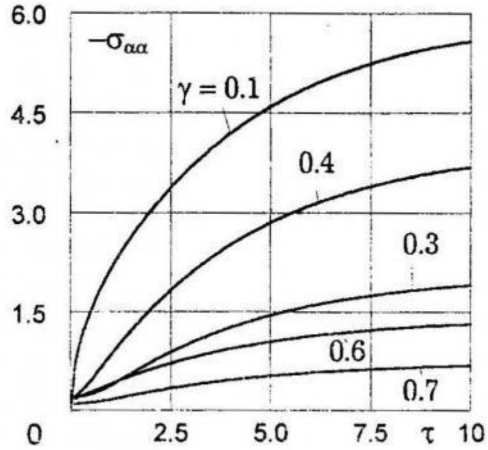

Рис. 2.

Треба зазначити, що запропоновану методику можна використовувати для дослідження фізико-механічних полів у функційно-градієнтальних областях при кусково-сталій апроксимації їхніх фізичних коефіцієнтів в одному напрямі.

1. *Галазюк В. А.* Метод поліномів Чебишева – Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку в часткових похідних з постійними коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3–7.
2. *Taya M., Arsenault R. J.* Metal matrix composites – thermomechanical behavior – New York: At the Pergamon Press, 1989. – 305 p.

Olga Turchyn

AXISYMMETRIC TRANSIENT THERMAL STRESS ANALYSIS OF A MULTILAYERED HALFSPACE

In the paper the quasistatic thermoelastic axisymmetric problem for multilayered halfspace is considered. The problem is solved using Laguerre and Hankel integral transformations. The numerical analysis is carried out for the case of seven-layered periodic composite.

Стаття надійшла до редколегії 09.07.99